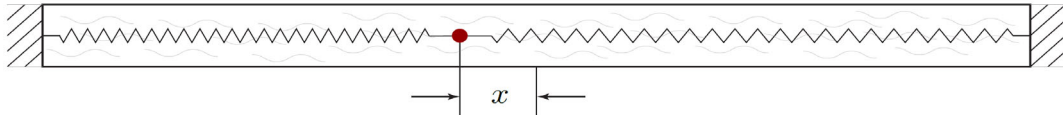


L7.4 Homogenes System v. linearen DG 1. Ordnung

C 7.4f

Anwendung: Gedämpfter harmonischer Oszillator



Eine Masse m , gekoppelt an zwei identische Federn, bewege sich in einer Dimension, in einer Flüssigkeit (Dämpfung). In Gleichgewichtslage sind beide Federn gleich lang.

Auslenkung relativ zur Gleichgewichtslage: $x(t)$

Geschwindigkeit: $\dot{x}(t) \equiv v(t)$ (1)

Newton's 2. Gesetz: $\ddot{x}(t) \equiv a(t) = \frac{1}{m} F(t) = -\overset{>0}{\Omega^2} x(t) - 2\gamma v(t)$ (2)

Rückstellkraft Reibungskraft

Dimensionen: $[\Omega] = \frac{1}{\text{Zeit}}$ $[\gamma] = \frac{1}{\text{Zeit}}$ (3)

Bedeutung: Ω = Oszillatorfrequenz γ = Dämpfungsrate > 0 (4)

Definierende Gleichung für gedämpften harmonischen Oszillator (HO):

(1) in (2): $\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \Omega^2 x = 0$ (5)

Gedämpfter HO als lineares System von zwei DG 1. Ordnung

C 7.4g

(4f.1): $\dot{x} = v$ (1) $\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$ (3)

(4f.2): $\dot{v} = -2\gamma v - \Omega^2 x$ (2)

Matrix/Vektornotation:

[Notationswechsel: $\vec{x}$ statt $\vec{r}$]

$$\overset{(4f.1)}{\dot{\vec{x}}} = A \cdot \vec{x} \quad (3')$$

mit

$$\vec{x} \equiv \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \quad A \stackrel{(2)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix}, \quad (4)$$

Exponentialansatz:

$$\vec{x}(t) \stackrel{(4d.4)}{=} \sum_j \vec{v}_j e^{\lambda_j t} c_j, \quad \vec{v}_j = \begin{pmatrix} v_j^1 \\ v_j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j \\ v_j \end{pmatrix} \quad (5)$$

Eigenwertproblem:

$$A \cdot \vec{v}_j \stackrel{(4d.3)}{=} \lambda_j \vec{v}_j, \quad j = 1, 2 \quad (6)$$

Charakteristisches Polynom:

$$\overset{(L7g.3)}{0} \stackrel{!}{=} \underset{A}{P(\lambda)} \stackrel{(L7g.1)}{=} \det(A - \lambda \mathbb{1}) \stackrel{(4)}{=} \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -\Omega^2 & -2\gamma-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega^2 \quad (7)$$

Zwischenbemerkung:

C7.4h

(4g.7) folgt auch direkt, wenn ein exp-Ansatz für $x(t)$,
eingesetzt wird in die homogene Bewegungsgl. (4f.5):

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} \quad (1)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_0 e^{\lambda t}) + 2\gamma \frac{d}{dt}(x_0 e^{\lambda t}) + \Omega^2(x_0 e^{\lambda t}) \stackrel{(4f.5)}{=} 0 \quad (2)$$

$$\underbrace{(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega^2)}_{\Rightarrow P_A(\lambda) = 0} x_0 e^{\lambda t} = 0 \quad (3)$$

Aber bei so einem Zugang ist zugrundeliegende Struktur des Eigenwertproblems nicht ersichtlich.

(L7g.3)

Eigenwerte = Nullstellen:

$$P_A(\lambda_j) = \lambda_j^2 + 2\gamma\lambda_j + \Omega^2 \stackrel{!}{=} 0, \quad j = 1, 2 \quad (4)$$

Lösungen von (6):

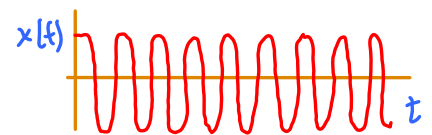
$$\lambda_{\pm} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right\} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \quad (5)$$

Qualitatives Verhalten der Lösung, $\sim e^{\lambda t}$, hängt vom Verhältnis γ/Ω ab:

C7.4i

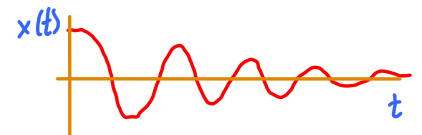
(a): $\gamma = 0$ 'frei, ungedämpft':

$$\lambda_{\pm} = \pm i\Omega, \quad (1)$$



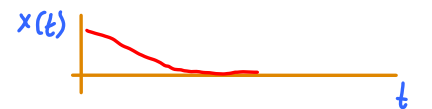
(b): $\gamma < \Omega$ 'unterdämpft':

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm i \underbrace{\sqrt{\Omega^2 - \gamma^2}}_{\equiv \Omega_r} \quad (2)$$



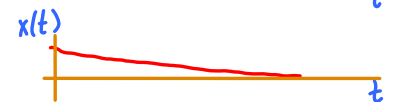
(c): $\gamma = \Omega$ 'kritische Dämpfung':

$$\lambda = -\gamma \quad (3)$$



(d): $\gamma > \Omega$ 'überdämpft':

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \quad (4)$$



Reibung führt

• zu exponentiellem Zerfall der Amplitude: $\sim e^{-\gamma t}$ (5)

unterdämpft:

• zu einer Reduktion der Winkelfrequenz Ω (6)

nach $\Omega_r \equiv \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2}$ welche verschwindet für $\gamma = \Omega$ (7)

überdämpft:

• zu völligen Abwesenheit von Schwingungen! (8)

(b) Unterdämpfter Fall:

$$\gamma < \Omega:$$

(anderen Fälle: Übungen!)

C7.4j

$$\lambda_{\pm} \stackrel{(4i.2)}{=} -\gamma \pm i\Omega_r \quad \text{mit 'reduzierter Frequenz'} \quad \Omega_r \equiv \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2} \quad (< \Omega) \quad (1)$$

Dazugehörigen EV erfüllen:

$$(A - \lambda_{\pm} \mathbb{1}) \cdot \vec{v}_{\pm} = \vec{0} \quad (L7i.1), (C7.4d.3) \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 - \lambda_{\pm} & 1 \\ -\Omega^2 & -2\gamma - \lambda_{\pm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\pm} \\ v_{\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Lösung v. (3)

z.B.:

$$\begin{pmatrix} x_{\pm} \\ v_{\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{\pm} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Check:} \\ (4) \text{ in } (3): \end{array} \begin{array}{l} (-\lambda_{\pm}) \cdot 1 + 1 \cdot \lambda_{\pm} = 0 \quad \checkmark \\ (-\Omega^2) \cdot 1 - (2\gamma + \lambda_{\pm}) \lambda_{\pm} = 0 \end{array} \right] \quad (4g.7)$$

Allgemeine

homogene Lösung:

$$\vec{x}(t) \stackrel{(4g.5)}{=} c_+ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix} e^{\lambda_+ t} + c_- \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix} e^{\lambda_- t} \equiv \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Anmerkung: Die Struktur der EV gewährleistet, dass

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}^1(t) \stackrel{\checkmark}{=} x^2(t) \quad (5) \\ \dot{x}(t) \stackrel{(4g.1)}{=} v(t) \quad \checkmark \quad (6) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{d.h. (4g.1) ist erfüllt} \end{array} \right\} \quad \checkmark$$

Komplexe Lösungen als Hilfsmittel zur Konstruktion reeller Lösungen

C7.4k

Betrachte zunächst nur Ortskomponente:

$x \stackrel{(4g.4)}{=} x^1$

$$\lambda_{\pm} \stackrel{(4i.2)}{=} -\gamma \pm i\Omega_r$$

(4j.1) in (4j.4):

$$x(t) \stackrel{(4i.4)}{=} (c_+ e^{+i\Omega_r t} + c_- e^{-i\Omega_r t}) e^{-\gamma t} \quad (1)$$

Damit $x(t)$ reell ist, brauchen wir komplexe(!) Amplituden:

$$c_{\pm} = |c| e^{\pm i\varphi} \quad (2)$$

Dann

$$x(t) \stackrel{(1),(2)}{=} |c| \left[e^{i(\Omega_r t + \varphi)} + e^{-i(\Omega_r t + \varphi)} \right] e^{-\gamma t} \quad (3) \quad \cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$$

$$= e^{-\gamma t} |c| 2 \cos(\Omega_r t + \varphi) \quad (4) \quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$= e^{-\gamma t} 2|c| [\cos(\Omega_r t) \cos(\varphi) - \sin(\Omega_r t) \sin(\varphi)] \quad (5)$$

$$= e^{-\gamma t} [a \cos \Omega_r t + b \sin \Omega_r t] \quad (6)$$

$$\text{mit } a = 2|c| \cos \varphi = c_+ + c_- \quad , \quad b = -2|c| \sin \varphi = i(c_+ - c_-) \quad (7)$$

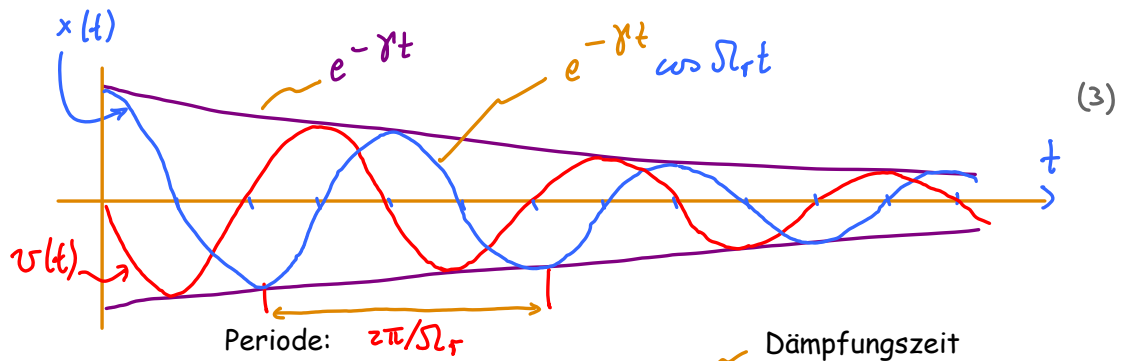
$$v(t) \stackrel{(4k.6)}{=} \dot{x}(t) = e^{-\gamma t} \left\{ \cos(\Omega_r t) (b\Omega_r - a\gamma) + \sin(\Omega_r t) (-a\Omega_r - b\gamma) \right\} \quad (1)$$

C7. 4l

Anpassen der Konstanten mittels Anfangsbedingung:

z.B.: $\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \stackrel{(4k.6)}{=} \begin{pmatrix} a \\ b\Omega_r - a\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = x_0 \\ b = (v_0 + x_0\gamma)/\Omega_r \end{cases} \quad (2)$

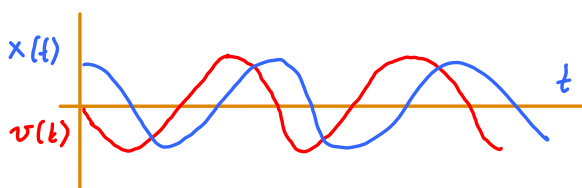
Skizze für $v_0 = 0$:



Die anderen Fälle (qualitativ und in aller Kürze)

C7. 4m

(a) Keine Dämpfung: $\gamma = 0$: $\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = \pm i\Omega \Rightarrow e^{\lambda t} = e^{\pm i\Omega t} \quad (1)$

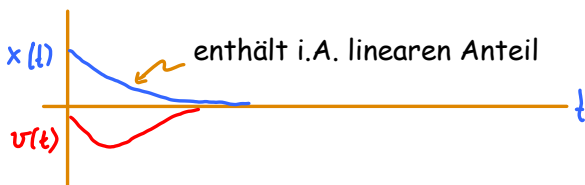


reine
Oszillationen:

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) \quad (2)$$

$$v(t) = -\Omega A \sin(\Omega t + \varphi) \quad (3)$$

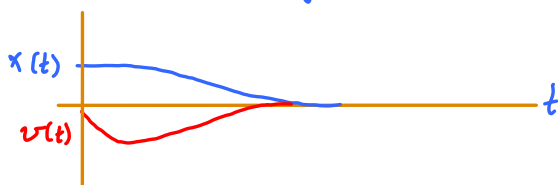
(c) Kritisch gedämpft: $\gamma = \Omega$: $\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = -\gamma$ nur eine Lösung! $c(t) e^{-\gamma t}$
Finde andere mittels 'Variation der Konstanten' (siehe S. C7.3f)



$$x(t) = (x_0 + v_1 t) e^{-\gamma t} \quad (4)$$

$$v(t) = (v_1 - \gamma(x_0 + v_1 t)) e^{-\gamma t} \quad (5)$$

(d) Überdämpft: $\gamma > \Omega$: $\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \equiv -\tilde{\gamma}_{\pm} < 0 \quad (6)$



gar keine Oszillationen: $e^{\lambda t} = e^{-\tilde{\gamma}_{\pm} t} \quad (7)$

Inhomogene lineare DG 1. Ordnung

[Notationswechsel: $\vec{x}$ statt $\vec{f}$]

C7.4n

Inhomogene lineare DG 1. Ordnung hat folgende allgemeine Form:

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t) \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t) \quad \text{'Inhomogenität'} \quad (1)$$

Satz: Lösung v. (1)

kann geschrieben werden als Summe

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t) \quad (2)$$

der allgemeinen homogenen Lösung

$$\dot{\vec{x}}_h(t) = A(t) \cdot \vec{x}_h(t) \quad (3)$$

und einer "speziellen" oder

"partikulären" inhomogenen Lösung,

$$\dot{\vec{x}}_p(t) = A(t) \cdot \vec{x}_p(t) + \vec{b}(t) \quad (4)$$

Check: $\dot{\vec{x}}(t) \stackrel{(2)}{=} \dot{\vec{x}}_h(t) + \dot{\vec{x}}_p(t)$

$$\stackrel{(3,4)}{=} A(t) \cdot (\vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)) + \vec{b}(t) \stackrel{(2)}{=} A(t) \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t) \quad \checkmark \quad (5)$$

Rezept zur Lösung einer inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung:

- (i) Finde allgemeine homogene Lösung
- (ii) Finde eine partikuläre Lösung -- Methode hierzu: 'Variation der Konstanten'
- (iii) Addiere (i) + (ii), berücksichtige Anfangsbedingungen

Inhomogenes System von linearen DG 1. Ordnung mit konst. Koeff.

C7.4o

Variation der Konstanten für $n > 1$ möglich, aber i.A. schwierig. Ausnahme:

$$A = A(x)$$

Also betrachten wir nun

$$\dot{\vec{x}}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t) \quad (1) \quad \begin{cases} \vec{A} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n) & \text{zeitunabhängige Matrix} \\ \vec{b}(t) \in \mathbb{C}^n & \text{zeitabhängige Inhomogenität} \end{cases}$$

mit Anfangsbedingung:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (2)$$

(i) Lösung für homogene DG per Exponential-Ansatz (bereits bekannt)

$$\vec{x}_h(t) = \sum_{j=1}^n \vec{v}_j e^{\lambda_j t} c_j^h \quad (3) \quad \text{mit} \quad A \cdot \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j, \quad j=1, \dots, n \quad (4)$$

durch Anfangsbedingungen bestimmt

Eigenwertproblem!

$$\vec{c}_h = T^{-1} \vec{x}_h(0) \quad \text{Diagonalisierende Ähnlichkeitstransformation: } T = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \quad (4')$$

(ii) Partikuläre Lösung für inhomogene DG: per Variation der Konstanten

Ansatz:

[analog zu (C7.3c.5)]

$$\vec{x}_p(t) \stackrel{(4)}{=} \sum_{j=1}^n \vec{v}_j e^{\lambda_j t} c_j^p(t) \quad (5)$$

Inhomogene
DG (4o.1):

$$\vec{b}(t) = \left(\frac{d}{dt} - A \right) \vec{x}_p(t)$$

(i) C7.4p

$$\stackrel{(4o.5)}{=} \sum_j \left(\frac{d}{dt} - A \right) c_p^j(t) \vec{v}_j e^{\lambda_j t} \quad (2)$$

$$= \sum_j \left(\dot{c}_p^j(t) + \cancel{\lambda_j c_p^j(t)} - \cancel{c_p^j(t) \lambda_j} \right) \vec{v}_j e^{\lambda_j t} \quad (3)$$

$$\sum_j \vec{v}_j \dot{c}_p^j(t) \stackrel{!}{=} \boxed{\vec{b}(t) = \sum_j \dot{c}_p^j(t) \vec{v}_j e^{\lambda_j t}} \quad (4)$$

Trick: Zerlege $\vec{b}(t)$ in Eigenbasis von A

Eigenvektoren sind linear
unabhängig, also folgt aus (4):

$$\dot{c}_p^j(t) e^{\lambda_j t} = b^j(t) e^{-\lambda_j t} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (5)$$

(5) ist lösbar per Integration,
siehe (C7.1e.1-3)

$$\boxed{c_p^j(t) = \int_{t_0}^t b^j(\tilde{t}) e^{-\lambda_j \tilde{t}} d\tilde{t}} \quad (6) \Rightarrow \begin{cases} c_p^j(t_0) = 0 \\ \vec{x}_p(t_0) = \vec{0} \end{cases} \quad (7)$$

(iii) Allgemeine Lösung von (4o.1):

C7.4q

$$\vec{x}(t) \stackrel{(4n.2)}{=} \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t) \stackrel{(4o.3)}{=} \sum_j \vec{v}_j e^{\lambda_j t} c_h^j + \vec{x}_p(t) \quad (1)$$

Bestimme Konstanten mittels Anfangsbedingung:

$$\vec{x}(t_0) = \sum_j \vec{v}_j e^{\lambda_j t_0} c_h^j + \vec{x}_p(t_0) \stackrel{(4p.7)}{=} \vec{0} \quad (2)$$

$$\underbrace{\sum_j \vec{v}_j e^{\lambda_j t_0} c_h^j}_{\equiv c_{h_0}^j} \stackrel{(2')}{=} -\vec{x}_p(t_0)$$

i-Komponente:

$$x^i(t_0) = \sum_j v_j^i c_{h_0}^j \quad (4o.4')$$

Kompaktnotation:

$$\left[\vec{x}(t_0) = T \vec{c}_{h_0} \right] \quad (3)$$

$\Downarrow$

Invertiert:

$$c_{h_0}^j e^{\lambda_j t_0} \stackrel{(2')}{=} c_{h_0}^j = \sum_i (T^{-1})_{ji} x^i(t_0)$$

$$\left[\vec{c}_{h_0} = T^{-1} \vec{x}(t_0) \right] \quad (4)$$

[vergleiche C7.4d.9]

$$c_h^j = \sum_i e^{-\lambda_j t_0} (T^{-1})_{ji} x^i(t_0) \quad (5)$$

Beispiel: Gedämpfter harmonischer Oszillator mit Antrieb

C7.4 r

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \Omega^2 x \stackrel{(4f.5)}{=} f(t) \quad (1)$$

Matrix-Form:

$$\dot{\vec{x}} \stackrel{(4g.1)}{=} \vec{v} \quad (2)$$

$$\dot{\vec{v}} \stackrel{(4g.2)}{=} -\Omega^2 \vec{x} - 2\gamma \vec{v} + f(t) \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \stackrel{(4g.3)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + \underbrace{f(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\equiv \vec{b}(t)} \quad (4)$$

$$\dot{\vec{x}} \stackrel{(4g.4)}{=} A \cdot \vec{x} + \vec{b}(t) \quad (5)$$

Unterdämpfter Fall:

$$\lambda_{\pm} \stackrel{(4i.2)}{=} -\gamma \pm i\Omega_r \quad (6) \quad , \quad \lambda_+ - \lambda_- \stackrel{(6)}{=} 2i\Omega_r \quad (6')$$

(i) Homogene Lösung:

$$\vec{x}_h(t) \stackrel{(4j.4)}{=} \underbrace{c_+}_{\vec{v}_+} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix} e^{\lambda_+ t} + \underbrace{c_-}_{\vec{v}_-} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix} e^{\lambda_- t} \quad (7)$$

(bereits bekannt, siehe Seite C7.4j)

(ii) Konstruktion einer partikulären Lösung, mittels Var. d. Konstanten:

C7.4 s

Ansatz laut (4o.5):
$$\vec{x}_p(t) = \underbrace{c_+(t)}_{\vec{v}_+} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix} e^{\lambda_+ t} + \underbrace{c_-(t)}_{\vec{v}_-} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix} e^{\lambda_- t} \quad (1)$$

Zerlegung v. Antrieb in Eigenbasis von A, laut (4o.4):
$$\vec{b}(t) = \sum_j \vec{v}_j b_j(t)$$

$$\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(t) \stackrel{(4q.5)}{=} \underbrace{\frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}}_{\stackrel{(4r.6')}{=} 2i\Omega_r} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix}}_{\vec{v}_+} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix}}_{\vec{v}_-} \right] f(t) \equiv b_+(t) \vec{v}_+ + b_-(t) \vec{v}_- \quad (2)$$

$$\Rightarrow b_{\pm}(t) = \pm \frac{f(t)}{2i\Omega_r} \quad (3)$$

Lösung für $c_{\pm}(t)$ laut (4o.6):

$$c_{\pm}(t) \stackrel{(4p.6)}{=} \int_{t_0}^t d\tilde{t} b_{\pm}(\tilde{t}) e^{-\lambda_{\pm} \tilde{t}} \stackrel{(3)}{=} \pm \int_{t_0}^t d\tilde{t} \frac{f(\tilde{t})}{2i\Omega_r} e^{-\lambda_{\pm} \tilde{t}} \quad (4)$$

Für partikuläre Lösung, setze (4s.4) in (4s.1):

C7.4f

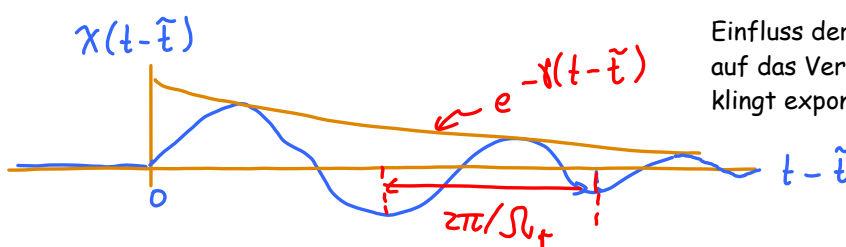
$$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ v_p(t) \end{pmatrix} = \vec{x}_p(t) \stackrel{(4s.1)}{=} c_+(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix} e^{\lambda_+ t} + c_-(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix} e^{\lambda_- t} \quad (1)$$

$$\stackrel{(4s.2)}{=} \int_{t_0}^t d\tilde{t} \frac{f(\tilde{t})}{2i\Omega_r} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix} e^{\lambda_+(t-\tilde{t})}}_{(4q.6): e^{(-\gamma+i\Omega_r)(t-\tilde{t})}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix} e^{\lambda_-(t-\tilde{t})}}_{e^{(-\gamma-i\Omega_r)(t-\tilde{t})}} \right] \quad (2)$$

Orts (1.)-Komponente hiervon liefert:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (3)$$

$$x_p(t) = \int_{t_0}^t d\tilde{t} f(\tilde{t}) \underbrace{\frac{e^{-\gamma(t-\tilde{t})}}{\Omega_r} \sin \Omega_r(t-\tilde{t})}_{\equiv \chi(t-\tilde{t})} \quad (4)$$



Einfluss der Antriebskraft zum Zeitpunkt $\tilde{t}$ auf das Verhalten der Lösung zum Zeitpunkt t klingt exponentiell ab

(5)

C7.5 Lineare Differentialgleichung n. Ordnung

$$f^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n} f$$

C7.5a

Eine allgemeine homogene lineare DG von Ordnung n,

$$c_n f^{(n)} + c_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + c_1 f^{(1)} + c_0 f^{(0)} = 0$$

kann immer umgeschrieben werden in ein System von n linearen DG von Ordnung 1:

(siehe T4-Vorle)

Führe für jede höhere Ableitung eine neue Variable ein,

Index oben für Komponenten eines Vektors (also keine Potenz!)

$$\dot{x}^1(t) \stackrel{(2)}{=} x^2(t) \equiv f^{(1)}(t) \quad (2)$$

$$\dot{x}^2(t) \stackrel{(3)}{=} x^3(t) \equiv f^{(2)}(t) \quad (3)$$

$$\dot{x}^3(t) \stackrel{(4)}{=} x^4(t) \equiv f^{(3)}(t) \quad (4)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}^{n-1}(t) \stackrel{(n)}{=} x^n(t) \equiv f^{(n-1)}(t) \quad (5)$$

$$\dot{x}^n(t) \equiv f^{(n)}(t) \quad (6)$$

dann lautet (1):

$$\cancel{c_n} \dot{x}^n + \frac{c_{n-1}}{\cancel{c_n}} x^n + \dots + \frac{c_1}{\cancel{c_n}} x^2 + \frac{c_0}{\cancel{c_n}} x^1 = 0 \quad (7)$$

(3-7) sind ein System v. DG 1. Ordnung: (mit zeitabhängigen Koeffizienten)

In Matrix-Notation:

17.5b

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \\ \vdots \\ \dot{x}^{n-1} \\ \dot{x}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ -\frac{c_0}{c_n} & -\frac{c_1}{c_n} & -\frac{c_2}{c_n} & \dots & -\frac{c_{n-1}}{c_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^{n-1} \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t) \cdot \vec{x}(t) \quad (2)$$

Zusammenfassung: Inhomogene lineare DG 1. Ordnung

1 z C7.4b

Linear DG:

$$\in \mathbb{C}^n \rightsquigarrow \dot{\vec{x}}(t) = \underbrace{A(t)}_{\text{mat}(\mathbb{C}, n, n)} \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t)$$

falls $= 0$: homogen

falls $\neq 0$: inhomogen

Allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DG:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_h(t) + \bar{x}_p(t)$$

Allgemeine homogene Lösung:

$$\dot{\vec{x}}_h(t) = A(t) \cdot \vec{x}_h(t)$$

(irgendeine) Partikuläre Lösung:

$$\dot{\vec{x}}_p(t) = A(t) \cdot \vec{x}_p(t) + \vec{b}(t)$$

1D (n=1):

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

homogene Lösung (Trennung d. Variablen):

$$x_L(t) = x_0 e^{\Phi(t)}$$

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^t d\tilde{t} \, a(\tilde{t})$$

partikuläre Lösung (Variation d. Konstanten):

$$x_p(t) = c(t) e^{\Phi(t)}$$

mit:

$$c(t) = \int_{t_0}^t d\tilde{t} \, b(\tilde{t}) e^{-\Phi(\tilde{t})}$$

Zusammenfassung: Inhomogene lineare DG mit konstanten Koeffizienten

ZC7.4c

$$\dot{\vec{x}}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t), \quad A = A(\cancel{t}) \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n), \quad \vec{b}(t) \in \mathbb{C}$$

(i) Suche Lösung für homogene DGL per Exponential-Ansatz:

e-Ansatz: $\vec{x}_h(t) = \vec{v} e^{\lambda t}$ Zeitabhängigkeit nur im Exponenten!
zeitunabhängiger Vektor, $\in \mathbb{R}^n$

Ergebnis: Allg. Lösung der homogenen DGL ist Summe über alle Eigenlösungen:

$$\vec{x}_h(t) = \sum_j c_h^j \vec{v}_j e^{\lambda_j t} \quad \text{mit} \quad A \cdot \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j, \quad j=1, \dots, n$$

durch Anfangsbedingungen bestimmt Eigenwertproblem!

(ii) Partikuläre Lösung für inhomogene DGL: per Variation der Konstanten

$$\vec{x}_p(t) = \sum_j c_p^j(t) \vec{v}_j e^{\lambda_j t}, \quad (\text{zerlegt in Eigenbasis von } A)$$

mit $c_p^j(t) = \int_{t_0}^t d\tilde{t} \, b^j(\tilde{t}) e^{-\lambda_j \tilde{t}}$ und $\vec{b}(t) = \sum_j b^j(t) \vec{v}_j$

(iii) Allgemeine Lösung: $\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)$ (6)