

L5.4 Kriterien für Invertierbarkeit einer Matrix

L5.4k

V sei $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Basis $\{\hat{v}_j\}$. $\hat{A}: V \rightarrow V$, $\hat{v}_j \mapsto \hat{A}\hat{v}_j = \hat{w}_j = \sum_i \hat{v}_i A_{ij}$ sei lineare Abbildung. Matrixdarstellung

Definition: $\text{Rang}(\hat{A}) \equiv \dim(\text{span}\{\hat{w}_j\})$ = Dimension des Bildraums von $\hat{A}$ (1)

Definition: $\text{Kern}(\hat{A}) \equiv \{\hat{x} \mid \hat{A}\hat{x} = \hat{0}\}$ = Unterraum aller $\hat{x}$, die auf $\hat{0}$ abgebildet werden. ('Null-Raum') (2)

Wann ist Abbildung $\hat{A}$ bijektiv, d.h. wann ist ihre Matrix A invertierbar? 3 äquivalente Sätze:

(i) $\hat{A}$ invertierbar $\Leftrightarrow$ falls und nur falls für jede Basis $\{\hat{v}_j\}$ bilden die Bildvektoren $\{\hat{w}_j = \hat{A}\hat{v}_j\}$ auch eine Basis
 $\Leftrightarrow \text{Rang}(\hat{A}) = \dim(V)$ (3) (intuitiv gesprochen: aus linear unabhängigen Vektoren darf A nicht linear abhängige machen)

(ii) $\hat{A}$ invertierbar $\Leftrightarrow \hat{A} \cdot \hat{x} = \hat{0}$ impliziert $\hat{x} = \hat{0} \Leftrightarrow \dim(\text{Kern}(\hat{A})) = 0$ ('Kern ist trivial') (4)

Falls Standardbasis benutzt wird, $\{\hat{v}_i\} = \{\vec{e}_i\}$, sodass $A\vec{e}_i = \vec{A}_i$ folgt aus (i) ferner:
 Bildvektor der Standardbasis $\vec{A}_i$ Spaltenvektor der Matrix A

(iii) $\hat{A}$ invertierbar $\Leftrightarrow$ die Spaltenvektoren der Matrix A bilden eine Basis. (5)

[Nächste Frage: wie wissen wir, ob Spaltenvektoren eine Basis bilden? Siehe L6.1]

Begründung für (i): (Selbststudium; AD-Buch, S. 72-74)

L5.4l



Begründung für (i) $\Leftrightarrow$: Annahme: $\{\hat{w}_i\}$ ist eine Basis. (1)

Dann ist $\hat{A}$ surjektiv [das ganze V liegt im Bild v. A , $\hat{A}(V) = V$]
 denn sein Bild, $\hat{A}(V)$, enthält eine Basis v. V , nämlich $\{\hat{w}_i\}$ und somit das ganze V . (2)

Ferner ist $\hat{A}$ auch injektiv [jeder Bildvektor entspricht maximal einem Argument].

Denn ansonsten gäbe es zwei verschiedene Vektoren $\hat{x} = \sum_j \hat{v}_j x_j$ und $\hat{x}' = \sum_j \hat{v}_j x'_j$ (3)
 mit demselben Bild, d.h. $\hat{A} \cdot \hat{x} = \hat{A} \cdot \hat{x}'$ (4)

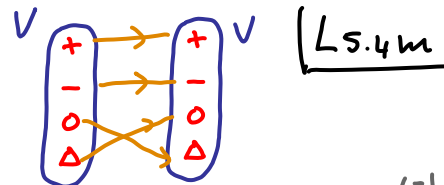
$\Rightarrow \hat{0} \stackrel{(4)}{=} \hat{A}(\hat{x} - \hat{x}') = \hat{A}(\sum_j \hat{v}_j x_j - \sum_j \hat{v}_j x'_j) \stackrel{\text{Linearität}}{=} \hat{A}(\sum_j \hat{v}_j (x_j - x'_j)) = \sum_j \hat{w}_j (x_j - x'_j)$ (5)

Letzte Gl. steht im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren $\{\hat{w}_i\}$

Fazit: A ist surjektiv und injektiv, somit bijektiv, somit invertierbar. $\Leftarrow \square$ (6)

Begründung für (i) $\Rightarrow$:

Annahme: $\hat{A}$ ist bijektiv. (i)



Dann ist jeder Vektor $\hat{y} \in V$ das Bild eines Vektors $\hat{x} \in V$:

$$\hat{y} = A(\hat{x}) = A(\hat{v}_j \cdot x_j) = A(\hat{v}_j) \cdot x_j = \hat{w}_j \cdot x_j \Rightarrow \{\hat{w}_j\} \text{ ist vollständig.} \quad (2)$$

Ferner: $\{\hat{w}_i\}$ sind linear unabhängig. Ansonsten würde eine nicht-triviale Linearkombination existieren, die Null liefert,

$$\hat{0} = \hat{w}_j \cdot x_j = A(\hat{v}_j) \cdot x_j \stackrel{\text{Linearität}}{=} A(\hat{v}_j \cdot x_j), \quad \text{also } \underbrace{\hat{v}_j \cdot x_j}_{\neq \hat{0}} \xrightarrow{A} \hat{0}. \quad (4)$$

im Widerspruch zur Injektivität, denn es gilt auch $\hat{0} \mapsto \hat{0}$. (5)

Fazit: $\{\hat{w}_i\}$ ist vollständig und linear unabhängig, somit eine Basis. $\Rightarrow \square$

Begründung für (ii): analoge Argumente, Selbststudium!

L6 Determinanten

L6a

'Determinante' ist eine Abbildung der Form:

$$\det : \text{mat}(\mathbb{C}, n, n) \rightarrow \mathbb{C} \quad (1)$$

$A \mapsto \det(A)$

Motivation:

1. Invertierbarkeit von $A \Leftrightarrow$ Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig $\Leftrightarrow \boxed{\det A \neq 0}$

2. Diagonalisierung von A :

Finde eine Transformation T ,
so dass

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diagonal}$$

Startpunkt für Diagonalisierung:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$$

3. Jakobi-Determinante bei Variablen-Transformation in Integralen:

$$\left| \frac{\partial(x'_1, \dots, x'_n)}{\partial(y'_1, \dots, y'_n)} \right|$$

In allen Fällen spielt die 'Determinante' einer Matrix eine zentrale Rolle.

Vorschau: L6 Determinanten
L7 Diagonalisierung

L6.1 Determinanten: Definition, geometrische Interpretation

L6b

Kriterium dafür, ob Spaltenvektoren linear unabhängig sind: 2x2

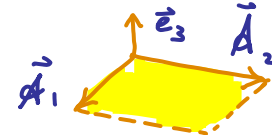
$$2 \times 2 \text{ Matrix: } A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix} = (\vec{A}_1, \vec{A}_2) \quad \text{Spaltenvektoren} \quad (1)$$

Zwei Vektoren $\vec{A}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{A}_2 \neq \vec{0}$, sind linear abhängig, falls $\vec{A}_1 \parallel \vec{A}_2$ (2)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A^1_1 \\ A^2_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A^1_2 \\ A^2_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A^1_1 = \lambda A^1_2 \\ A^2_1 = \lambda A^2_2 \end{matrix} \Rightarrow \frac{A^1_1}{A^1_2} = \lambda = \frac{A^2_1}{A^2_2} \Rightarrow \boxed{A^1_1 A^2_2 - A^2_1 A^1_2 = 0} \quad (3)$$

Geometrische Interpretation für reelle Vektoren:

$$A^1_1 A^2_2 - A^2_1 A^1_2 = \left| \begin{pmatrix} A^1_1 \\ A^2_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^1_2 \\ A^2_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = F(\vec{A}_1, \vec{A}_2) \quad (4)$$

3-dim Versionen von $\vec{A}_1, \vec{A}_2$ 

= von $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ aufgespannte Fläche (= 0 falls $\vec{A}_1 \parallel \vec{A}_2$)

Definition: 'Determinante' einer 2x2 Matrix:

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{vmatrix} \equiv \det \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix} \equiv \boxed{A^1_1 A^2_2 - A^2_1 A^1_2} \quad (5) \quad \text{Merkregel: } \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{vmatrix} \quad (6)$$

Fazit: $\det(A) \neq 0 \iff$ Spaltenvektoren sind linear unabhängig $\iff A$ ist invertierbar (L5.4k.3) (6)

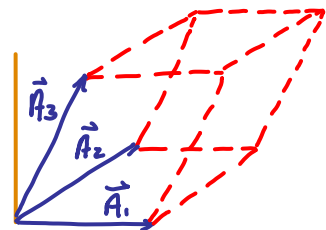
In Formel für Inverse Matrix, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xRightarrow{(L5.4g.2)} A^{-1} = \frac{1}{a d - b c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ ist Nenner $\neq 0$

Kriterium dafür, ob Spaltenvektoren linear unabhängig sind: 3x3

L6c

$$3 \times 3 \text{ Matrix: } A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} \equiv (\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3) \quad \text{Spaltenvektoren} \quad (1)$$

$$(\vec{A}_j)^i = A^i_j \quad (2)$$



Geometrische Interpretation für reelle Vektoren:

Die Spaltenvektoren $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3 \in \mathbb{R}^3$ spannen ein Parallelepiped auf mit Volumen

$$\text{Vol}(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3) \stackrel{(L4m.4)}{=} |(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_3| \quad (3a)$$

$$\stackrel{(L4m.2-3)}{=} \left| \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} A^i_1 A^j_2 A^k_3 \right| \quad (3b)$$

Einstein-Summe über ijk

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \stackrel{(L4m.2-3)}{=} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a^i b^j c^k$$

Levi-Civita-Symbol

Hier: $\vec{a} = \vec{A}_1$, $\vec{b} = \vec{A}_2$, $\vec{c} = \vec{A}_3$

Sie sind linear unabhängig, falls sie nicht alle in einer Ebene liegen, also falls $\text{Vol}(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3) \neq 0$

Definition: 'Determinante' einer 3x3 Matrix $A \in \text{mat}(\mathbb{C}, 3, 3)$ (4)

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{vmatrix} \equiv \det A \equiv (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_3 = \boxed{\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} A^i_1 A^j_2 A^k_3} \quad (5)$$

$\det A \neq 0 \iff$ Spaltenvektoren sind linear unabhängig $\iff A$ ist invertierbar (L5.4k.3) (6)

Explizit:

$$\det A \stackrel{(c.5)}{=} \sum_{ijk} A^i_1 A^j_2 A^k_3 = \underbrace{+ A^1_1 A^2_2 A^3_3}_{\text{L6d}} - \underbrace{A^1_1 A^3_2 A^2_3} - \underbrace{+ A^2_1 A^3_2 A^1_3} - \underbrace{A^2_1 A^1_2 A^3_3} - \underbrace{+ A^3_1 A^1_2 A^2_3} - \underbrace{A^3_1 A^2_2 A^1_3} \quad (1)$$

Anmerkung: Indizes in (1) haben folgende Struktur:

- für feste Reihenfolge 123 der (rechten) Spaltenindizes,

- durchlaufen die (linken) Reihenindizes alle möglichen Reihenfolgen ('alle Permutationen'),

- mit Vorzeichen = $\begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix}$ für $\begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$ Anzahl v. 'Transpositionen' relativ zu 123

123, 231, 312 und 132, 213, 321

('Merkregel des Sarrus' (gilt nur für 3x3 Determinanten, deswegen nicht lohnenswert...))

+ für Produktbildung links oben nach rechts unten:

- für Produktbildung links unten nach rechts oben:

(2)

Permutationen (Vertauschung der n Zahlen 1,2,3, ..., n)

Jede Permutation P lässt sich schreiben als Folge von 'Transpositionen' L6e (1)

nur zwei Elemente werden vertauscht

'signum'

$\text{sgn}(P) \equiv$ 'Vorzeichen der Permutation' $\equiv \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix}$ für $\begin{Bmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$ Anzahl v. Transpositionen (2)

(3)

Beispiel: Alle Permutationen von 123:

Permutation P:	[1,2,3]	[1,3,2]	[2,1,3]	[3,2,1]	[2,3,1]	[3,1,2]	(4)
Anzahl Transpositionen:	0	1	1	1	2	2	(5)
sgn(P):	+1	-1	-1	-1	+1	+1	(6)

Allgemeine Notation für Permutationen:

$P = [P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n]$ steht für $\begin{cases} \text{ersetze } 1 \text{ durch } P_1 \\ \text{ersetze } 2 \text{ durch } P_2 \\ \vdots \\ \text{ersetze } j \text{ durch } P_j \\ \vdots \\ \text{ersetze } n \text{ durch } P_n \end{cases}$ (7)

ersetze j durch P_j (egal, wo j gerade steht)

Beispiele:

$1 \ 2 \ 3 \ 4 \xrightarrow{[3,1,2,4]} 3 \ 1 \ 2 \ 4$

$4 \ 1 \ 3 \ 2 \xrightarrow{[3,1,2,4]} 4 \ 3 \ 2 \ 1$

n-dimensionales Levi-Civita-Symbol: $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \equiv \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \equiv \begin{cases} \text{sgn}(P) & \text{falls } i_1 = P_1, i_2 = P_2, \dots, i_n = P_n \\ 0 & \text{falls zwei oder mehr Indizes gleich sind} \end{cases}$ (8)

(per Def. antisymmetrisch unter Index-Vertauschung) (9)

z.B.: $1 \equiv \varepsilon_{1234} \xrightarrow{14} \varepsilon_{4231} = -1 \xrightarrow{21} \varepsilon_{4132} = +1 \xrightarrow{32} \varepsilon_{4123} = -1, \quad \varepsilon^{1232} = 0$ (10)

Def: Determinante einer nxn Matrix:

Sei $A = \{A^{ij}\} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ L6f

Summe über S_n , Gruppe aller n! Permutationen, $P = [P_1, P_2, \dots, P_n]$, von $(1, 2, \dots, n)$

$\det A \equiv \sum_{P \in S_n} (\text{sgn } P) A^{P_1}_1 A^{P_2}_2 \dots A^{P_n}_n$ 'Leibniz-Regel' (1)

(e.g.) $= \sum_{P \in S_n} \epsilon_{P_1 P_2 \dots P_n} A^{P_1}_1 A^{P_2}_2 \dots A^{P_n}_n = \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} A^{i_1}_1 A^{i_2}_2 \dots A^{i_n}_n$ (2)
(Spaltenindex aufsteigend, Reihenindex permutiert)
n-fache Einstein-Summation

Terme, in denen nicht alle Indizes verschieden sind, sind gleich Null

Alternative Schreibweise: sortiere in jedem Term das Produkt so, dass Reihenindex aufsteigt:

z.B. $A^2_1 A^1_2 A^3_3 = A^1_2 A^2_1 A^3_3$, oder allgemein: $\prod_{i=1}^n A^{P_i}_i = \prod_{j=1}^n A^j_{P^{-1}j}$ (3)

$\det A = \sum_{P \in S_n} \text{sgn}(P) A^{P^{-1}_1}_1 A^{P^{-1}_2}_2 \dots A^{P^{-1}_n}_n$ (4)
 $\text{sgn}(P) = \text{sgn}(P^{-1})$
Summe über alle inverse Permutationen = Summe über alle Permutation

$= \sum_{P \in S_n} \text{sgn}(P) A^{P_1}_1 A^{P_2}_2 \dots A^{P_n}_n$ (5)
(Reihenindex aufsteigend, Spaltenindex permutiert)

(e.g.) $= \sum_{P \in S_n} \epsilon^{P_1 P_2 \dots P_n} A^{P_1}_1 A^{P_2}_2 \dots A^{P_n}_n = \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} A^{j_1}_1 A^{j_2}_2 \dots A^{j_n}_n$ (6)

L6.2 'Laplace-Entwicklung' (Entwicklung einer Det. nach Spalte j oder Zeile i) L6g

Die Determinante von A lässt sich auch wie folgt berechnen (ohne Beweis):

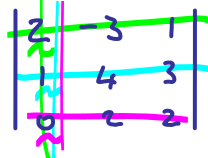
Entwicklung nach Spalte j: $\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} M^k_j A^k_j$ (1)
Elemente von Spaltenvektor j, mit $j \in 1, \dots, n$ beliebig, aber fest
(d.h. keine Summenkonvention für j)

Entwicklung nach Zeile i: $\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} M^i_k A^i_k$ (2)
Elemente von Reihenvektor i, mit $i \in 1, \dots, n$ beliebig, aber fest
(d.h. keine Summenkonvention für i)

Def: 'Unterdeterminante' oder 'Minor': M^i_j = Determinante derjenigen (n-1)x(n-1) Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht (3a)

Def: 'Kofaktor': $(-1)^{i+j} M^i_j \equiv \tilde{A}^i_j$ (3b)

Entwicklung nach Spalte j=1: $\det A = (-1)^{1+1} M^1_1 A^1_1 + (-1)^{2+1} M^2_1 A^2_1 + (-1)^{3+1} M^3_1 A^3_1$ (4)
 $k=1 \quad k=2 \quad k=3$

Beispiel:  $= (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot 2 + (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot 1 + (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot 0$ (5)
 $= 2 \cdot (4 \cdot 2 - 2 \cdot 3) - (-3 \cdot 2 - 2 \cdot 1) + 0 = 12$ (6)

Wähle Spalte oder Zeile mit möglichst vielen Nullen - dann ist Rechnung einfacher!

Geometrische Bedeutung der Determinante für reelle Matrizen

L6h

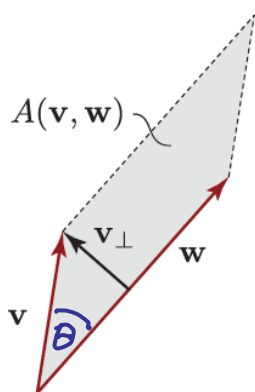
$$|\det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n)| = \text{Vol}(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n)$$

= Volumen des n-dimensionalen Parallelepipeds, das durch die Spalten (-oder Reihenvektoren) der Matrix aufgespannt wird. (1)

Check: 3D $\text{Vol}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\epsilon_{ijk} u^i v^j w^k| \stackrel{(C-5)}{=} |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ (2)

Spatprodukt

Check: 2D $(A(\vec{v}, \vec{w}))^2 = (\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \theta)^2 = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 [1 - \cos^2 \theta]$ (3)



$$\begin{aligned} &= \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 \\ &= \sum_{ij} [(v^i)^2 (w^j)^2 - (v^i w^i)(v^j w^j)] \quad \left[\begin{array}{l} i=j \text{ Terme kürzen} \\ \text{sich zu Null} \end{array} \right] \\ &= (v^1)^2 (w^2)^2 + (v^2)^2 (w^1)^2 - (v^1 w^1)(v^2 w^2) - (v^2 w^2)(v^1 w^1) \\ &= (v^1 w^2 - v^2 w^1)^2 \quad \text{gleich} \end{aligned}$$

$$A(\vec{v}, \vec{w}) = |v^1 w^2 - v^2 w^1| = |\epsilon_{ij} v^i w^j| = |\det(\vec{v}, \vec{w})| \quad (4)$$

Konsequenz für allgemeines n:

$$\det A = 0 \Rightarrow \text{Vol} = 0 \Rightarrow \text{Reihen- und Spaltenvektoren sind linear abhängig!}$$

Einschub: C4.2-5 Determinanten und krummlinige Integration

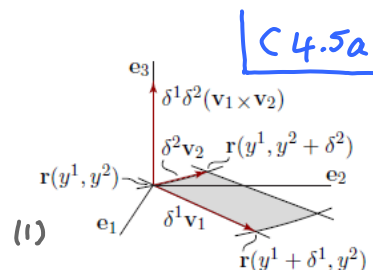
Integrationsmaß = Jacobi-Determinante (!)

2D-Integral: $\int_S f(\vec{r}) = \int dy^1 \int dy^2 \|\partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r}\| f(\vec{r}(y^1, y^2))$ (C4q.1)

kartesisch: $\vec{r} = (x^1, x^2)^T$

$$\|\partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r}\| = \left| \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \frac{\partial x^2}{\partial y^2} - \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \frac{\partial x^1}{\partial y^2} \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^2} \right| \equiv \left| \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(y^1, y^2)} \right| \equiv \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} \right| \quad (2)$$

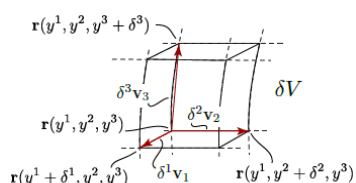
Kurznotation



Also: Flächenelement: $dS = dy^1 dy^2 \left| \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(y^1, y^2)} \right|$ (3)

'Jacobi-Determinante' (in 2D)
'Funktional-Determinante'

3D-Integral: $\int_V f(\vec{r}) = \int dy^1 \int dy^2 \int dy^3 |(\partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r}) \cdot \partial_{y^3} \vec{r}| f(\vec{r}(y^1, y^2, y^3))$ (C4m.1)



Spatprodukt der Koordinatenbasisvektoren = 'Jacobi-Determinante' (in 3D)

kartesisch: $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)^T$

'Funktional-Determinante'

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y^1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^3} = \left| \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(y^1, y^2, y^3)} \right| = \det \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial y^1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^3} \right] \equiv \left| \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(y^1, y^2, y^3)} \right| \equiv \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} \right| \quad (5)$$

Kurznotation

Also: Volumenelement:

$$dV = dy^1 dy^2 dy^3 \left| \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(y^1, y^2, y^3)} \right| \quad (6)$$

Krummlinige Integration in n Dimensionen

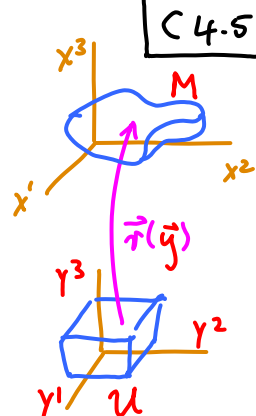
C4.5b

$$\vec{r}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{y} \mapsto \vec{r}(\vec{y}) \equiv \vec{x}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x^1(y^1, \dots, y^n) \\ \vdots \\ x^n(y^1, \dots, y^n) \end{pmatrix}$$

krummlinig $\vec{y}$ $\vec{r}(\vec{y})$ kartesisch

(1)



n-dimensionales
'Volumenelement':

$$dV^n = dy^1 \dots dy^n \cdot \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right|$$

(2)

'Jacobi-Determinante', 'Funktionaldeterminante': = Volumenelement, welches von Koordinatenbasisvektoren $\vec{e}_j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial y^j}$ aufgespannt wird:

$$\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} \right| \equiv \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right| = \det \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial y^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial y^n} \right] = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^2}{\partial y^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \frac{\partial x^n}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix} \quad (3)$$

n-dimensionales Integral:

$$\int_M dx^1 \dots dx^n f(x^1, \dots, x^n) = \int_U dy^1 \dots dy^n \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right| f(x^1(\vec{y}), \dots, x^n(\vec{y})) \quad (4)$$

Das ist Verallgemeinerung der Substitutionsregel, (C2g.7): $\int dx f(x) = \int dy \left| \frac{dx}{dy} \right| f(x(y)) \quad (5)$

L6.3 Eigenschaften von Determinanten

L6i

Im Folgenden sei

$$A = \{A^i_j\} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n),$$

$$\vec{A}_j = \begin{pmatrix} A^1_j \\ \vdots \\ A^n_j \end{pmatrix} = \text{Spaltenvektor } j \in \mathbb{C}^n \quad (1)$$

Notation:

$$\det A = \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n \end{vmatrix} \equiv \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n) \quad (2)$$

(i) Diagonalmatrix

Für

$$A = \{\lambda_i \delta^i_j\} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

gilt

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad \left[\begin{array}{l} \text{nur der erste Term} \\ \text{in Leibniz-Regel ist} \\ \text{ungleich Null} \end{array} \right] \quad (4)$$

[vergleiche 2x2 Matrix, Gl. (b.5), 3x3 Matrix, Gl. (d.1)]

Für Einheitsmatrix:

$$\det(\mathbb{1}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \dots 1 = 1 \quad (5)$$

(ii) Transponierte

$\det A^T = \det A$ (1)

L6j

$A = \{A^i_j\}, \quad A^T = \{A^T_j{}^i\}, \quad A^T_j{}^i \stackrel{(L5.2e.3)}{=} A^i_j \quad (2) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Begründung: $\det(A^T) \stackrel{(f.1)}{=} \sum_P \text{sgn}(P) \prod_i A^T_{P_i}{}^i \stackrel{(2)}{=} \sum_P \text{sgn}(P) \prod_P A^i_{P_i} \stackrel{(f.5)}{=} \det(A)$

Spaltenindex aufsteigend, Reihenindex permutiert Reihenindex aufsteigend, Spaltenindex permutiert

Konsequenz: alle Aussagen für Determinanten, die im Folgenden für Spaltenvektoren einer Matrix gemacht werden, gelten auch für Zeilenvektoren einer Matrix.

(iii) 'Multilinearität':

$\det(\dots, \overbrace{\lambda \vec{B} + \mu \vec{C}}^{j\text{-Spalte}}, \dots) = \lambda \det(\dots, \vec{B}, \dots) + \mu \det(\dots, \vec{C}, \dots) \quad (4)$

Begründung: links $= \sum_P \text{sgn}(P) A^{P_1} \dots (\lambda \vec{B} + \mu \vec{C})^{P_j} \dots A^{P_n}$ (5)

$= \lambda \sum_P \text{sgn}(P) A^{P_1} \dots (\vec{B})^{P_j} \dots A^{P_n} + \mu \sum_P \text{sgn}(P) A^{P_1} \dots (\vec{C})^{P_j} \dots A^{P_n} = \text{rechts} \quad (6)$

Multilinearität impliziert 'Homogenität': $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ jede der n Spalten liefert einen Faktor λ (7)

(iv) Antisymmetrie (Vorzeichenwechsel) bei Vertauschen von Spalten:

L6k

$\det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_i, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_n) = -\det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_i, \dots, \vec{A}_n) \quad (1)$

Begründung: links $\stackrel{(f.2)}{=} \varepsilon_{\ell_1 \dots \ell_i \dots \ell_j \dots \ell_n} A^{\ell_1} \dots A^{\ell_i} \dots A^{\ell_j} \dots A^{\ell_n}$ (2)

vertausche Indizes: liefert (-1); in jedem Term der Summe, vertausche Reihenfolge der Faktoren

$= -\varepsilon_{\ell_1 \dots \ell_j \dots \ell_i \dots \ell_n} A^{\ell_1} \dots A^{\ell_j} \dots A^{\ell_i} \dots A^{\ell_n} \quad (3)$

benenne Indizes um: $\ell_i \leftrightarrow \ell_j$

$= -\varepsilon_{\ell_1 \dots \ell_i \dots \ell_j \dots \ell_n} A^{\ell_1} \dots A^{\ell_i} \dots A^{\ell_j} \dots A^{\ell_n} \stackrel{(f.2)}{=} \text{rechts} \quad (4)$

Antisymmetrie impliziert: sind zwei Spalten oder zwei Zeilen gleich, ist $\det A = 0$ (5)

Begründung: (1) mit i-Spalte = j-Spalte:

$\det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_i, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_n) \stackrel{(1)}{=} -\det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_i, \dots, \vec{A}_n) \quad (6)$

$\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0 \quad \square \quad (7)$

[Anwendung in QM: Pauli-Prinzip für Fermionen!]

Konsequenz von (iii,iv): addiert man zu einer Spalte (Zeile) die mit einer Zahl μ multiplizierten Elemente einer anderen Spalte (Zeile), ändert sich die Determinante nicht:

$$\det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_i + \mu \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_n) \stackrel{(i.4)}{=} \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_i, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_n) + \mu \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_n) \quad (1)$$

zwei gleiche Spalten: (l.3) = 0 □

Konsequenz für Gauß-Algorithmus: bei Zeilenaddition der Form $[z_i] + \mu[z_j]$ ändert sich Det. nicht!

(v): Falls Spaltenvektoren von A linear abhängig sind, dann gilt
(oder Zeilenvektoren...)

$$\det(A) = 0 \quad (2)$$

Beweis: falls Spaltenvektoren linear abhängig sind, gilt:

$$\sum_{i=1}^n \vec{A}_i c^i = \vec{0} \quad (3)$$

wobei nicht alle c^i gleich 0 sind. Sei z.B. $c^n \neq 0$ dann $\vec{A}_n = -\frac{1}{c^n} \sum_{i=1}^{n-1} \vec{A}_i c^i$ (4)

Eingesetzt in

$$\det(A) = \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_{n-1}, \vec{A}_n) \quad (5)$$

$$\stackrel{(4)}{=} \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_{n-1}, -\frac{1}{c^n} \sum_{i=1}^{n-1} \vec{A}_i c^i) \quad (6)$$

Multilinearität: $\stackrel{(i.4)}{=} -\frac{1}{c^n} \sum_{i=1}^{n-1} c^i \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_{n-1}, \vec{A}_i) \stackrel{(k.5)}{=} 0$ (7)

gleich Null, da in jedem Term zwei Spaltenvektoren gleich sind (weil $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$)

(vi) Konstruktion der Inversen:

Laplace-Entwicklung nach Spalte i:

$$\det A = \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_i, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_n) \stackrel{(9.1)}{=} \sum_{k=1}^n \tilde{A}_i^k A^k_i \quad (1)$$

Spalte i $\downarrow$ $\downarrow$ Spalte j ($\neq i$) Spaltenvektor an Position i

Falls $\vec{A}_i$ durch Kopie der j-Spalte, $\vec{A}_j$ ersetzt wird, sind zwei Spalten gleich und $\det(\) = 0$:

$$0 \stackrel{(k.5)}{=} \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_n) \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=1}^n \tilde{A}_i^k A^k_j \quad (j \neq i) \quad (2)$$

Spaltenvektor an Position i

Betrachte nun folgende Matrix: $C = \{C^i_k\} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$, $C^i_k = \frac{\tilde{A}_i^k}{\det A}$ (3)

$$(C \cdot A)^i_j = \sum_{k=1}^n C^i_k A^k_j \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^n \tilde{A}_i^k A^k_j \stackrel{(5.4)}{=} \delta^i_j \quad (4)$$

Fazit: $C = A^{-1}$ (7)

$$= \begin{cases} \det A & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad \begin{matrix} (m.1) \\ (m.2) \end{matrix} \quad (5) \quad (6)$$

Satz: die Inverse der Matrix A existiert genau dann, wenn $\det A \neq 0$ (8)

und ist gegeben durch $A^{-1} = C$ mit $C^i_k = \frac{\tilde{A}_i^k}{\det A}$ (9)

(vi) Konsequenzen von $\det(A) = 0$:

L6n

$$\det(A) = 0$$

(1)

(m.8)

$$\Leftrightarrow A^{-1} \text{ existiert nicht}$$

(2)

(L5.4k.1)

$$\Leftrightarrow \text{Spaltenvektoren v. } A \text{ sind linear abhängig und bilden keine Basis von } \mathbb{C}^n$$

(3)

(j.1)

$$\Leftrightarrow \text{Reihenvektoren } \text{''} \text{ '' '' '' '' '' '' '' '' '' '' '' '' ''$$

(4)

(L5.4k.2)

$$\Leftrightarrow \text{Nullraum v. } A \text{ ist nicht-trivial, d.h. es existiert ein } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ mit } A \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

(5)

(vi) Multiplikationstheorem:

für $n \times n$ -Matrizen

(Beweis: nächste Seite)

$$\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B)$$

(6)

(vii) Determinante der Inversen:

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

(7)

Beweis:

$$(\det A)(\det A^{-1}) \stackrel{(6)}{=} \det(A \cdot A^{-1}) = \det(\mathbb{1}) \stackrel{(h.5)}{=} 1 \quad \square$$

(8)

Beweis des Multiplikationstheorems

L6p

$$\det(A \cdot B) = \sum_{i_1, \dots, i_n} (A \cdot B)^{i_1, \dots, i_n} = \sum_{i_1, \dots, i_n} A^{i_1, j_1} B^{j_1, i_1} \dots A^{i_n, j_n} B^{j_n, i_n} \quad (1)$$

Umsortierung der Faktoren in jedem Term der $(n\text{-Quadrat})$ -fachen Einstein-Summe:

(A's vorne, B's hinten)

$$= \sum_{i_1, \dots, i_n} A^{i_1, j_1} \dots A^{i_n, j_n} B^{j_1, i_1} \dots B^{j_n, i_n} \quad (2)$$

$$\stackrel{(f.2)}{=} \det(\vec{A}_{j_1}, \dots, \vec{A}_{j_n}) B^{j_1, i_1} \dots B^{j_n, i_n} \quad (3)$$

Umsortierung der Spaltenvektoren von A in jedem Term der n -fachen Einstein-Summe:

$$= \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n) \sum_{j_1, \dots, j_n} B^{j_1, i_1} \dots B^{j_n, i_n} \quad (4)$$

$$\stackrel{(f.2)}{=} \det A \cdot \det B \quad (5)$$

Levi-Civita-Symbol in (4) liefert das Vorzeichen, das beim Vertauschen von Spalten entsteht.

Beispiel:

$$\overset{=1}{\varepsilon_{123}} \det(A_1, A_2, A_3) \stackrel{1 \leftrightarrow 3}{=} \varepsilon_{321} \det(A_3, A_2, A_1) \stackrel{2 \leftrightarrow 1}{=} \varepsilon_{312} \det(A_3, A_1, A_2) \quad (6)$$

$$\varepsilon_{312} \stackrel{(6)}{=} \varepsilon_{312} \det(A_1, A_2, A_3) = \det(A_3, A_1, A_2), \text{ denn } (\varepsilon_{312})^2 = 1 \quad (7)$$

Zusammenfassung: L6 Determinanten

ZL6a

Determinante: diagnostiziert lin. Unabhängigkeit d. Spaltenvektoren einer nxn-Matrix

Leibniz-Regel: $\det A \equiv \sum_P \operatorname{sgn}(P) A^{p_1}_1 \dots A^{p_n}_n = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} A^{i_1}_1 \dots A^{i_n}_n$ (1)

2x2: $\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = a^1 b^2 - a^2 b^1$ 3x3: $\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k$ (2)

Laplace-Entwicklung: $\det A = \sum_{k=1}^n \tilde{A}^k_j A^k_j = \sum_{k=1}^n \tilde{A}^i_k A^i_k$ (hier keine)
(j fest) (i fest) (3)

Kofaktor: $\tilde{A}^i_j \equiv (-1)^{i+j} M^i_j$ Unterdeterminante:
(streiche Zeile i, Spalte j aus A, bilde dann die Determinante) (4)

Diagonalmatrix: $\det(\lambda_i \delta^i_j) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, $\det \mathbb{1} = 1$ (5)

Transponierte: $\det A = \det A^T$ (6)

Multilinearität: $\det(\vec{A}_1, \dots, \underbrace{\lambda \vec{B} + \mu \vec{C}}_{j\text{-Spalte}}, \dots, \vec{A}_n) = \lambda \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{B}, \dots, \vec{A}_n) + \mu \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{C}, \dots, \vec{A}_n)$ j-Spalte (1)

Antisymmetrie: Vorzeichenwechsel beim Vertauschen v. zwei Zeilen oder zwei Spalten.

$$\det(\dots, \vec{B}, \dots, \vec{C}, \dots) = -\det(\dots, \vec{C}, \dots, \vec{B}, \dots) \quad (2)$$

Zwei gleiche Spalten oder Zeilen: $\det(\dots, \vec{B}, \dots, \vec{B}, \dots) = 0$ (3)

Konstruktion des Inversen: $A = \{A^i_j\} \Rightarrow A^{-1} \equiv C = \{C^i_k\}$, $C^i_k = \frac{\tilde{A}^k_i}{\det A}$ (4)

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \text{Spaltenvektoren v. } A \text{ sind lin. unabhängig}$

Multiplikationstheorem: $\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B)$ (5)

Det. der Inversen: $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ (6)