

V3 Felder (Funktionen mehrerer unabhängigen Variablen)

V3.1a

Orts- und zeitabhängige physikalische Größen werden durch "Felder" beschrieben.

Beispiel: Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik:

Vektor-Analysis: nützlichen Identitäten

MAXWELL'S EQUATIONS

In general:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

In matter:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

PRODUCT RULES

- (3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$
- (4) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$
- (5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$
- (6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
- (7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$
- (8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

AUXILIARY FIELDS

Definitions:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases}$$

In linear media:

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, & \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, & \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \end{cases}$$

SECOND DERIVATIVES

- (9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
- (10) $\nabla \times (\nabla f) = 0$
- (11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

POTENTIALS: $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

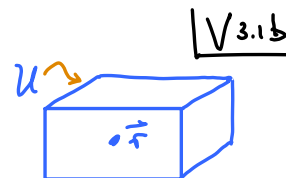
Ziel der folgenden Abschnitte ist, elementare Rechenoperationen für Felder einzuführen.

Beispiel 1: Temperatur im Zimmer

$T: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Menge aller Punkte im Zimmer

$\vec{r} \mapsto T(\vec{r})$ = Temperatur am Punkt $\vec{r}$



Beispiel 2: Zeitabhängige Temperatur im Zimmer

$T: I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

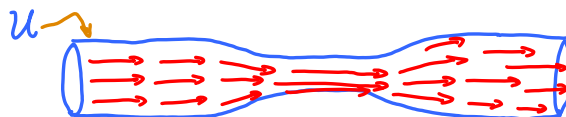
Zeitintervall

$(t, \vec{r}) \mapsto T(t, \vec{r})$ = Temperatur zur Zeit t am Punkt $\vec{r}$

Beispiel 3: Luftfluss durch Tunnel

$\vec{v}: I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$(t, \vec{r}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{r})$ = Luftgeschwindigkeit zur Zeit t am Punkt $\vec{r}$



Beispiel 4: Ferromagnet

$\hat{n}: I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow S^2$

Menge aller Vektoren mit Betrag = 1

$S^2 = \{\hat{n} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\hat{n}\| = 1\}$

$(t, \vec{r}) \mapsto \hat{n}(t, \vec{r})$ = 'Magnetisierung' zur Zeit t am Punkt $\vec{r}$



V3.1 Definition von Feldern

V3.1c

Allgemeine mathematische Struktur eines 'Feldes':

$$\vec{F}: M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow L \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{y} = (y^1, \dots, y^d)^T \mapsto \vec{F}(\vec{y}) = (F^1(\vec{y}), \dots, F^n(\vec{y}))^T$$

M : 'Basismannigfaltigkeit'

L : 'Zielmannigfaltigkeit'

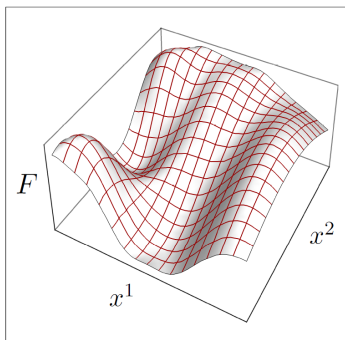
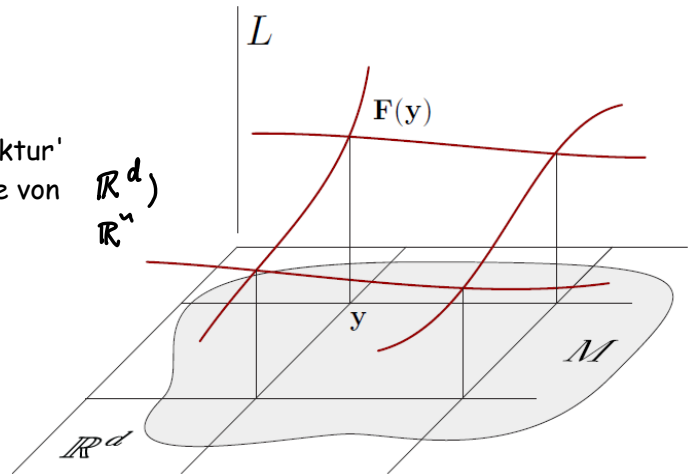
'Mannigfaltigkeit' = 'glatte geometrische Struktur'
(für aktuelle Zwecke: d-dimensionale Teilmenge von $\mathbb{R}^d$)

$n=1$: 'Skalarfeld'

Beispiele: Temperatur, Druck, Dichte

$n>1$: 'Vektorfeld'

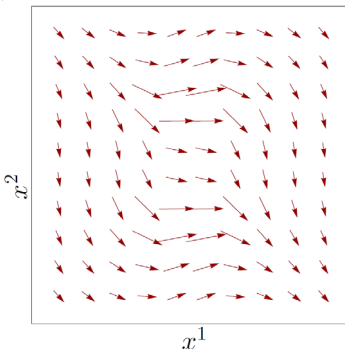
Beispiele: Luftfluss, Magnetfeld, Elektrisches Feld, Gravitationskraftfeld



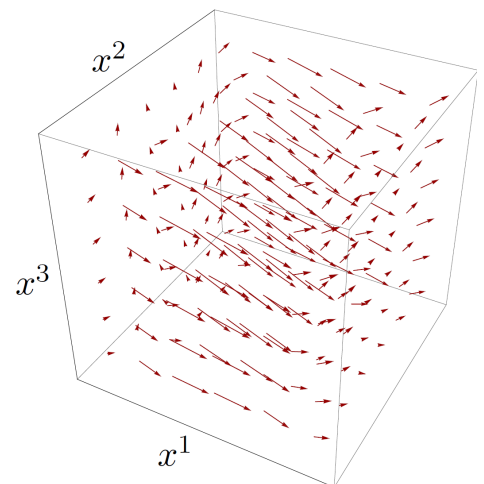
Skalarfeld: $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
(z.B. Höhe eines Gebirges)

V3.1d

Vektorfeld: $\vec{v}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
(z.B. Stromfluss an Wasseroberfläche)



Vektorfeld: $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
(z.B. Stromfluss im Wassertank)



Wie ändern sich Felder als Funktion v. $\vec{x}$?
Wie bildet man Ableitungen von Feldern?

?

C3: Partielle Ableitungen

V3.2 Skalare Felder ($\dim \mathcal{L} = n=1$)

V3.2a

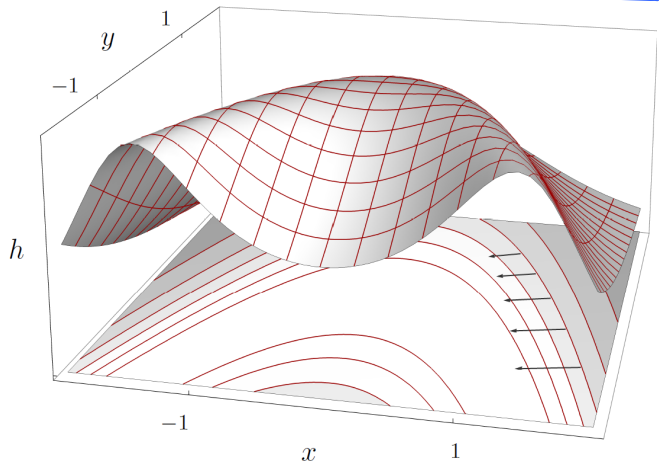
Beispiel: Höhenfeld

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x} \mapsto h(\vec{x}) \quad (1)$$

$$h(\vec{x}) = h(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2) + c} \quad (2)$$

Kontur-Linien: $h(x, y) = \text{const.}$ (3)



Dort, wo Konturlinien dicht liegen, ist es 'steil'.

Funktion ändert sich am schnellsten in Richtung senkrecht zu den Konturlinien.

Frage: Welcher Vektor gibt diese Richtung an?

Antwort: Gradient:

$$\vec{\nabla} h_{\vec{x}} \stackrel{\text{vergleiche (V3i.5)}}{=} \begin{pmatrix} \partial_x h \\ \partial_y h \end{pmatrix} = -\frac{2(x^2 + y)}{[(x^2 + y)^2 + c]^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

(wird im Folgenden eingeführt)

Totales Differential

V3.2b

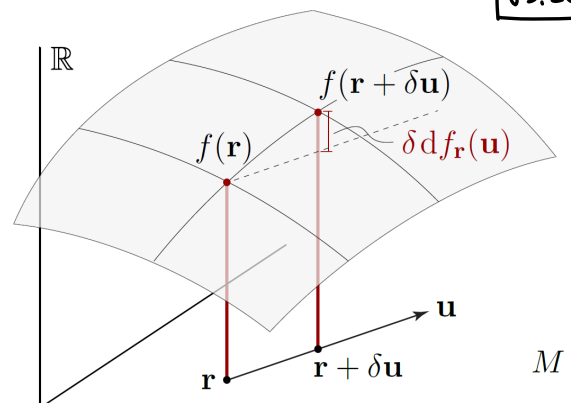
Gegeben eine Funktion $f: M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
 $\vec{r} \mapsto f(\vec{r})$

Was ist die infinitesimale Änderung von $f(\vec{r})$
 an einem gegebenen Punkt $\vec{r} \in M$
 entlang eines vorgegebenen Vektors $\vec{u} \in \mathbb{R}^d$?

'totales Differential' liefert die Antwort:

$$df_{\vec{r}}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{u} \mapsto df_{\vec{r}}(\vec{u}) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{r} + \delta \vec{u}) - f(\vec{r})]$$



vergleiche
'Mutter aller
Ableitungen', (i)

Das totale Differential $df_{\vec{r}}$ ist eine 'Maschine', definiert bei $\vec{r}$
 die einen Vektor $\vec{u}$ frisst, und als Antwort eine Zahl 'ausspuckt', $df_{\vec{r}}(\vec{u})$,
 nämlich die differenzielle Änderung v. f am Punkt $\vec{r}$ bei einem $\vec{u}$ -Schritt

Anmerkung: trotz des 'd' in der Notation, ist das totale Differential im Allgemeinen nicht infinitesimal klein! Es ist nur dann klein, wenn der Vektor im Argument klein ist!

Totales Differential in kartesischen Koordinaten

V3.2c

$\vec{r} = \vec{r}(\vec{x})$ (identifiziere $\vec{r}$ mit $\vec{x}$)

$$df_{\vec{x}}(\vec{u}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{x} + \delta \vec{u}) - f(\vec{x})] \stackrel{(C3d.4)}{=} \frac{\partial f}{\partial x^k} u^k = \partial_k f u^k \quad (1)$$

Tot. Differential ist linear: $df_{\vec{x}}(a\vec{u} + b\vec{w}) = \partial_k f(a u^k + b w^k) \quad (2)$

Wirkung auf Standardbasisvektor:
d.h. wähle $\vec{u} = \vec{e}_j$

$$df_{\vec{x}}(\vec{e}_j) \stackrel{(1)}{=} \partial_k f (\vec{e}_j)^k = \partial_j f \quad \text{beschreibt Steigung von } f \text{ in } j\text{-Richtung} \quad (3)$$

Tot. Differential von Koordinatenfunktion:
d.h. wähle $f(\vec{x}) = x^i$

$$d x^i_{\vec{x}}(\vec{u}) \stackrel{(1)}{=} \partial_k x^i u^k = u^i \quad \text{liefert } i\text{-Komponente des Argumentenvektors} \quad (4)$$

(4) eingesetzt in (1): $df_{\vec{x}}(\vec{u}) = \partial_k f d x^k_{\vec{x}}(\vec{u}) \quad (5)$

(5) gilt für beliebige $\vec{u} : \Rightarrow \boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x^k} d x^k} \quad (6) \left[\begin{array}{l} \text{dies ist die 'saubere' Begründung} \\ \text{für die Notation, } dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx \\ \text{die wir bei Integration durch} \\ \text{Substitution benutzen!} \end{array} \right]$

Beispiel: Höhenfeld

$$h(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2 + c}$$

$$\vec{u} = (u^x, u^y)^T$$

V3.2d

$$dh_{\vec{x}}(\vec{u}) \stackrel{(c.1)}{=} (\partial_x h) u^x + (\partial_y h) u^y \stackrel{(a.4)}{=} - \frac{2(x^2 + y^2)}{[(x^2 + y^2)^2 + c]^2} [2x u^x + 1 \cdot u^y] \quad \text{nachdifferenziert} \quad (1)$$

Kompaktnotation: $dh \stackrel{(c.6)}{=} - \frac{2(x^2 + y^2)}{[(x^2 + y^2)^2 + c]^2} [2x dx + 1 dy] \quad (2)$

Check: $dh_{\vec{x}}(\vec{u}) \stackrel{(2)}{=} - \frac{2(x^2 + y^2)}{[(x^2 + y^2)^2 + c]^2} \left[2x \underbrace{dx(\vec{u})}_{(c.4) u^x} + 1 \underbrace{dy(\vec{u})}_{(c.4) u^y} \right] \stackrel{(1)}{=} \text{konsistent} \quad (3)$

Beispiel: [AD-Buch S.434] Druck als Funktion v. Volumen und Temperatur: $p(V, T)$

Seien $\Delta V, \Delta T$ kleine Änderungen in Volumen bzw. Temperatur. Finde Druckänderung Δp !

Totales Differential für Druck: $dp \stackrel{(c.6)}{=} \partial_V p dV + \partial_T p dT \quad (4)$

Mathe-Sprech für (4): dp, dT, dV sind totale Differentiale. Angewendet auf kleinen Vektor $\vec{u} \equiv (\Delta V, \Delta T)^T$

liefern sie: $dp(\vec{u}) = \partial_V p dV(\vec{u}) + \partial_T p dT(\vec{u}) \stackrel{(c.4)}{=} \partial_V p \Delta V + \partial_T p \Delta T \stackrel{(C3d.4)}{\approx} p(V + \Delta V, T + \Delta T) - p(V, T) = \Delta p \quad \text{← gesuchte Druckänderung!}$
 zutreffend, denn $\Delta V, \Delta T$ sind klein (5)

Physik-Sprech für (4): kleine Volumen- und Temperaturänderungen, dV, dT liefern kleine Druckänderung, dp
Diese Sprechweise ist etwas schlampig, denn dV, dT, dp sind totale Differentiale, nicht kleine Änderungen.

Gradient

$$df_{\vec{x}}(\vec{u}) \stackrel{(c1)}{=} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^k} u^k = (\partial_k f) u^k \equiv (\partial^i f) \delta_{ik} u^k \equiv \langle \vec{\nabla} f, \vec{u} \rangle \quad |V3.2e| \quad (1)$$

(1) sieht aus wie ein Skalarprodukt von $\vec{u}$ mit einem weiteren Vektor, $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = w^i \delta_{ik} u^k$ dessen Komponenten aus den Ableitungen von f bestehen.

Def: 'Gradient v. f am Punkt $\vec{x}$:

$$\text{'grad } f' = \vec{\nabla} f : M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \mapsto \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \equiv \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \partial^2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial^d f(\vec{x}) \end{pmatrix} \equiv \vec{e}_i (\vec{\nabla} f_{\vec{x}})^i \quad (3)$$

i-Komponente des Gradienten-Vektors:

$$(\vec{\nabla} f)^i \equiv \partial^i f \equiv \delta^{ij} (\partial_j f) = \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (4) \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

in kartesischen Koordinaten (= orthonormales System!)

Beispiel (d=2):

Höhenfeld:

$$h(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2 + c}$$

(siehe Fig, Seite V3.2a !)

$$\vec{\nabla} h_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \partial_x h \\ \partial_y h \end{pmatrix} \stackrel{\text{vergleiche (a.4)}}{=} - \frac{2(x^2 + y^2)}{[(x^2 + y^2)^2 + c]^2} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \partial_x h + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \partial_y h \quad (5)$$

Geometrische Interpretation des Gradienten-Vektors

Skizze in d = 2 Dimensionen, zur Veranschaulichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{n} = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla} f_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \partial^2 f(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (1)$$

(sei ein Einheitsvektor, Richtung beliebig)

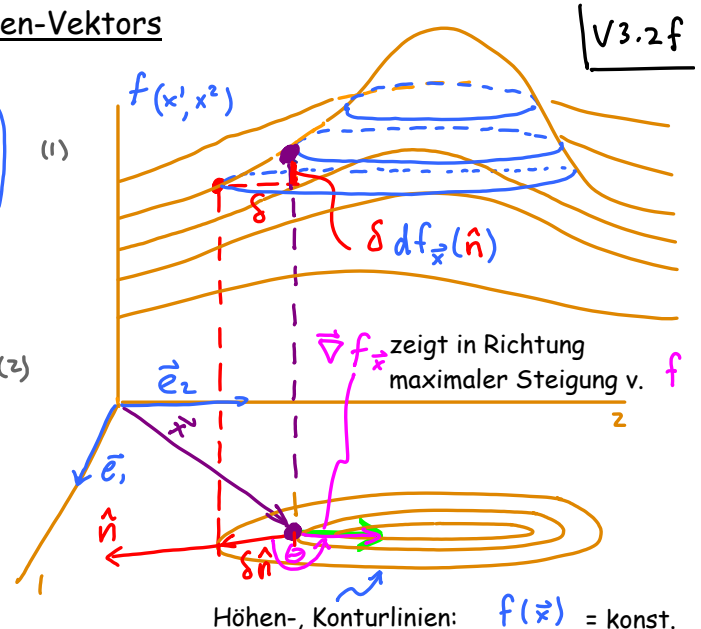
$$df_{\vec{x}}(\hat{n}) \stackrel{(b1)}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{x} + \delta \hat{n}) - f(\vec{x})] \quad (2)$$

= Änderung in $\hat{n}$ -Richtung (3)

$$\stackrel{(c.1)}{=} \langle \vec{\nabla} f_{\vec{x}}, \hat{n} \rangle \quad (4)$$

$$\stackrel{(L3.2c.4)}{=} \cos \theta \|\vec{\nabla} f_{\vec{x}}\| \|\hat{n}\| \stackrel{=1}{=} \cos \theta \|\vec{\nabla} f_{\vec{x}}\| \quad (5)$$

$$= \begin{cases} \text{maximal falls } \hat{n} \parallel \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \Rightarrow \\ 0 \text{ falls } \hat{n} \perp \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \Rightarrow \end{cases}$$



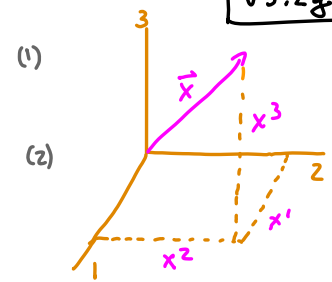
$$\begin{cases} \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \text{ zeigt in Richtung maximaler Steigung v. } f & (6a) \\ \text{maximale Steigung ist gegeben durch } \|\vec{\nabla} f_{\vec{x}}\| & (6b) \end{cases}$$

$\vec{\nabla} f_{\vec{x}}$ steht $\perp$ auf den Höhenlinien v. f (7)
(allgemeiner: Höhenflächen)

Beispiel: Sei

V3.2g

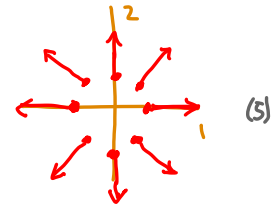
$$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} = r$$



$$\vec{\nabla} f_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \partial^2 f(\vec{x}) \\ \partial^3 f(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (3)$$

mit $\partial^1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1} \stackrel{KR}{=} \frac{1}{2} [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{-1/2} \cdot 2 x^1 = \frac{x^1}{\|\vec{x}\|}$ (4)

Analog für die anderen Komponenten, also: $\vec{\nabla} f_{\vec{x}} = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \hat{x} = \text{nach 'ausen' gerichteter Einheitsvektor}$



Nabla-Operator

V3.2h

Erinnerung: Gradient

$\vec{\nabla} f : M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$,
'grad f'

$\vec{x} \mapsto \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \stackrel{(e.3)}{=} \begin{pmatrix} (\vec{\nabla} f)^1 \\ (\vec{\nabla} f)^2 \\ \vdots \\ (\vec{\nabla} f)^d \end{pmatrix} \stackrel{(e.4)}{=} \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \partial^2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial^d f(\vec{x}) \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \partial^2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial^d f(\vec{x}) \end{pmatrix} \stackrel{\text{mit } \partial^i = \partial_{x^i}}{=} \left(\sum_{i=1}^d \vec{e}_i \partial^i \right) f \stackrel{\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}{=} \vec{\nabla} f \quad (2)$

Definition: 'Nabla-Operator':

(in kartesischen Koordinaten;
Definition üblich für $d = 2$ und 3)

(nützliche Eselsbrücke, zum Merken von
Gradient, Divergenz und Rotation)

$$\vec{\nabla} \equiv \sum_{i=1}^d \vec{e}_i \partial^i = \begin{pmatrix} \partial^1 \\ \partial^2 \\ \vdots \\ \partial^d \end{pmatrix} \quad (3)$$

$\vec{\nabla}$ ist ein Vektor-Differentialoperator, wirkt auf alle Funktionen, die rechts von ihm stehen.

beinhaltet Ableitungen

liefert einen Vektor, wenn er auf eine skalare Funktion einwirkt

(4)

Beispiel:
(d=2)

$$\vec{\nabla} (e^{3x^1} \sin(x^2)) = \begin{pmatrix} \partial^1 \\ \partial^2 \end{pmatrix} (e^{3x^1} \sin(x^2)) = \begin{pmatrix} 3e^{3x^1} \sin(x^2) \\ e^{3x^1} \cos(x^2) \end{pmatrix}$$

V3.2 i

(1)

Mathematische Struktur des Nabla-Operators:

Raum der Funktionen:

Sei $f \in F = \{g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) \mid g \text{ hinreichend glatt}\}$ (2)

$$\vec{\nabla}: F \longrightarrow F^d \quad (3)$$

$$f \longmapsto \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \partial^1 f \\ \vdots \\ \partial^d f \end{pmatrix} \quad (4)$$

Rechenregeln:

$$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g \quad (5)$$

$$\vec{\nabla}(f g) = (\vec{\nabla} f) g + f(\vec{\nabla} g) \quad (\text{Produktregel}) \quad (6)$$

Beweis v. (6):

$$\hookrightarrow = \partial^i (f g) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} (\partial^i f) g + f(\partial^i g) \quad (7)$$

Totales Differential in krummlinigen Koordinaten

(das werden Sie später brauchen)

V3.2j

Koordinatensystem:

$$\vec{r}: \mathcal{U} \rightarrow M, \vec{y} \mapsto \vec{r}(\vec{y})$$

Funktion:

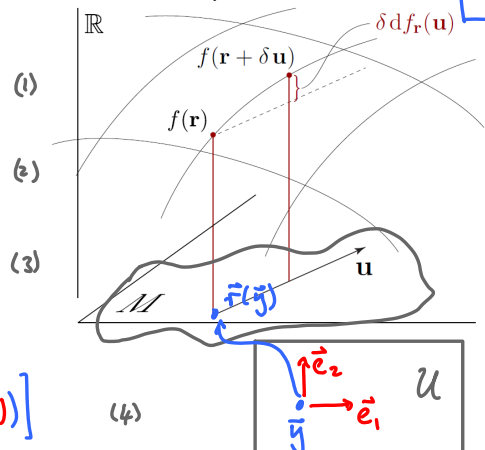
$$f: M \rightarrow \mathbb{R}, \vec{r} \mapsto f(\vec{r})$$

Induzierte Funktion:

$$f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, \vec{y} \mapsto f(\vec{r}(\vec{y})) \equiv f(\vec{y}) \quad (3)$$

Totales Differential:

$$df_{\vec{r}(\vec{y})}(\vec{u}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{r}(\vec{y}) + \delta \vec{u}) - f(\vec{r}(\vec{y}))]$$



Wähle

$$\vec{u} = \vec{v}_j = \partial_{y^j} \vec{r}$$

mit

$$\vec{r}(\vec{y}) + \delta \vec{v}_j = \vec{r}(\vec{y}) + \delta \partial_{y^j} \vec{r} \stackrel{(C3b.2)}{=} \vec{r}(y^1, \dots, y^j + \delta, \dots, y^d) \stackrel{(C3d.4)}{=} \vec{r}(\vec{y} + \delta \vec{e}_j) \quad (5)$$

Koordinatenbasisvektor

$$df_{\vec{r}(\vec{y})}(\vec{v}_j) \stackrel{(4)}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{r}(\vec{y}) + \delta \vec{v}_j) - f(\vec{r}(\vec{y}))] \stackrel{(5)}{=} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{r}(\vec{y} + \delta \vec{e}_j)) - f(\vec{r}(\vec{y}))] \stackrel{(C3d.4)}{=} \frac{\partial f(\vec{r}(\vec{y}))}{\partial y^j} \quad (6)$$

Kompaktnotation:

$$df_{\vec{y}}(\vec{v}_j) = \partial_{y^j} f(\vec{y}) \equiv \partial_j f(\vec{y})$$

[analog zu (c.3) !]

(7)

$\vec{u}$ sei ein beliebiger Vektor, entwickelt in Koordinatenbasis: $\vec{u} = \vec{v}_k u^k$ (1)

$$d_{\vec{y}} f(\vec{u}) \stackrel{(1)}{=} d_{\vec{y}} f(\vec{v}_k u^k) \stackrel{\substack{(2c.2) \\ \text{Linearität}}}{=} \underbrace{d_{\vec{y}} f(\vec{v}_k)}_{(j.7) \partial_y^k f(\vec{y})} u^k = \partial_k f u^k \quad (2)$$

Für Koordinatenfunktion:

$$f(\vec{y}) = y^i : d_{\vec{y}} y^i(\vec{u}) \stackrel{(2)}{=} \underbrace{\partial_{y^k} y^i}_{\delta^i_k} u^k = u^i \quad \text{analog zu (c.4)} \quad (3)$$

$$(3) \text{ eingesetzt in (2): } d_{\vec{y}} f(\vec{u}) \stackrel{(2,3)}{=} \partial_k f d_{\vec{y}} y^k(\vec{u}) \quad \text{analog zu (c.5)} \quad (4)$$

$$(5) \text{ gilt für beliebige } \vec{u} : \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial y^k} dy^k \quad \text{analog zu (c.6)} \quad (5)$$

Gradient: $d_{\vec{y}} f(\vec{u}) \stackrel{(2)}{=} \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^j} u^j = (\partial_j f) u^j \stackrel{(e.1)}{=} \langle \vec{\nabla} f, \vec{u} \rangle \quad (6)$
 definierende Gleichung für $\vec{\nabla} f$

Der 'Gradientenvektor' $\vec{\nabla} f \in \mathbb{R}^d$ ist durch die Forderung definiert, dass (6) gilt für alle $\vec{u} \in \mathbb{R}^d$.

Bestimmung des Gradientenvektors in krummlinigen Koordinaten

$$\text{Definierende Gleichung: } d_{\vec{r}} f(\vec{u}) \stackrel{(k.6)}{=} \langle \vec{\nabla} f, \vec{u} \rangle = \underbrace{(\vec{\nabla} f)^i}_{(3)} g_{ik} u^k \stackrel{(3)}{=} \underbrace{(\vec{\nabla} f)_k}_{(1)} u^k \quad (1)$$

$$\text{Gesucht: Komponenten des Gradienten in Koordinatenbasis: } \vec{\nabla} f = \vec{v}_i (\vec{\nabla} f)^i \quad (2)$$

Wähle $\vec{u} = \vec{v}_j$ und nutze (j.7):

$$\underbrace{\partial_j f}_{(j.7)} = d_{\vec{y}} f(\vec{v}_j) \stackrel{(1)}{=} \langle \vec{\nabla} f, \vec{v}_j \rangle \stackrel{(2)}{=} \underbrace{(\vec{\nabla} f)^i}_{(2g.1)} \underbrace{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle}_{= g_{ij}} = \underbrace{(\vec{\nabla} f)^i}_{(L3.3c.8)} g_{ij} = \underbrace{(\vec{\nabla} f)_j}_{(3)} \quad (3)$$

Metrik des krummlinigen Koordinatensystems

$$\text{Fazit: kovariante Komponenten des Gradientenvektors: } \underbrace{(\vec{\nabla} f)_j}_{(3)} = \partial_j f = \frac{\partial f}{\partial y^j} \quad (4)$$

$$\text{Kontravarianten Komponenten: } \underbrace{(\vec{\nabla} f)^i}_{(L3.3c.10)} = g^{ij} (\vec{\nabla} f)_j = g^{ij} \partial_j f \equiv \partial^i f \quad (5)$$

Def: 'Gradient v. f am Punkt $\vec{r}(\vec{y})$:

$$'grad f' = \vec{\nabla} f : M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{r} \mapsto \vec{\nabla}_r f \stackrel{(2)}{=} \vec{v}_i (\vec{\nabla} f)^i \stackrel{(5)}{=} \vec{v}_i g^{ij} \partial_j f \quad (6)$$

In kartesischen Koordinaten:

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad \partial^i = g^{ij} \partial_j = \partial_i, \quad \vec{v}_j = \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla}_r f = \vec{e}_i \partial^i f = \begin{pmatrix} \partial^1 f \\ \vdots \\ \partial^d f \end{pmatrix} \quad (7)$$

Beispiele für Gradient in krummlinig-orthogonalen Koordinaten

V3.2m

Für orthogonal krummlinige Koordinaten gilt: $g_{ij} = \delta_{ij} g_{ii}$, $g^{ij} = \delta^{ij} \frac{1}{g_{ii}}$ (hier keine Einsteinsumme!) (1)

Gradient: $\vec{\nabla} f = \vec{e}_i g^{ij} \partial_j f = \sum_i \vec{e}_i \left(\frac{1}{g_{ii}} \right) \partial_i f = \sum_i \vec{e}_i \left(\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \right) \partial_i f$ (2)

(V2g.4) (in Koordinatenbasis) (in lokaler Basis)

Polarkoordinaten: $\vec{r}(\rho, \phi) : g_{\rho\rho} = 1, g_{\phi\phi} = \rho^2$ [siehe (V2g.3)] (3)

$\vec{\nabla} f = \vec{e}_\rho g^{\rho\rho} \partial_\rho f + \vec{e}_\phi g^{\phi\phi} \partial_\phi f = \vec{e}_\rho \left(\frac{1}{1} \right) \partial_\rho f + \vec{e}_\phi \left(\frac{1}{\rho^2} \right) \partial_\phi f = \vec{e}_\rho \partial_\rho f + \vec{e}_\phi \left(\frac{1}{\rho} \right) \partial_\phi f$ (4)

(2) (V2g.4) (in Koordinatenbasis) (in lokaler Basis)

Kugelkoordinaten: $\vec{r}(r, \theta, \phi) : g_{rr} = 1, g_{\theta\theta} = r^2, g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$ (5)

[siehe (V2n.3)]

$\vec{\nabla} f = \vec{e}_r g^{rr} \partial_r f + \vec{e}_\theta g^{\theta\theta} \partial_\theta f + \vec{e}_\phi g^{\phi\phi} \partial_\phi f$ (6)

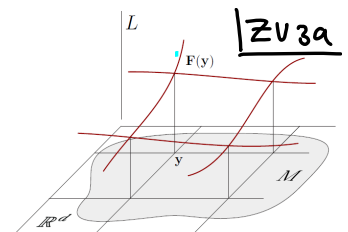
$= \vec{e}_r \left(\frac{1}{1} \right) \partial_r f + \vec{e}_\theta \left(\frac{1}{r^2} \right) \partial_\theta f + \vec{e}_\phi \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\phi f$ (in Koordinatenbasis) (7)

$= \vec{e}_r \partial_r f + \vec{e}_\theta \left(\frac{1}{r} \right) \partial_\theta f + \vec{e}_\phi \left(\frac{1}{r \sin \theta} \right) \partial_\phi f$ (in lokaler Basis) (8)

Zusammenfassung V3.1 Felder

$\vec{F} : M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow L \subset \mathbb{R}^n$

$\vec{y} = (y^1, \dots, y^d)^T \mapsto \vec{F}(\vec{y}) = (F^1(\vec{y}), \dots, F^n(\vec{y}))^T$



V3.2 Skalarfelder, Gradient

Totales Differential: differentielle Änderung von f bei $\vec{r}$ durch einen $\vec{u}$ -Schritt:

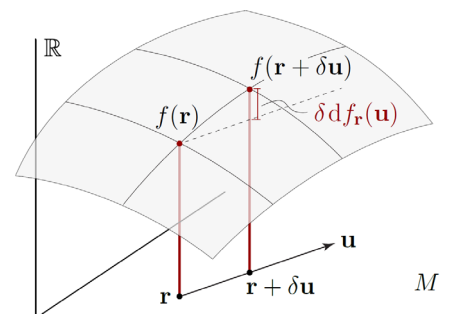
$df_{\vec{r}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \vec{u} \mapsto df_{\vec{r}}(\vec{u}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{r} + \delta \vec{u}) - f(\vec{r})]$

$df_{\vec{y}}(\vec{u}) = \partial_{y^k} f(\vec{y}) u^k = \partial_k f u^k = \vec{\nabla} f_{\vec{y}} \cdot \vec{u}$

Gradient in kartesischen Koordinaten: $\partial^i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$

$\vec{\nabla} f : M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\vec{x} \mapsto \vec{\nabla} f_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial^d f(\vec{x}) \end{pmatrix} = \vec{e}_i (\vec{\nabla} f)^i(\vec{x})$

'grad f'



$\vec{\nabla} f_{\vec{y}}$ zeigt in Richtung maximaler Steigung v. f , steht $\perp$ auf den 'Höhenflächen' v. f

In krummlinigen Koordinaten: $\vec{\nabla}_r f = \vec{e}_i (\vec{\nabla} f)^i = \vec{e}_i g^{ij} \partial_j f$ (in Koordinatenbasis)

In krummlinig-orthogonalen Koordinaten: $= \vec{e}_i \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \partial_i f$ (in lokaler Basis)

$g_{i \neq j} = 0, g^{ii} = 1/g_{ii}$