

C3 Partielle Ableitungen

C3a

Betrachte $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = f(x^1, x^2, \dots, x^d)$ (Skalarfeld) (1)

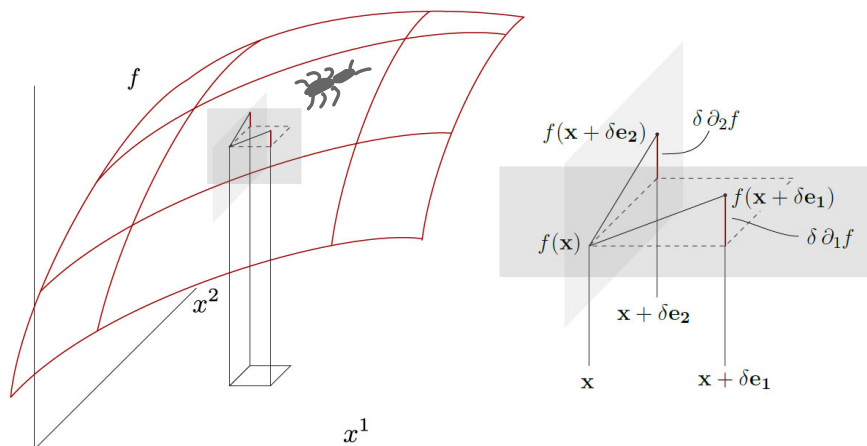
Beispiel für $d=2$: Höhe eines kugelförmigen Zeltdachs: $x^2 + y^2 + h^2 = R^2$

$$\vec{x} = (x, y)^T = (x^1, x^2)^T, \quad f(\vec{x}) = [R^2 - x^2 - y^2]^{1/2} = [R^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2]^{1/2} \quad (2)$$

C3.1 Partielle Ableitung

Wie ändert sich $f(\vec{x})$ als Funktion v. nur einer der Variablen, x^i , wenn die anderen Variablen festgehalten werden?

'Ameise auf Zeltdach:
wie ändert sich ihre Höhe,
wenn sie parallel zur
 i -Achse krabbelt?



Wie ändert sich $f(\vec{x})$ als Funktion v. nur einer der Variablen, x^i ?

C3b

Definition: 'Partielle Ableitung' von f am Punkt $\vec{x}$, nach x^i :

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(x^1, \dots, x^i + \delta, \dots, x^d) - f(x^1, \dots, x^i, \dots, x^d)] \quad (1)$$

↑ nur x^i ändert sich, um δ

In Vektornotation:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^d \end{pmatrix} = \vec{e}_i x^i \quad \text{z.B. } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{x} + \delta \vec{e}_i) - f(\vec{x})] \equiv \partial_i f(\vec{x}) \quad (2)$$

Lineare Näherung: $f(\vec{x} + \delta \vec{e}_i) - f(\vec{x}) \approx \delta \partial_i f(\vec{x})$



Alternative Notationen: $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i f(\vec{x}) \equiv f_{,i}(\vec{x}) \quad (3)$

↑ Lieblingsnotation eher unüblich

Merkregel: Index oben 'im Nenner der Ableitung' = Index unten in Kurznotation für Ableitung

Beispiele: $\partial_y (x \cos(y)) = -x \sin y \quad (4)$

$$\partial_{x^1} (e^{3x^1} \sin(x^2)) = 3e^{3x^1} \sin(x^2) \quad (5)$$

$$\partial_2 (e^{3x^1} \sin(x^2)) = e^{3x^1} \cos(x^2) \quad (6)$$

[Index, nicht Potenz!]

C3.2 Mehrfache partielle Ableitungen (rekursive Definition)

C3c

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{x}) \right) \equiv \frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} f(\vec{x}) \equiv \partial_{x^i}^2 f(\vec{x}) \equiv \partial_i^2 f(\vec{x}) \quad (1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{x}) \right) \dots \right)}_{n \text{ mal}} \equiv \frac{\partial^n}{(\partial x^i)^n} f(\vec{x}) \equiv \partial_{x^i}^n f(\vec{x}) \equiv \partial_i^n f(\vec{x}) \quad (2)$$

Gemischte
partielle
Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{x}) \right) \equiv \partial_{x^j} \partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_j \partial_i f(\vec{x}) \equiv \partial_{j,i}^2 f(\vec{x}) \equiv \partial_{i,j}^2 f(\vec{x}) \quad (3)$$

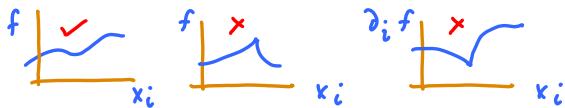
Beispiel v.
Seite C3a:

$$\partial_2 \partial_1 (e^{3x^1} \sin(x^2)) \stackrel{(b.5)}{=} \partial_2 3e^{3x^1} \sin(x^2) = 3e^{3x^1} \cos(x^2) \quad (4)$$

$$\partial_1 \partial_2 (e^{3x^1} \sin(x^2)) \stackrel{(b.6)}{=} \partial_1 e^{3x^1} \cos(x^2) = 3e^{3x^1} \cos(x^2) \quad (5)$$

gleich!

Satz v. Schwarz: Für hinreichend glatte Funktionen sind partielle Ableitungen vertauschbar:



$$\partial_i \partial_j f(\vec{x}) = \partial_j \partial_i f(\vec{x}) \quad (6)$$

'Hinreichend glatt' bedeutet: alle Ableitungen bis mindestens zur 2.ten Ordnung sind stetig (AD-Buch, Seite 231, Fußnote 12)

↳ $\partial_i^2 f, \partial_j^2 f, \partial_i \partial_j f, \partial_j \partial_i f$

[Beispiel wo dies nicht gilt: AD-Buch, S. 231]

C3.3 Gleichzeitige Änderung aller Variablen

C3d

'Wie ändert sich Höhe von Ameise auf Zeltdach, wenn sie parallel zu $\vec{z}$ krabbelt?'

beliebiger, vorgegebener Vektor

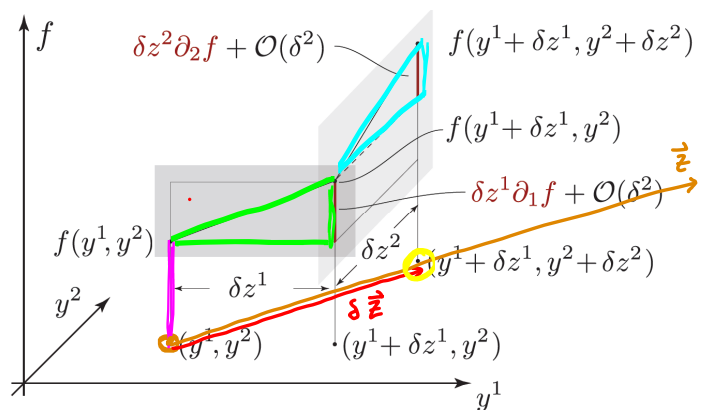
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{y} \mapsto f(\vec{y}) \quad (1)$$

Wie ändert sich eine Funktion $f(\vec{y})$
an einem gegebenen Punkt $\vec{y} = (y^1, y^2)^T$

wenn sich beide Argumente gleichzeitig

ändern, von $\vec{y}$ nach $\vec{y} + \delta \vec{z}$

mit δ klein und $\vec{z} = (z^1, z^2)^T$ beliebig?



$$\text{Es gilt: } \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y})] = \delta z^1 \frac{\partial}{\partial y^1} f(\vec{y}) + \delta z^2 \frac{\partial}{\partial y^2} f(\vec{y}) = \delta \sum_{j=1}^2 \partial_j f(\vec{y}) z^j \quad (2)$$

(Begründung: Seite C3e)

Verallgemeinerung: Für $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \vec{y} \mapsto f(\vec{y})$ gilt:

(3)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y})] = \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial y^j} f(\vec{y}) z^j = \partial_j f(\vec{y}) z^j$$

kovariante Notation

Merke:
linear in $\vec{z}$!

(4)

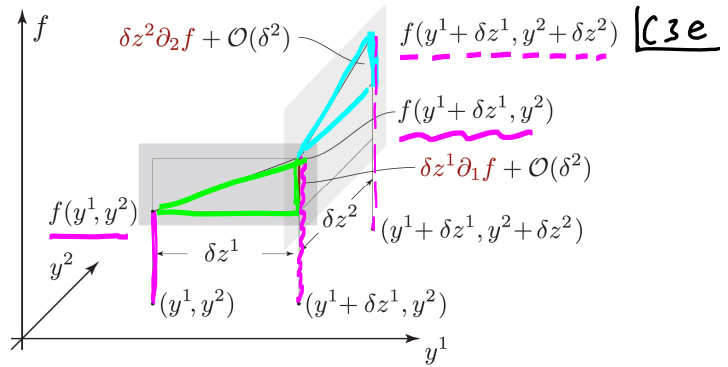
Begründung für (d.2):

explizit für $d = 2$:

$$\vec{y} = (y^1, y^2)^T \quad (1)$$

$$\delta \vec{z} = (\delta z^1, \delta z^2)^T \quad (2)$$

$$\left[f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y}) \right] = ? \quad (3)$$



$$[]^{(2)} = \underbrace{f(y' + \delta z', y^2 + \delta z^2)}_{\text{subtrahiere und addiere dieselbe GröÙe}} - \underbrace{f(y' + \delta z', y^2)}_{+} + \underbrace{f(y' + \delta z', y^2)}_{-} - f(y', y^2) \quad (4)$$

$$\approx (\delta z^2) \partial_z f(\underbrace{y^1 + \delta z^1, y^2}_{\text{blue}}) \triangle + (\delta z^1) \partial_1 f(y^1, y^2) \triangle \quad (5)$$

$$\approx \delta z^2 \gamma_2 \left[\overbrace{f(y^1, y^2) + \delta z^1 \partial_1 f(y^1, y^2)}^{\text{Taylor expansion}} \right] + (\delta z^1) \partial_1 f(y^1, y^2) \quad (6)$$

vernachlässigbar, weil v. Ordnung $\mathcal{O}(\delta^2)$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y})] = \cancel{\delta} [\partial_1 f(\vec{y}) z^1 + \partial_2 f(\vec{y}) z^2] = \sum_{j=1}^2 \partial_j f(\vec{y}) z^j \quad \checkmark \quad (\text{d.2}) \quad (7)$$

Analog folgt (d.4) für beliebiges d

Beispiel für (d.2)

$$f(\vec{y}) = f(y^1, y^2) = (y^1 + 3y^2)^2 \quad (1)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y})] \stackrel{(d.u)}{=} \partial_1 f(y^1, y^2) z^1 + \partial_2 f(y^1, y^2) z^2 \quad (2)$$

$$= 2(y' + 3y^2)z' + 6(y' + 3y^2)z^2 \quad (3)$$

Explizite Rechnung ist aufwendig... :

$$f(y', y^2) = (y')^2 + 6y'y^2 + 9(y^2)^2 \quad (4)$$

$$f(y' + \delta z^1, y^2 + \delta z^2) = (y' + \delta z^1)^2 + 6(y' + \delta z^1)(y^2 + \delta z^2) + 9(y^2 + \delta z^2)^2 \quad (5)$$

$$= (y')^2 + 2y' \delta z' + (\delta z')^2 + 6[y'y'' + y' \delta z'' + \delta z' y'' + \delta z' \delta z''] + 9(y'')^2 + 18y'' \delta z'' + 9(\delta z'')^2 \quad (6)$$

$$= (y')^2 + 6y'y'' + 9(y'')^2 + \delta[2y'z' + 6y'z'' + 6y''z' + 18y''z''] + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (7)$$

$$= f(y', y^2) + \delta \left[2(y' + 3y^2)z' + 6(y' + 3y^2)z^2 \right] + \mathcal{O}(\delta^2) \quad (8)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(y' + \delta z^1, y^2 + \delta z^2) - f(y', y^2)] = z(y' + 3y^2)z^1 + 6(y' + 3y^2)z^2 = (3) \quad \checkmark \quad (9)$$

C3g

beliebiger, vorgegebener Weg

62

(2)

(3)

The diagram shows a 3D coordinate system with axes labeled x , g^1 , and g^2 . A curved surface is labeled g^2 . A point x on the x -axis is mapped to a point $g(x)$ on the g^2 surface. From $g(x)$, a red arrow points to a point $f(g(x))$ on a higher, curved surface labeled f . A dashed box encloses the region around $g(x)$ and $f(g(x))$.

$$\frac{d f(\vec{g}(x))}{dx} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f(\vec{g}(x))}{\partial g_j} \frac{dg_j(x)}{dx}$$

wie normale Kettenregel, aber summiert über j (4)

$$\sum_j$$

$$x = t :$$

(5)

1C3h

(1)

(2)

(2)

(3)

4)

(5)

Schreibe: $\vec{g}(x) = \vec{y}$, $d_x \vec{g}(x) = \vec{z}$

(6)

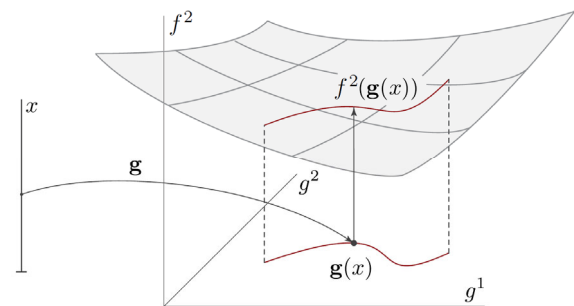
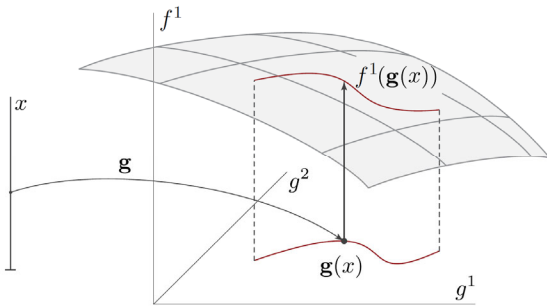
(7)

(8)

Verallgemeinerung I:

C3i

'Wie ändert sich Höhe f^1 und Temperatur f^2 mit der Zeit x , wenn Ameise entlang $\vec{g}(x)$ krabbelt?'



$$\vec{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{y} \mapsto \vec{f}(\vec{y}) = (f^1(\vec{y}), \dots, f^m(\vec{y}))^T \quad (1)$$

$$\vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto \vec{g}(x) = (g^1(x), \dots, g^d(x))^T \quad (2)$$

$$\vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto \vec{f}(\vec{g}(x)) = (f^1(\vec{g}(x)), \dots, f^m(\vec{g}(x)))^T \quad (3)$$

Dann gilt (g.4) für jede Komponente getrennt:

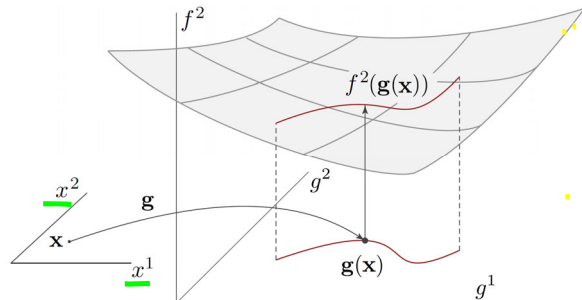
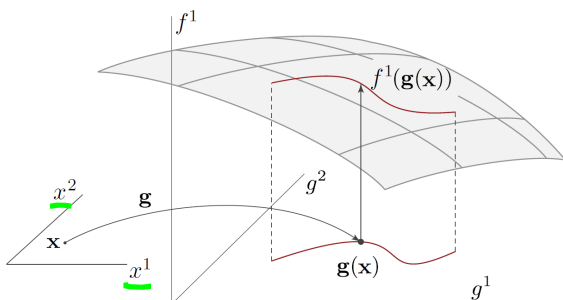
$$\frac{d f^i(\vec{g}(x))}{dx} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f^i(\vec{g}(x))}{\partial g^j} \frac{dg^j(x)}{dx} \quad i=1, \dots, m \quad (4)$$

wie normale Kettenregel für f^i , aber summiert über j

Verallgemeinerung II:

C3j

'Wie ändert sich Höhe f^1 und Temperatur f^2 mit der Zeit x^1 und der Windstärke x^2 , wenn Ameise entlang $\vec{g}(\vec{x})$ krabbelt?'



$$\vec{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{y} \mapsto \vec{f}(\vec{y}) \quad (1)$$

$$\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \mapsto \vec{g}(\vec{x}) = \vec{g}(x^1, \dots, x^n) \quad (2)$$

$$\vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{g}(\vec{x})) \quad (3)$$

Dann gilt (g.4) für jede Komponente getrennt:

$$\frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial g^j} \frac{\partial g^j(\vec{x})}{\partial x^k} \quad i=1, \dots, m, \quad k=1, \dots, n \quad (4)$$

wie normale Kettenregel für f^i , aber summiert über j und partiell abgeleitet nach x^k

Beispiel: Geschwindigkeit an Wasseroberfläche

Betrachte erstens:

$$\vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (1)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g^1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g^d(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Betrachte zweitens:

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad (m=1)$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^d \end{pmatrix} \mapsto f(\vec{y}) = f(y^1, \dots, y^d) \quad (3)$$

Betrachte nun Verkettung v. f und g:

$$f \circ \vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

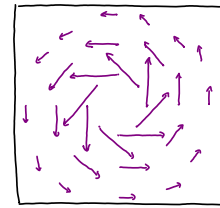
$$\vec{x} \mapsto f(\vec{g}(\vec{x}))$$

$$= f(g^1(\vec{x}), \dots, g^d(\vec{x})) \quad (5)$$

(Selbststudium!)

Beispiel für $\vec{g}$:

Geschwindigkeit an Wasseroberfläche, $\vec{v}$:



$$d=2$$

$$n=2$$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v^1(\vec{x}) \\ v^2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Beispiel für f: Betragssquadrat des Vektors $\vec{y}$:

$$f(\vec{y}) = \|\vec{y}\|^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2 \quad (4)$$

Beispiel für Verkettung: Betragssquadrat der Wassergeschwindigkeit am Punkt $\vec{x}$:

$$f(\vec{v}(\vec{x})) = \|\vec{v}(\vec{x})\|^2 \quad (5)$$

$$= (v^1(\vec{x}))^2 + (v^2(\vec{x}))^2$$

$$= \frac{1}{(x^2)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} \quad (6)$$

Fortsetzung Beispiel: Wie ändert sich Geschwindigkeit an Wasseroberfläche mit x^1 ?

C3e

$$\partial_1 f(\vec{v}(\vec{x})) \stackrel{(k.6)}{=} \partial_1 \left[\frac{1}{(x^2)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} \right] = \left[0 + \frac{-2}{(x^1)^3} \cdot 1 \right] = -\frac{2}{(x^1)^3} \quad (1)$$

Nochmal, nun mit der allgemeinen Kettenregel für partielle Ableitungen gerechnet:

$$f(\vec{y}) \stackrel{(k.4)}{=} (y^1)^2 + (y^2)^2, \quad (2a) \quad \vec{v}(\vec{x}) \stackrel{(c.2)}{=} \left(-\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^1} \right)^T \quad (2b)$$

$$\partial_1 f(\vec{v}(\vec{x})) \stackrel{(j.4)}{=} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^j} \bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \cdot \frac{\partial v^j(\vec{x})}{\partial x^1} \quad (3)$$

$$= \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^1} \bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial v^1(\vec{x})}{\partial x^1} + \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^2} \bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial v^2(\vec{x})}{\partial x^1} \quad (4)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y^1} \left(\overbrace{(y^1)^2 + (y^2)^2}^{(2a)} \right) \bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^1} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y^2} \left(\overbrace{(y^1)^2 + (y^2)^2}^{(2a)} \right) \bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\overbrace{\frac{1}{x^1}}^{(2b)} \right) \quad (5)$$

$$= 2 y^2 \bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \cdot \left(\frac{-1}{(x^1)^2} \right) = 2 v^2(\vec{x}) \left(\frac{-1}{(x^1)^2} \right) = 2 \frac{1}{x^1} \left(-\frac{1}{(x^1)^2} \right) = -\frac{2}{(x^1)^3} \quad (6)$$

C4 Mehrdimensionale Integration (kartesisch)

C4a

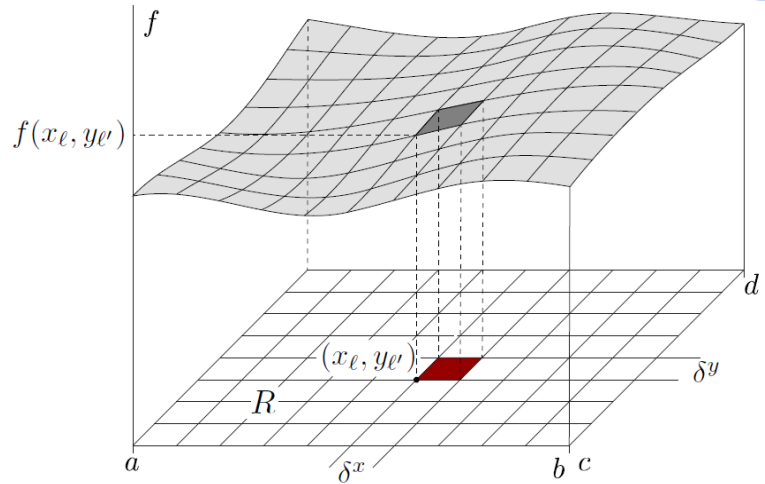
C4.1 2D Integration über Rechteck

$$f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Diskretisierungsschritte:

$$\delta^x = \frac{b-a}{N_x}, \quad \delta^y = \frac{d-c}{N_y}$$



$$\text{Volumen} \approx \sum_l \sum_{l'} f(x_l, y_{l'}) \delta^x \delta^y \quad (\text{Riemann-Summe})$$

Def. v 2D-
Integral:

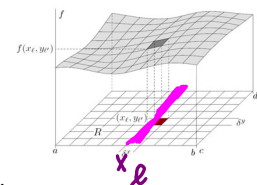
$$\lim_{\delta^x, \delta^y \rightarrow 0} \delta^x \delta^y \sum_l \sum_{l'} f(x_l, y_{l'}) \equiv \int_{[a,b] \times [c,d]} dx dy f(x, y)$$

Integrationsdomäne

Fubini's Theorem: Integrationsreihenfolge ist egal

C4b

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} dx dy f(x, y) = \lim_{\delta^x \rightarrow 0} \delta^x \sum_l \underbrace{\lim_{\delta^y \rightarrow 0} \delta^y \sum_{l'} f(x_l, y_{l'})}_{\text{1D-Integral, mit } x_l \text{ fest}}$$

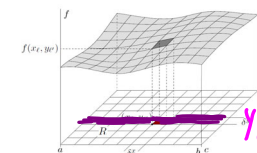


(1)

$$= \lim_{\delta^x \rightarrow 0} \delta^x \sum_l \underbrace{\int_c^d dy f(x_l, y)}_{\text{Funktion v. } x_l, \text{ kann integriert werden}} = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) \quad (2)$$

Alternativ:

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} dx dy f(x, y) = \lim_{\delta^y \rightarrow 0} \delta^y \sum_{l'} \underbrace{\lim_{\delta^x \rightarrow 0} \delta^x \sum_l f(x_l, y_{l'})}_{\text{1D-Integral, mit } y_{l'} \text{ fest}}$$



(3)

$$= \lim_{\delta^y \rightarrow 0} \delta^y \sum_{l'} \underbrace{\int_a^b dx f(x, y_{l'})}_{\text{Funktion v. } y_{l'}, \text{ kann integriert werden}} = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y) \quad (4)$$

Intuitive Begründung:

Zählreihenfolge der Quader in
Zeilen oder Spalten ist egal.

Fubini:

$$\int_{[a,b] \times [c,d]} dx dy f(x, y) = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y) \quad (5)$$

Beispiel $f: [0, 2] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = xy + y^2$

C4c

(1)

$$\int_0^2 dx \int_0^1 dy f(x, y) = \int_0^2 dx \int_0^1 dy (xy + y^2) = \int_0^2 dx \left(x \cdot \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1$$

(2)

$$= \int_0^2 dx \left(x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{5}{3}$$

(3)

$$\int_0^1 dy \int_0^2 dx f(x, y) = \int_0^1 dy \int_0^2 dx (xy + y^2) = \int_0^1 dy \left(\frac{1}{2} x^2 y + x y^2 \right) \Big|_0^2$$

Fubini
stimmt!

(4)

$$= \int_0^1 dy \left(\frac{1}{2} \cdot 4 y + 2 y^2 \right) = \left(2 \cdot \frac{1}{2} y^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 = 1 \cdot 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

(5)

Analog in 3D: $\int_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} dx dy dz f(x, y, z) = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x, y, z)$ (6)

Reihenfolge dieser Integrale ist beliebig

Satz von Fubini ist nicht anwendbar, falls das Integral $\int dx dy |f(x, y)|$ nicht existiert.

Dann gilt: $\int dx \int dy f(x, y) \neq \int dy \int dx f(x, y)$

Siehe AD-Buch, INFO auf S. 240.

Integration über allgemeiner Domänen

C4d

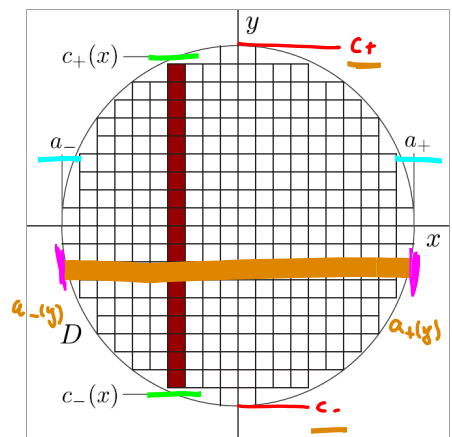
Riemann-Summe:

$$\approx \delta x \sum_{a_- < x_k < a_+} \cdot \delta y \sum_{c_-(x_k) < y_k < c_+(x_k)} f(x_k, y_k) \quad (1)$$

Integral v. Funktion $f(x, y)$ über d. Fläche:

$$\int_D dx dy f(x, y) \equiv \int_{a_-}^{a_+} dx \left[\int_{c_-(x)}^{c_+(x)} dy f(x, y) \right]$$

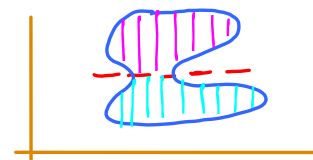
$$\text{nach Fubini} = \int_{c_-}^{c_+} dy \left[\int_{a_-(y)}^{a_+(y)} dx f(x, y) \right]$$



Für das 'innere' (zweite) Integral sind die Grenzen abhängig von der 'äußeren' (ersten) Integrationsvariable.

Bemerkung: $c_+(x)$ bzw. $a_+(y)$

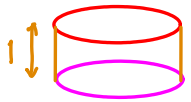
müssen eindeutige Funktionen sein; falls sie es nicht sind, hilft Unterteilung des Integrals in mehrere Teile:



Beispiel: Kreisfläche

Volumen = Fläche $\times 1$

C4e

$$A \stackrel{(1)}{=} \int_{-R}^R dx \int_{c_-(x)}^{c_+(x)} dy \cdot 1 \quad \leftarrow (2 \text{ b. } z') \rightarrow$$


$$= \int_{-R}^R dx [c_+(x) - c_-(x)] \stackrel{(2)}{=} 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

Bestimmung der Integrationsgrenzen für y:

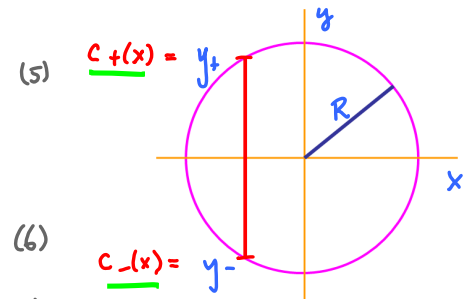
$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (1)$$

$$c_{\pm}(x) = y_{\pm} = \pm \sqrt{R^2 - x^2} \quad (2)$$

Substitution: $x = R \cos t$ Grenzen: $R = R \cos(0)$
 Maß: $\frac{dx}{dt} = -R \sin t \cdot dt$ $-R = R \cos(\pi)$

$$A \stackrel{(2)}{=} -2 \int_{\pi}^0 dt (R \sin t) \underbrace{\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 t}}_{R \sqrt{1 - \cos^2 t} = R \sin t}$$

$$= 2 R^2 \int_0^{\pi} dt \underbrace{\sin^2 t}_{\pi/2} \cdot 1 \stackrel{\text{part. Int.}}{=} \pi R^2$$



(3)

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

□

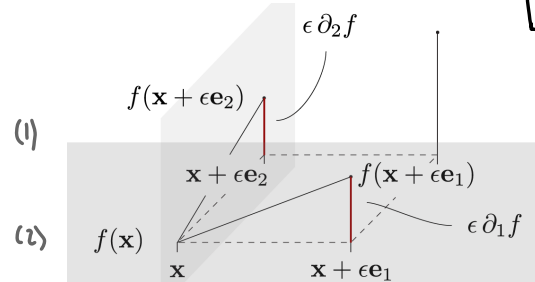
Zusammenfassung C3: Partielle Ableitungen

ZC3

Partielle Ableitung: $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{x} + \delta \vec{e}_i) - f(\vec{x})]$$

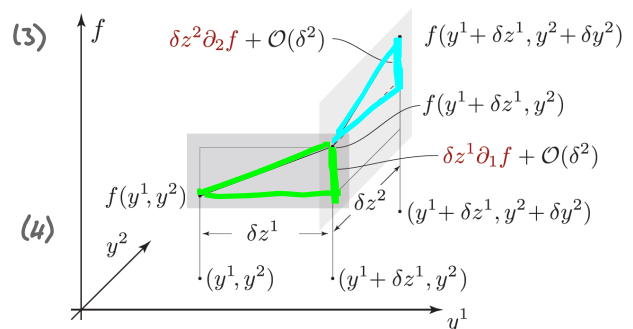
$$\equiv \partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i f(\vec{x})$$



Satz v. Schwarz: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{y} \mapsto f(\vec{y})$$

$$\lim_{\delta} \frac{1}{\delta} [f(\vec{y} + \delta \vec{e}_j) - f(\vec{y})] = \partial_j f(\vec{y}) \vec{e}_j$$



$$\vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{f} \circ \vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Allgemeine Kettenregel:

$$\frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial g^j} \frac{\partial g^j(\vec{x})}{\partial x^k}$$

$$i = 1, \dots, m$$

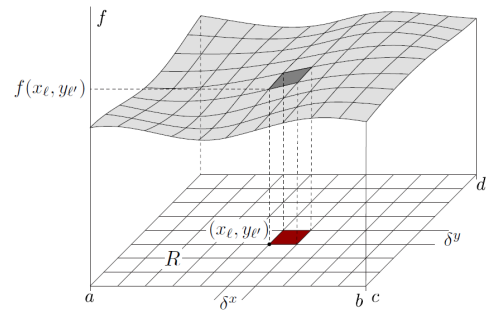
$$k = 1, \dots, n \quad (5)$$

Zusammenfassung: C4 Mehrdimensionale Integration (Kartesisch)

zC4a

Integration in $\mathbb{R}^2$

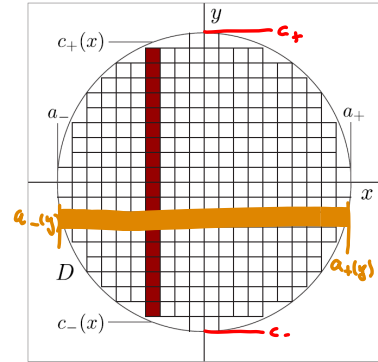
$$\int_a^b dx \int_c^d dy f(x,y) \equiv \lim_{\delta^x, \delta^y \rightarrow 0} \delta^x \delta^y \sum_l \sum_{l'} f(x_l, y_{l'})$$



Fubini: Integrationsreihenfolge ist egal:

$$\int_a^b dx \int_{y_-(x)}^{y_+(x)} dy f(x,y) = \int_{y_a}^{y_b} dy \int_{x_-(y)}^{x_+(y)} dx f(x,y)$$

Für das 'innere' (zweite) Integral sind die Grenzen abhängig von der 'äußeren'



Analog in 3D:

$$\int_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} dx dy dz f(x,y,z) = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x,y,z)$$

Reihenfolge dieser Integrale ist beliebig