

V: Vektor-Kalkulus

Via

Euklidischer Raum (ER) = Ursprung + Euklidischer Vektorraum
(Raum unserer Wahrnehmung)

Punkt im ER: $P = O + \vec{r}$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$

Differenzen v. Punkten sind Vektoren:

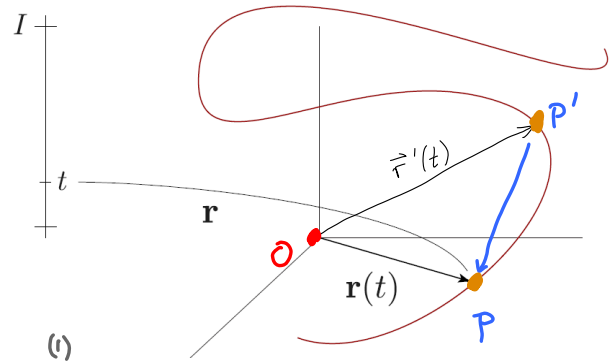
$$\vec{P} - \vec{P}' = \vec{r} - \vec{r}' \in \mathbb{E}^3$$

V1 Kurven

V1.1 Definition einer Kurve

$$\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^d(t) \end{pmatrix}$$



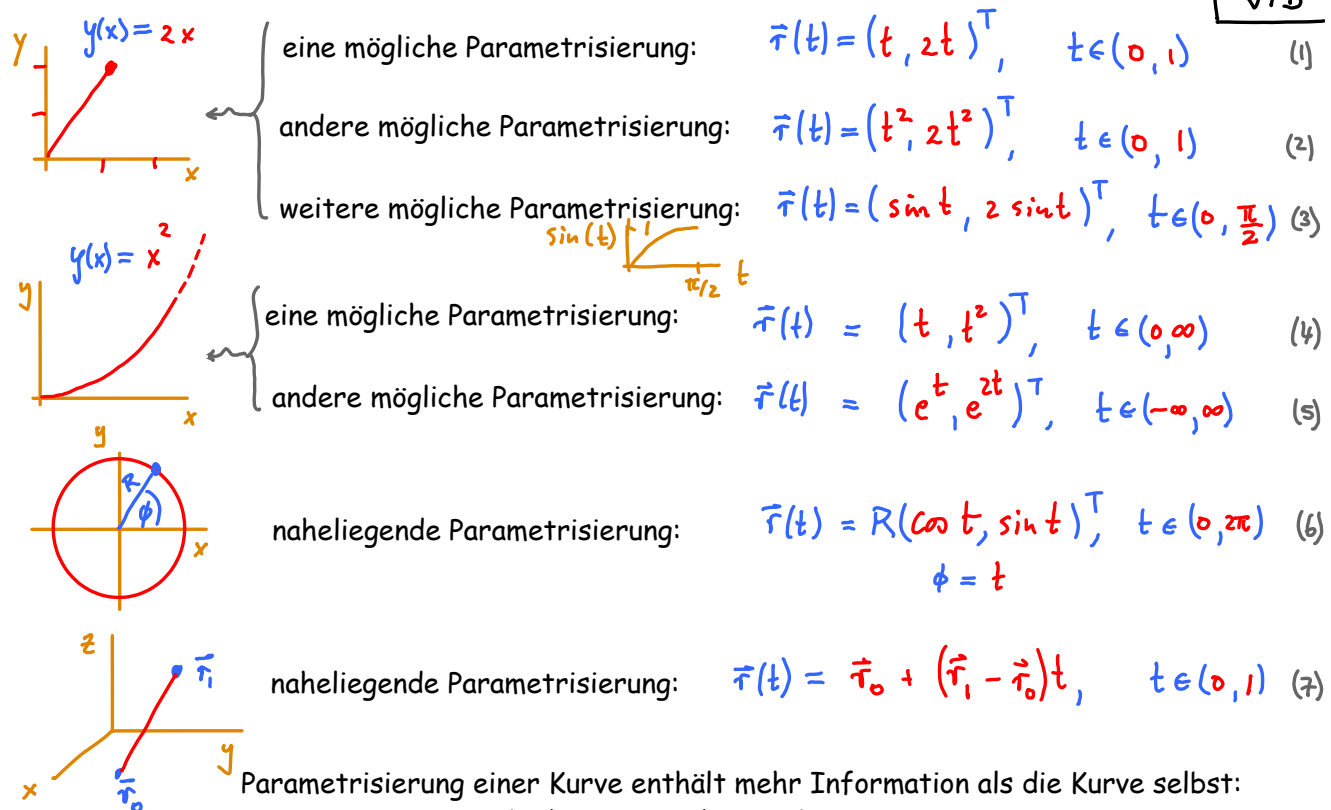
Intervall: $I \subset \mathbb{R}$, wir wählen i.d. Regel $I = (0, \tau)$ (2)

'Kurve': $\gamma = \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \}$ = Bild der Funktion $\vec{r}$ = $\vec{r}(I)$
[im Sinne v. Seite L1b]

Die Funktion $\vec{r}$ liefert eine 'Parametrisierung d. Kurve'

Beispiele von Parametrisierungen

V1b



Parametrisierung einer Kurve enthält mehr Information als die Kurve selbst:
Kurve sagt aus, wie die 'Reiseroute' aussieht.
Parametrisierung sagt zusätzlich auch aus, wie schnell sie durchlaufen wird.

V1.2 Kurvengeschwindigkeit

'Kurvengeschwindigkeit' $\vec{v}(t)$ z. Zeit $t \in I \subseteq (0, \tau)$
ist definiert durch die lineare Näherung:

$$\vec{r}(t + \delta_t) \approx \vec{r}(t) + \delta_t \vec{v}(t) \quad (\delta_t \rightarrow 0) \quad (1)$$

$\vec{v}(t)$ liegt 'tangential' zur Kurve,

denn eine kleine Änderung, δ_t , in t bewirkt, dass sich $\vec{r}$ in $\vec{v}$ -Richtung ändert.

$$\vec{v}(t) \stackrel{(1)}{=} \lim_{\delta_t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \delta_t) - \vec{r}(t)}{\delta_t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv d_t \vec{r}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) \quad (2)$$

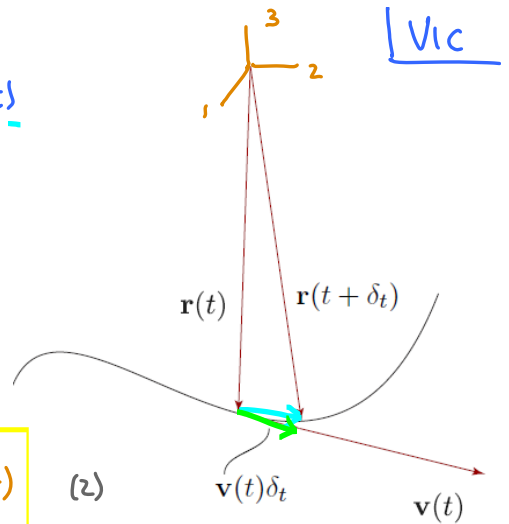
[Vergleiche Mutter aller Ableitungen, C1b.3 !]

Komponentenschreibweise: $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{e}_i \dot{r}^i(t)$ (3)

Kartesische Basisvektoren sind zeitunabhängig! $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{e}_i r^i(t)) = \vec{e}_i \left(\frac{dr^i(t)}{dt} \right) \equiv \vec{e}_i v^i(t) \quad (4) \quad v^i(t) \equiv \frac{dr^i(t)}{dt} \equiv \dot{r}^i(t) \quad (5)$$

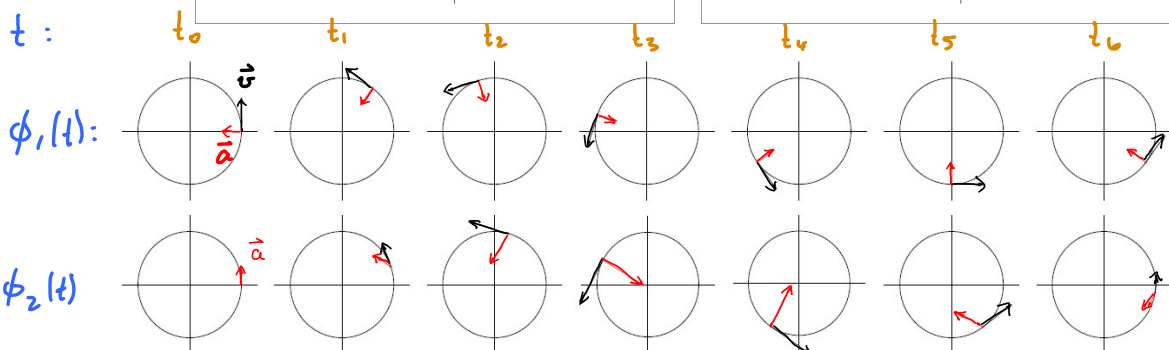
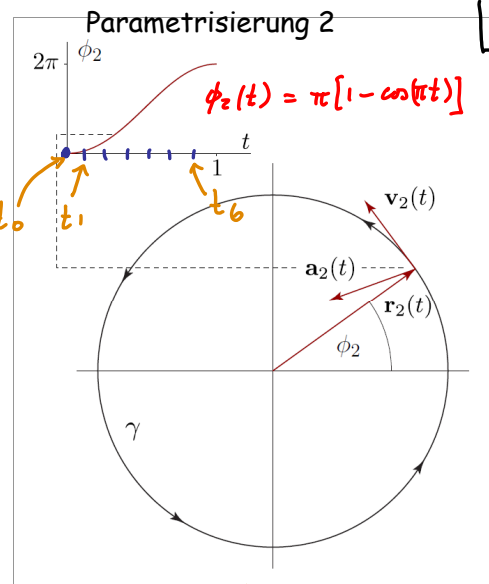
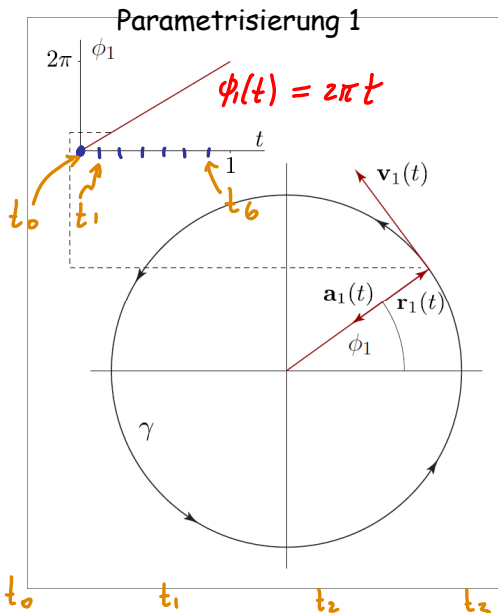
Beschleunigung: $\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t) \quad (6)$



Wir definieren I als offenes (!) Intervall, denn am Rand ist die Ableitung $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ undefiniert.

Am Rand: $\dot{\vec{r}}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau} \dot{\vec{r}}(t)$ $\tau + \delta_t$
Siehe AD-Buch, Seite 409, INFO. τ

Beispiel: Kreis



Vie

Ort: $\vec{r}_i = \begin{pmatrix} \cos \phi_i(t) \\ \sin \phi_i(t) \end{pmatrix}$ (1) Parametrisierung 1 $\phi_1(t) = 2\pi t$ (2) Parametrisierung 2 $\phi_2(t) = \pi [1 - \cos(\pi t)]$ (3)

Beide Parametrisierungen ($i = 1, 2$) beschreiben denselben Kreis:

$\gamma = \{ \vec{r}(t) \mid t \in (0, 1) \}$

$\|\vec{r}_i\|^2 = (x_i)^2 + (y_i)^2 \stackrel{\text{Quadrat}}{=} \cos^2[\] + \sin^2[\] = 1$ (4)
 Vektor: $i = 1$ oder 2

Geschw.: $\dot{\vec{r}}_i = \begin{pmatrix} -\sin \phi_i(t) \\ \cos \phi_i(t) \end{pmatrix} \dot{\phi}_i(t)$ $\dot{\phi}_1(t) = 2\pi$, $\dot{\phi}_2(t) = \pi^2 \sin(\pi t)$ (5)
 $= d_t(\cdot)$

Beschl.: $\ddot{\vec{r}}_i \stackrel{\text{PR}}{=} - \begin{pmatrix} \cos \phi_i(t) \\ \sin \phi_i(t) \end{pmatrix} \dot{\phi}_i^2(t) + \begin{pmatrix} -\sin \phi_i(t) \\ \cos \phi_i(t) \end{pmatrix} \ddot{\phi}_i(t)$, $\ddot{\phi}_1(t) = 0$, $\ddot{\phi}_2(t) = \pi^3 \cos(\pi t)$ (6)
 $= d_t(\cdot)$

$= -\vec{r}_i \dot{\phi}_i^2 + \vec{v}_i \dot{\phi}_i / \dot{\phi}_i$ (7)

Zentripetalbeschl. Änderung der Geschwindigkeit in Tangentialrichtung

Für $i = 1$ gilt: $\|\vec{r}_1(t)\| = 1$, $\|\vec{v}_1(t)\| = 2\pi$, $\|\vec{a}_1(t)\| = (2\pi)^2$ (8)

$\vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{a}_1 = 0$ (9)

Ableitungsregeln:

$d_t \equiv \frac{d}{dt}$ $d_t \vec{r} \equiv d_t(\vec{r}(t))$

Vif

Für $\vec{r}(t)$, $\vec{s}(t)$, $a(t)$

gilt:

$d_t(\vec{r} + \vec{s}) = d_t \vec{r} + d_t \vec{s}$ (1)

$d_t(a \vec{r}) \stackrel{\text{Produktregel}}{=} (d_t a) \vec{r} + a (d_t \vec{r})$ (2)

$d_t(\vec{r} \cdot \vec{s}) \stackrel{\text{PR}}{=} (d_t \vec{r}) \cdot \vec{s} + \vec{r} \cdot (d_t \vec{s})$ (3)

$d_t(\vec{r} \times \vec{s}) \stackrel{\text{PR}}{=} (d_t \vec{r}) \times \vec{s} + \vec{r} \times (d_t \vec{s})$ (4)

Herleitung:

nach Komponenten zerlegen, z.B.:

$\vec{r}(t) = \vec{e}_i r^i(t)$, $\vec{s}(t) = \vec{e}_j s^j(t)$ (5)

$d_t(\vec{r} \cdot \vec{s}) = d_t[(\vec{e}_i r^i(t)) \cdot (\vec{e}_j s^j(t))]$ (6)

$\stackrel{\text{PR}}{=} (\vec{e}_i d_t(r^i(t))) \cdot (\vec{e}_j s^j(t)) + (\vec{e}_i r^i(t)) \cdot (\vec{e}_j d_t(s^j(t)))$ (7)

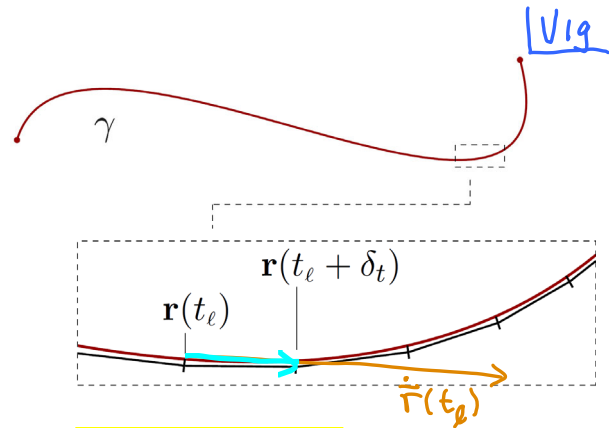
$= (d_t \vec{r}) \cdot \vec{s} + \vec{r} \cdot (d_t \vec{s}) \Rightarrow (3)$ (8)

V1.3 Länge einer Kurve

Kurve: $\vec{r} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d, t \mapsto \vec{r}(t)$

Schätzung der Kurvenlänge:
(mit Diskretisierungsparameter δ_t)

$$L_{\delta_t} = \sum_l \underbrace{\|\vec{r}(t_l + \delta_t) - \vec{r}(t_l)\|}_{(c.1)} \approx \sum_l \|\delta_t \dot{\vec{r}}(t_l)\| = \delta_t \|\dot{\vec{r}}(t_l)\| \quad (1)$$



Tatsächliche Kurvenlänge:

$$L[\gamma] = \lim_{\delta_t \rightarrow 0} L_{\delta_t} \stackrel{(1)}{=} \lim_{\delta_t \rightarrow 0} \delta_t \sum_l \|\dot{\vec{r}}(t_l)\| = \int_0^T dt \|\dot{\vec{r}}(t)\| \quad (2)$$

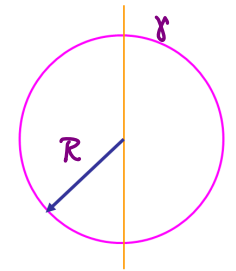
(c.2) $\equiv dt \dot{\vec{r}}(t)$

Beispiel: Umfang eines Kreises:

$$\vec{r}(t) = R (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)^T, \quad t \in (0, 1) \quad (3)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = 2\pi R (-\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)^T, \quad \|\dot{\vec{r}}\| = 2\pi R \underbrace{[\sin^2 + \cos^2]^{1/2}}_{=1} \quad (4)$$

$$L[\gamma] \stackrel{(2)}{=} \int_0^1 dt \, 2\pi R = 2\pi R \quad \checkmark \quad (5)$$



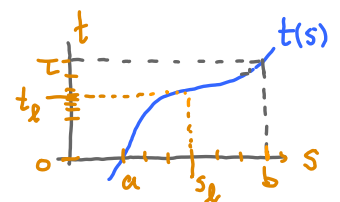
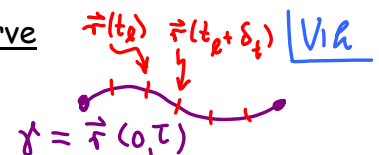
Länge ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung der Kurve

t-Parametrisierung: $\vec{r} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d, t \mapsto \vec{r}(t) \quad (1)$

Argument v. $\vec{r}(t)$ sei
Zielelement einer
bijektiven Abbildung:

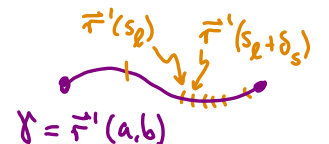
$$t : (a, b) \rightarrow (0, T), s \mapsto t(s) \quad (2)$$

$$\text{wegen Bijektivität: } \frac{dt}{ds} > 0 \quad (3)$$



Konstruiere nun alternative Parametrisierung derselben Kurve:

$$s\text{-Parametrisierung: } \vec{r}' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^d, s \mapsto \vec{r}'(s) \equiv \vec{r}(t(s)) \quad (4)$$



s-Geschwindigkeit:

(1d.2): $\mathbb{R}^d$

$$\|d_s \vec{r}'(s)\| \stackrel{(4)}{=} \left\| \frac{d}{ds} \vec{r}(t(s)) \right\| = \left\| \frac{d}{dt} \vec{r}(t) \right\|_{t=t(s)} \frac{dt(s)}{ds} \stackrel{(3)}{=} \frac{dt(s)}{ds} \|d_t \vec{r}(t(s))\|$$

falls $a > 0$

Kurvenlänge:

$$L[\gamma] \stackrel{(4.2)}{=} \int_a^b ds \|d_s \vec{r}'(s)\| \stackrel{(5)}{=} \int_a^b ds \frac{dt(s)}{ds} \|d_t \vec{r}(t(s))\| \stackrel{(C2g.4)}{=} \int_0^T dt \|d_t \vec{r}(t)\| \stackrel{(3)}{=} \checkmark \stackrel{(4.2)}{=} \quad (6)$$

Integralsubstitution: $t = t(s)$

Konsistenzcheck erfolgreich: s-Parametrisierung liefert dieselbe Länge wie t-Parametrisierung!

Natürliche Parametrisierung einer Kurve: durch Bogenlänge

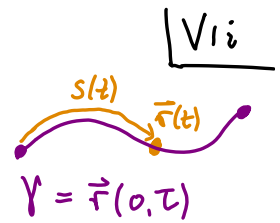
Kurve sei durch eine Variable u parametrisiert.

$$\vec{r}: (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto \vec{r}(u) \quad (1)$$

Bogenlänge nach Zeit t :

(auch unabhängig v. Form der Parametrisierung)

$$s(t) \stackrel{(1.2)}{=} \int_0^t du \, \|d_u \vec{r}(u)\| \quad (2)$$



s wächst monoton mit t :

$$s: (0, T) \rightarrow (0, L(\gamma)), \quad t \mapsto s(t), \quad d_t s(t) > 0 \quad (3)$$

Umkehrfunktion: Zeit $t(s)$, nach der Länge s erreicht ist:

$$t: (0, L(\gamma)) \rightarrow (0, T), \quad s \mapsto t(s) \quad (4)$$

Parametrisiere nun Kurve durch Bogenlänge s :

$$\vec{r}_L: (0, L(\gamma)) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad s \mapsto \vec{r}_L(s) \equiv \vec{r}(t(s)) \quad (5)$$

'Natürliche Parametrisierung'

Geschw. in nat. Param.:

$$\|d_s \vec{r}_L(s)\| \stackrel{(1.5)}{=} \left\| \frac{d \vec{r}(t)}{dt} \right|_{t=t(s)} \left\| \frac{dt(s)}{ds} \right\| = \left\| \frac{d \vec{r}}{dt} \right\| \frac{dt}{ds} = 1 \quad (6)$$

Ist t -Geschw. groß, wächst auch Bogenlänge schnell mit t , 'das hebt sich weg'

sauber formuliert:

$$\frac{dt(s)}{ds} \stackrel{(1.2)}{=} \frac{1}{\left\| \frac{d \vec{r}(t)}{dt} \right\|_{t=t(s)}} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\|d_t \vec{r}(t)\|_{t=t(s)}} \quad (7)$$

Beispiel: Kreisbewegung

Bahnkurve:

$$\vec{r}: (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)^T \quad (1)$$

Periode: wenn

$$\cos(\omega T) = 1 \implies T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2)$$

Geschwindigkeit:

$$\frac{d \vec{r}}{dt} \stackrel{(1)}{=} \omega R (-\sin \omega t, \cos \omega t)^T \quad \left\| \frac{d \vec{r}}{dt} \right\| \stackrel{(3)}{=} R \omega \quad (3)$$

Bogenlänge:

$$s(t) \stackrel{(1.2)}{=} \int_0^t du \, \|\dot{\vec{r}}(u)\| \stackrel{(4)}{=} \int_0^t du \, R \omega = R \omega t \quad (4)$$

Kreisumfang:

$$s(T) \stackrel{(5),(2)}{=} R \omega \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi R \quad \checkmark \quad (5)$$

Umkehrfunktion:

$$t: (0, 2\pi R) \rightarrow (0, T), \quad s \mapsto t(s) = \frac{s}{R \omega} \quad (6)$$

$$\stackrel{(4)}{L} = t(2\pi R) = \frac{2\pi R}{R \omega} = T$$

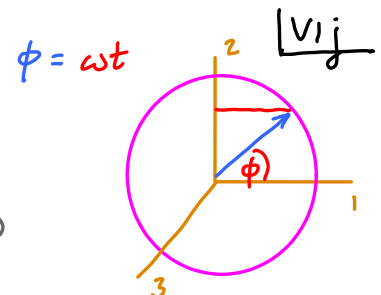
Natürliche

Parametrisierung:

$$\vec{r}_L(s) = \vec{r}(t(s)) \stackrel{(1,7)}{=} \left(R \cos\left(\frac{s}{R}\right), R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right)^T \quad (7)$$

s -Geschwindigkeit:

$$\|d_s \vec{r}_L\| \stackrel{(7)}{=} \left\| R \left(-\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R}, \frac{1}{R} \cos \frac{s}{R} \right) \right\| = 1 \quad \checkmark \quad (8)$$



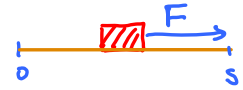
V1.4 Linienintegral

Vik

Physikalische Motivation: Arbeit (W) verrichtet durch Kraft entlang eines Weges.

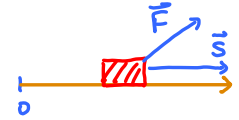
Falls Richtung der Kraft entlang geradliniger Verschiebung ist:

$$W = s F$$



Falls Richtung der Kraft nicht entlang geradliniger Verschiebung:

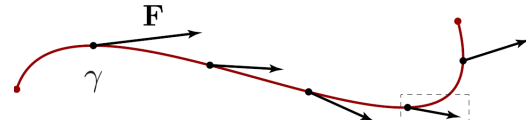
$$W = \vec{s} \cdot \vec{F}$$



Nicht-geradliniger Weg,

mit ortsabhängiger Kraft:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F^1(\vec{r}) \\ \vdots \\ F^d(\vec{r}) \end{pmatrix}$$



Parametrisierung:

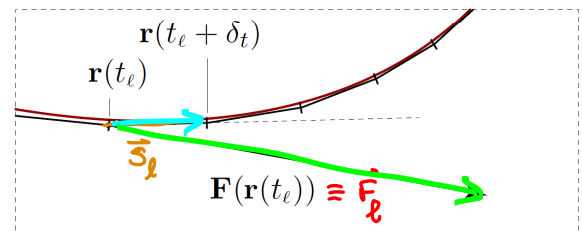
$$\vec{r} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d, t \mapsto \vec{r}(t) \quad (1)$$

Diskretisierungsparameter:

$$\delta_t$$

Arbeit im Intervall ℓ :

$$W_\ell \equiv \vec{s}_\ell \cdot \vec{F}_\ell \quad (2)$$



Verschiebung im Intervall ℓ :

$$\vec{s}_\ell = \vec{r}(t_\ell + \delta_t) - \vec{r}(t_\ell) \stackrel{(c.1)}{=} \delta_t \dot{\vec{r}}(t_\ell) \quad (3)$$

Gesamtarbeit entlang der Kurve γ :

Viel

$$\begin{aligned} W[\gamma] &\equiv \lim_{\delta_t \rightarrow 0} \sum_\ell W_\ell \quad (1) \\ &\stackrel{(k.2), (k.3)}{=} \lim_{\delta_t \rightarrow 0} \delta_t \sum_\ell \dot{\vec{r}}(t_\ell) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t_\ell)) \equiv \int_0^T dt \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) \equiv \int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{F} \quad (2) \end{aligned}$$

mit dieser symbolische Notation ist dies gemeint!

'Linienintegral der Kraft $\vec{F}$ entlang des Weges γ '

Definition eines allgemeinen Linienintegrals: (3 Konstruktionsschritte)

$$\vec{f} : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^d, \vec{r} \mapsto \vec{f}(\vec{r}) \quad \text{sei eine vektorwertige Funktion, definiert auf einer Kurve } \gamma \quad (3)$$

(i) Definiere Parametrisierung v. γ :

$$\vec{r} : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d, t \mapsto \vec{r}(t) \quad (4)$$

(ii) Bilde die reell-wertige Funktion

$$\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{f}(\vec{r}(t)) \equiv \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f} \quad (5)$$

(iii) Integriere über Definitionsbereich des Parameters:

$$\int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{f} \equiv \int_0^T dt \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f} \quad (6)$$

wird auf 'Wegelement' projiziert

Der Wert des Linienintegrals ist unabhängig von der Parametrisierung (analog zu Seite i)

Beispiel: Berechne das Linienintegral $\int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$

für Weg $\gamma: \vec{r}(t) = \vec{e}_x \overset{x(t)}{t^3} + \vec{e}_y \overset{y(t)}{2t}, \quad t \in (-1, 1)$ (1)

und Funktion $\vec{f}(\vec{r}) = \underset{f_x(\vec{r})}{y} \vec{e}_x + \underset{f_y(\vec{r})}{(-x)} \vec{e}_y$ (Windstrudel) (2)

Was heißt das explizit?

Wegparametrisierung: $\vec{r}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} t^3 \\ 2t \end{pmatrix}$ (3)

Vektorwertige Funktion: $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r} \mapsto \vec{f}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} f_x(\vec{r}) \\ f_y(\vec{r}) \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ (4)

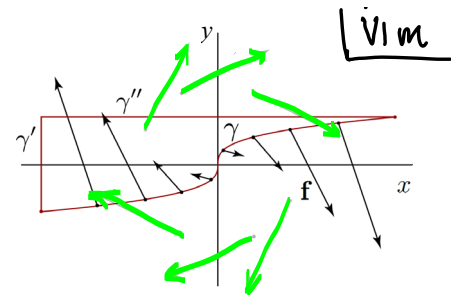
$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{=} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\vec{r}(t)) \stackrel{(4)}{=} \begin{pmatrix} y(t) \\ -x(t) \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{=} \begin{pmatrix} 2t \\ -t^3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{f}(\vec{r}(t)) \stackrel{(5)}{=} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ -t^3 \end{pmatrix} = 6t^3 - 2t^3 = 4t^3 \quad (6)$$

$$\int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \stackrel{(1,6)}{=} \int_{-1}^1 dt \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f} = \int_{-1}^1 dt 4t^3 = t^4 \Big|_{-1}^1 = 0 \quad (7)$$

Durch Windstrudel verrichtete Arbeit entlang ist $= 0$, denn Wind weht 'mal von vorne, mal von hinten'.

Arbeit entlang $\gamma' \cup \gamma''$ ist $\neq 0$



Zusammenfassung V1: Kurven

'Kurve': $\gamma = \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \}$ wobei $\vec{r}: I = (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^d$
 $t \mapsto \vec{r}(t)$

Ort entlang Kurve: $\vec{r}(t) = \vec{e}_j x_j(t)$

Kurvengeschwindigkeit: $\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{e}_j \dot{x}_j(t) = \vec{v}(t)$ liegt 'tangential' zur Kurve

Kurvenlänge: $L[\gamma] = \int_0^\tau dt \|\dot{\vec{r}}(t)\|$ unabhängig von Parametrisierung des Weges

Bogenlänge nach Zeit t: $s(t) = \int_0^t du \|\dot{\vec{r}}(u)\|$ $\gamma = \vec{r}(0, \tau)$

Natürliche Parametrisierung durch Bogenlänge: $\vec{r}_L: (0, L(\gamma)) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad s \mapsto \vec{r}_L(s) \equiv \vec{r}(t(s)), \quad \|d_s \vec{r}_L(s)\| = 1$

Für Vektorfeld: $\vec{f}: \gamma \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{r} \mapsto \vec{f}(\vec{r})$
 (vektorwertige Funktion von $\vec{r}$)

Linienintegral: $\int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{f} \equiv \int_0^\tau dt \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}$ unabhängig von Parametrisierung des Weges

