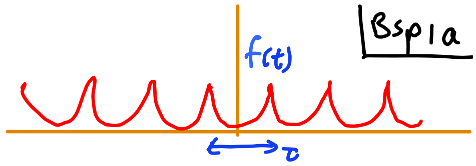
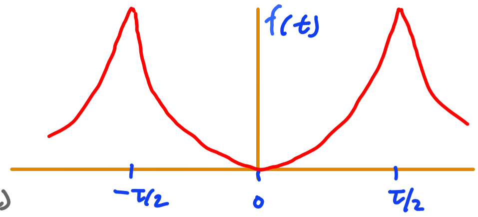
1. Fourier-Reihe

Bsp 1a





Finde Fourierkoeffizienten der periodischen Funktionen

$$f(t) = t^2 \quad \text{falls} \quad -\tau/2 < t < \tau/2 \qquad (1)$$

$$f(t) = f(t+\tau) = f(-t) \qquad (2)$$

Fourier-Reihe: $$f(t) \overset{(C6.2i.6)}{=} \frac{1}{\tau}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i\omega_n t}\,\tilde{f}_n, \qquad \omega_n = \frac{2\pi n}{\tau},\; n\in\mathbb{Z} \qquad (3)$$

$$\tilde{f}_n \overset{(C6.2i.7)}{=} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\tau\; f(t)\, e^{i\omega_n t} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\tau\; \overset{u}{t^2}\, \overset{v'}{e^{i\omega_n t}} \qquad (4)$$

Für $n \neq 0$:

$$\tilde{f}_{n\neq 0} = \overset{u}{t^2}\, \overset{v}{\frac{e^{i\omega_n t}}{i\omega_n}}\Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} \overset{-\int u'v}{-} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt\; \underbrace{2t}_{\tilde{u}}\; \underbrace{\frac{e^{i\omega_n t}}{i\omega_n}}_{\tilde{v}'} \qquad (5)$$

Bsp 1b

$$\tilde{f}_{n\neq 0} = \frac{1}{\omega_n}\left(\tau/2\right)^2 \underbrace{\frac{2}{2i}\left[e^{i\omega_n\tau/2} - e^{-i\omega_n\tau/2}\right]}_{\sin(\omega_n\tau/2) = \sin\left(\frac{2\pi n}{\tau}\cdot\tau/2\right) = \sin(n\pi) = 0} \qquad (1a)$$

$$-\frac{1}{i\omega_n}\left\{ \overset{\tilde{u}\,\tilde{v}}{2t\,\frac{e^{i\omega_n t}}{i\omega_n}}\Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} \overset{-\int \tilde{u}'\tilde{v}}{-} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt\; 2\,\frac{e^{i\omega_n t}}{i\omega_n} \right\} \qquad (1b)$$

$$= \frac{2}{\omega_n^2}\,\tau\cdot \underbrace{\frac{1}{2}\left[e^{i\omega_n\tau/2} + e^{-i\omega_n\tau/2}\right]}_{\cos\omega_n\tau/2 = \cos(n\pi) = (-1)^n \quad (2a)} - \frac{2}{\omega_n^2}\,\frac{1}{i\omega_n}\underbrace{\left[e^{i\omega_n\tau/2} - e^{-i\omega_n\tau/2}\right]}_{=0} \qquad (2b)$$

[wie (1a)]

$$\boxed{\tilde{f}_{n\neq 0} = \frac{2\tau}{(2\pi n/\tau)^2}\,(-1)^n} = \frac{\tau^3\,(-1)^n}{2\pi^2 n^2} = \boxed{\tilde{f}_{-n}} \qquad (3)$$

$$\tilde{f}_{n=0} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt\; t^2\cdot 1 = \frac{1}{3}\,t^3\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2}{3}\cdot\left(\tau/2\right)^3 = \boxed{\frac{\tau^3}{12}} \qquad (4)$$

Wie kommt man von hier zu einer trigonometrischen Fourier-Reihe? **Bsp 1c**

(cos, sin)

$$f(t) = \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n t}\,\tilde f_n \qquad \text{CPW} \qquad (1)$$

weil $\tilde f_n \overset{(1b.3)}{=} \tilde f_{-n}$

$$= \frac{1}{\tau}\tilde f_0 + \frac{1}{\tau}\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(e^{-i\omega_n t} + e^{+i\omega_n t}\right)}_{\cos\omega_n t}\frac{1}{2}\cdot 2\tilde f_n \qquad (2)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad (3)$$

$$= \boxed{\frac{\tau^2}{12} + \frac{\cancel{2}\tau^2}{\cancel{2}\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\omega_n t\,\frac{(-1)^n}{n^2}}$$

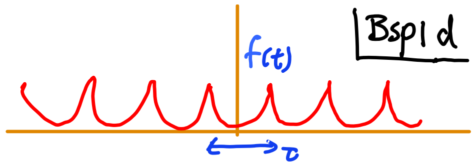
Falls f(x) symmetrisch/antisymmetrisch ist, hat man die Wahl:
Entweder cos/sin-Reihe, oder komplexe Fourier-Reihe. Die Ergebnisse sind äquivalent.
Empfehlung: nutze denjenigen Rechenweg, für den die entsprechenden Integrale leichter zu lösen sind:

$$\int dt\, e^{i\omega_n t} f(t) \sim \int dt\,\frac{1}{2}\left(e^{i\omega_n t} \pm e^{-i\omega_n t}\right) f(t) \quad \text{vs.} \quad \int dt \begin{Bmatrix}\cos\omega_n t\\ \sin\omega_n t\end{Bmatrix} f(t)$$

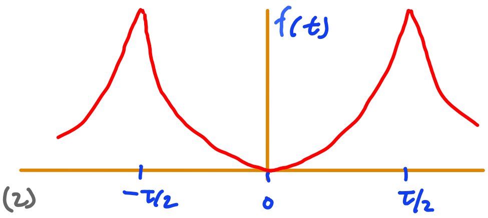
Alternativer Lösungsweg (optional): Cosinus-Reihe

Bsp 1d

(vergleiche C6.2q-4)



Finde Fourierkoeffizienten der periodischen Funktionen



$$f(t) = t^2 \quad \text{falls} \quad -\tau/2 < t < \tau/2 \qquad (1)$$

und $f(t) = f(t+\tau)$ für beliebige t. (2)

x(t) ist gerade Funktion v. t : $f(t) = f(-t)$ (3)

Fourier-Reihe enthält nur cos-Terme:

$$f(t) \overset{(C6.2q.3)}{=} \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\omega_n t + \overset{\overset{!}{=}0}{b_n}\sin\omega_n t\right] \qquad (4)$$

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\tau}, \quad n \in \mathbb{Z} \qquad (5)$$

Koeffizienten: $$a_n \overset{(C6.2q.4)}{=} 2\cdot\frac{2}{\tau}\int_{\cancel{-\tau/2}\;0}^{\tau/2} dt\, f(t)\cos\omega_n t \qquad (6)$$

denn Integrand ist symmetrisch

$\underline{n \geq 1:}$ **Bspl e**

$$a_n \overset{(1d.1)}{=} \frac{4}{\tau}\int_0^{\tau/2} dt \; \overset{u}{t^2} \; \overset{v'}{\cos\omega_n t} \qquad (1)$$

Partielle Integration :

$$\int_0^{\tau/2} dt \; \underbrace{u(t)\, v'(t)}_{= \frac{d}{dt}[u(t)v(t)] - u'(t)v(t)} = u(t)v(t)\Big|_0^{\tau/2} - \int_0^{\tau/2} dt \; u'(t)\, v(t) \qquad (2)$$

$$a_n \overset{(1),(2)}{=} \frac{4}{\tau}\left\{ \overbrace{t^2}^{u} \overbrace{\frac{1}{\omega_n}\sin(\omega_n t)}^{v} \Big|_0^{\tau/2} - \int_0^{\tau/2} dt \; \underbrace{\overbrace{2t}^{u'}}_{=\tilde{u}} \underbrace{\overbrace{\frac{1}{\omega_n}\sin(\omega_n t)}^{v}}_{\tilde{v}'} \right\} \qquad (3)$$

nochmal Part. Int.:

$$= \frac{4}{\tau}\left\{ \frac{(\tau/2)^2}{\omega_n} \underbrace{\sin(\overbrace{\omega_n \tau/2}^{\pi n})}_{=0} \overset{(1d.5)}{} - \left[\overbrace{2t}^{\tilde{u}} \overbrace{\left(-\frac{1}{\omega_n^2}\right)\cos\omega_n t}^{\tilde{v}} \Big|_0^{\tau/2} - \int_0^{\tau/2} dt \; \overbrace{2}^{\tilde{u}'} \overbrace{\left(\frac{-1}{\omega_n^2}\right)\cos\omega_n t}^{\tilde{v}} \right] \right\} \qquad (4)$$

Bspl f

$$a_n = 0 + \frac{4}{\cancel{\tau}}\left\{ + \frac{2(\tau/2)}{\omega_n^2} \underbrace{\cos(\overbrace{\omega_n \tau/2}^{\pi n})}_{(-1)^n} \overset{(1d.5)}{} + \underbrace{\left(\frac{-2}{\omega_n^2}\right)\sin\omega_n t \Big|_0^{\tau/2}}_{=0} \right\} \qquad (1)$$

$=0$ (wie bei (1d.4))

$$a_n = \frac{4}{\omega_n^2}(-1)^n \qquad \forall \; n \geq 1 \qquad (2)$$

$$\underline{n=0:} \quad a_0 = \frac{2 \cdot 2}{\tau}\int_{\cancel{-\tau/2}\;0}^{\tau/2} dt \; t^2 = \frac{4}{\tau}\,\frac{1}{3}\,t^3\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{4}{\tau}\,\frac{1}{3}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 = \frac{\tau^2}{6} \qquad (3)$$

(1f.2) & (1f.3) in (1d.4) liefert die gewünschte Fourier-Reihe:

$$\boxed{f(t) = \frac{\tau^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\omega_n^2}(-1)^n \cos\omega_n t} = (1c.3) \; ✓ \qquad (4)$$

$$= \tau^2 \cdot \frac{4}{(2\pi n)^2} = \frac{\tau^2}{\pi^2 n^2}$$

2. Iteratives Lösen einer Gleichung mittels Reihenentwicklung

CS.4f

Betrachte: $\sqrt{y(x)} = y(x) + \sin(x)$ mit $0 < x \ll 1$ (1)

Finde $y(x)$ als Funktion v. x bis Ordnung $O(x^2)$ inklusive, mit $y(0) = 1$.

d.h. bestimme die Koeffizienten der ersten drei Terme in der Taylor-Entwicklung:

$$\boxed{y(x) = y_0 + y_1 x + \frac{1}{2!} y_2 x^2 + O(x^3)} \qquad \boxed{y_n \equiv y^{(n)}(x)\big|_{x=0}} \qquad (2)$$

Strategie:

schreibe (1) als $0 = F(y(x), x) = F\left(y_0 + y_1 x + \frac{1}{2!} y_2 x^2 + O(x^3), x\right)$ (3)

entwickle F in Potenzen von x, $\equiv F_0(y_0) + F_1(y_0, y_1)\, x + F_2(y_0, y_1, y_2)\, x^2 + O(x^3)$ (4)

setze alle Koeff. gleich Null, $0 = F_0 = F_1 = F_2$ und löse iterativ nach y_0, y_1, y_2 (5)

Anmerkung: $\frac{1}{n!} F_n(y_0, \dots, y_n) = \frac{d^n}{dx^n} F(y(x), x)\Big|_{x=0}$ (6)

hängt i.A. ab von allen $y_{i \le n}$ ab und ist linear in y_n (7)

Bsp 2b

Kompaktnotation: $0 \overset{(2a.1)}{=} y^{1/2} - y - \sin x \equiv F(y(x), x)$ (1)

$(1)\big|_{x=0}$: $0 = y_0^{1/2} - y_0 - \underbrace{\sin(0)}_{=0} \equiv F_0(y_0) \Rightarrow y(0) \equiv y_0 = \boxed{1}$ (2)

$\frac{d}{dx}(1)$: $0 = \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot y^{(1)} - y^{(1)} - \cos x = \frac{d}{dx} F(y(x), x)$ (3)

$\frac{d}{dx}(1)\big|_{x=0}$: $0 = \frac{1}{2}(y_0)^{-1/2} \cdot y_1 - y_1 - \underbrace{\cos(0)}_{=1} \equiv F_1(y_0, y_1)$ (4)

(2): $y_0 = 1$: $0 \overset{(4)}{=} \frac{1}{2}(1)^{-1/2} \cdot y_1 - y_1 - 1 \Rightarrow y^{(1)}(0) \equiv y_1 = \boxed{-2}$ (5)

$\frac{d^2}{dx^2}(1) = \frac{d}{dx}(3)$: $0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y^{-3/2} (y^{(1)})^2 + \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot y^{(2)} - y^{(2)} + \sin x = \frac{d^2}{dx^2} F(y(x), x)$ (6)

$\frac{d^2}{dx^2}(1)\big|_{x=0}$: $0 = -\frac{1}{4} y_0^{-3/2} \cdot (y_1)^2 + \frac{1}{2} y_0^{-1/2} \cdot y_2 - y_2 + \sin(0) \equiv \frac{1}{2!} F_2(y_0, y_1, y_2)$ (7)

(2),(5): $y_0 = 1$, $y_1 = -2$: $0 = -\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{2} 1 \cdot y_2 - y_2 + 0 \Rightarrow y^{(2)}(0) \equiv y_2 = \boxed{-2}$ (8)

Endergebnis: $y(x) \overset{(2a.3)}{=} 1 + (-2) \cdot x + \frac{1}{2!}(-2) x^2 + O(x^3) = \boxed{1 - 2x - x^2 + O(x^3)}$ (10)

3. Iteratives Lösen einer Diff.Gleichung mittels Reihenentwicklung

Bsp 3a

Betrachte: $\dot{x}(t) = 1 + x^2(t)$ (1) Anfangsbedingung: $x_0 \equiv x(0) = 0$ (2)

[Lösung (clever geraten): $x(t) \overset{(C7k.7)}{=} \tan t \overset{(C5.2b)}{=} t + \frac{1}{3} t^3 + \mathcal{O}(t^5)$ (3)]

Alternativer Zugang, mittels Reihenentwicklung, bis $\mathcal{O}(t^3)$, inklusive: $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$, $\ddot{x}_0 = \ddot{x}(0)$, $\dddot{x}_0 = \dddot{x}(0)$ (4)

Ansatz: $x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2!}\ddot{x}_0 t^2 + \frac{1}{3!}\dddot{x}_0 t^3 + \mathcal{O}(t^4)$ (5)

$(1)\big|_{t=0}$ $\quad 0 = \dot{x}_0 - 1 - \underbrace{x_0^2}_{\overset{(2)}{=}0}$ (6) $\Rightarrow \dot{x}_0 = \boxed{1}$ (7)

$\dot{(1)}$: $\quad 0 = \ddot{x} - 2x\dot{x}$ (8)

$\dot{(1)}\big|_{t=0}$: $\quad 0 = \ddot{x}_0 - 2\underbrace{x_0}_{\overset{(2)}{=}0}\dot{x}_0$ (9) $\Rightarrow \ddot{x}_0 = \boxed{0}$ (10)

$\ddot{(1)} = \dot{(8)}$: $\quad \dddot{x} = 2\dot{x}\dot{x} + 2x\ddot{x}$ (11)

$\ddot{(1)}\big|_{t=0}$ $\quad \dddot{x}_0 = 2(\dot{x}_0)^2 + 2\overset{0}{\overset{\|}{x_0}}\ddot{x}_0$ (12) $\Rightarrow \dddot{x}_0 = \boxed{2}$ (13)

Endergebnis: $x(t) \overset{(5)}{=} 0 + 1\cdot t + \frac{1}{2!}0\cdot t^2 + \frac{1}{3!}2\cdot t^3 + \mathcal{O}(t^4) = \boxed{t + \frac{1}{3}t^3 + \mathcal{O}(t^4)} \checkmark = (3)$

---

4. Beispiel: Lineare Inhomogene Diff-Gl mit zeitabhängigen Vorfaktoren

Bsp 4a

Löse $\dot{x}(t) - \gamma\cos(\omega t)\cdot x(t) = v\cos(\Omega t)\, e^{\gamma/\omega \sin(\omega t)}$ (1)

mit $x(0) = x_0$

4(a) Homogene Gleichung: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = \gamma\cos(\omega t)\cdot x(t)$ (2)

Trennung d. Variablen:
(siehe Seite C7.2a-b)

$$\int_{x_0}^{x}\frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}} = \int_{t_0=0}^{t} d\tilde{t}\,\gamma\cos(\omega\tilde{t}) \quad (3)$$

$$\ln x/x_0 = \ln x - \ln x_0 = \frac{\gamma}{\omega}\big(\sin(\omega t) - \underbrace{\sin(0)}_{=0}\big) \quad (4)$$

Homogene Lösung: $\boxed{x_h(t) = x_0\, e^{\frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega t)}}$ (5)

Check: $\dot{x}(t) \overset{(5)}{=} x_0\, e^{\frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega t)} \cdot \frac{\gamma}{\omega}\cdot\omega\cdot\cos\omega t = x(t)\cdot\gamma(\cos\omega t)$ (6)

$= (2) \checkmark$

4(b) Partikuläre Lösung

Bsp 4b

Linke Seite v. (4a.1) ist linear in x, also benutze Variation d. Konstanten:

Methode der Variation der Konstanten (siehe C7.3c)

Angenommen, Lösung der homogenen Gleichung ist bekannt: $\dot{x}_h = a(t)\, x_h$ (1)

Gesucht: partikuläre Lösung der inhomogenen DGL: $\dot{x}_p - a(t)\, x_p = b(t)$ (2)

Ansatz: $x_p(t) = c(t)\, x_h(t)$ (der Vorfaktor c, normalerweise konstant, sei nun t-abhängig, d.h. 'variabel') (3)

(3) eingesetzt in die inhomogene DGL (2):

$$\frac{d}{dt}\left[c(t)\, x_h(t)\right] - a(t)\left[c(t)\, x_h(t)\right] = b(t) \qquad (4)$$

Produktregel:

$$\dot{c}(t)\, x_h(t) + \underbrace{c(t)\, \dot{x}_h(t) - c(t)\, a(t)\, x_h(t)}_{\overset{(1)}{=}0} = b(t) \qquad (5)$$

Wir erhalten DGL für $c(t)$:

$$\dot{c}(t) = \frac{b(t)}{x_h(t)} \qquad (6)$$

Elementar zu lösen:

mit $c(t_0) = 0$

$$\boxed{c(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, \frac{b(\tilde{t})}{x_h(\tilde{t})}} \qquad (7)$$

⇐ kann und sollte man sich merken!

Bsp 4c

Für unser Beispiel: Inhomogenität $b(t) = v_0 \cos(\Omega t)\, e^{\gamma/\omega \sin(\omega t)}$ (1)

$$c(t) \overset{(4b.7)}{=} \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, \frac{b(\tilde{t})}{x_h(\tilde{t})} = \int_{0}^{t} d\tilde{t}\, \frac{v \cos(\Omega \tilde{t})\, \cancel{e^{\gamma/\omega \sin(\omega \tilde{t})}}}{\underset{(4a.5):}{x_0\, \cancel{e^{\frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega t)}}}} \qquad (2)$$

$$= \frac{1}{x_0}\frac{v}{\Omega}\sin(\Omega t) \qquad (3)$$

Partikuläre Lösung:
(3) in (4b.3):

$$x_p(t) = c(t) \cdot x_h(t) \qquad (4)$$

$$= \boxed{\overset{(3)}{e^{\frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega t)}} \cdot \overset{(4b.3)}{\frac{v}{\Omega}\sin(\Omega t)}} \qquad (5)$$

Check, ob (5) die Gl. (4a.1) erfüllt? einsetzen!

$$\dot{x}_p(t) - \gamma \cos(\omega t) \cdot x_p(t)$$

$$= \Big(\underbrace{\tfrac{\gamma}{\omega} \cdot \omega \cos \omega t - \cancel{\gamma \cos(\omega t)}}_{=0\ ✓}\Big)\, x_p(t) + e^{\frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega t)} \cdot v \cos(\Omega t) \qquad (6)$$

$$= (4a.1)\ ✓$$

5. Satz v. Stokes - Anwendung: Fluss eines Magnetfelds durch gekrümmte Fläche

Bsp5a

Eine d. Maxwell-Gleichungen besagt, dass Magnetfeld quellfrei ist:

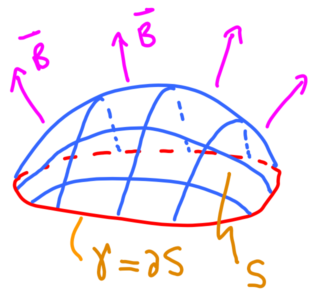
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \qquad (1)$$

Folglich lässt es sich als Rotation eines 'Vektorpotentials', $\vec{A}(\vec{r},t)$ ausdrücken:

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t) \qquad (2)$$

(denn $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \overset{(V3.6b.7)}{=} 0$)

Folglich lässt sich jedes Flussintegral des Magnetfelds mittels Stokes als Linienintegral des Vektorpotentials ausdrücken:



Flächenelement, Vektorpotential, Stokes, Fläche

$$\boxed{\int_S d\vec{S} \cdot \vec{B} \overset{(2)}{=} \int_S d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \oint_{\gamma = \partial S} d\vec{r} \cdot \vec{A}} \qquad (3)$$

Bsp5b

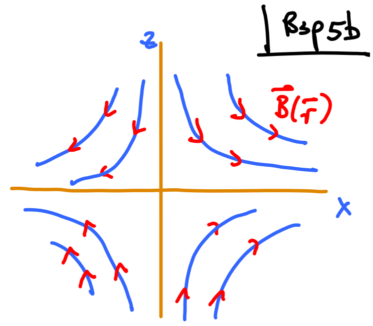
Betrachte nun das Magnetfeld eines 'magnetischen Quadrupol':

$$\vec{B} = c \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(rotationssymmetrisch um z-Achse) $(c \equiv 1)$

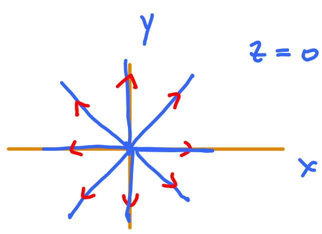
kann ausgedrückt werden durch folgendes Vektorpotential:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$



<u>Check:</u>

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A^z - \partial_z A^y \\ \partial_z A^x - \partial_x A^z \\ \partial_x A^y - \partial_y A^x \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} (1) \qquad (3)$$



<u>Aufgabe:</u> Berechne den nach oben gerichteten Fluss des Magnetfelds durch zwei Flächen mit demselben kreisförmigen Rand: (Vergleich: V3.6n-p)

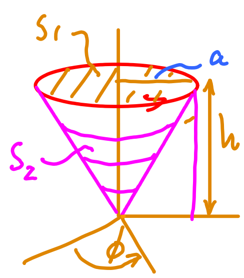
$\rho^2 = x^2 + y^2 = a^2 \quad , \quad z = h :$

Rand: $\gamma = \left\{ \vec{r}(\phi) = \begin{pmatrix} a\cos\phi \\ a\sin\phi \\ h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ 0 \le \phi \le 2\pi \right\}$ (4)

Kreisfläche: S_1

Kegelmantel: S_2

$$\gamma = \partial S_1 = \partial S_2$$



Wegen Zylindersymmetrie der Flächen, arbeite in Zylinderkoordinaten: Bsp 5c

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\rho = \frac{\partial_\rho \vec{r}}{\|\partial_\rho \vec{r}\|} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \frac{\partial_\phi \vec{r}}{\|\partial_\phi \vec{r}\|} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$= \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z \quad (1')$$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ -2z \end{bmatrix} = \boxed{\vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z(-2z)} = \vec{e}_\rho B^\rho + \vec{e}_\phi B^\phi + \vec{e}_z B^z \quad (2)$$

$$B^\rho = \rho, \quad B^\phi = 0, \quad B^z = -2z \quad (3)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ 0 \end{pmatrix} = \rho z \begin{pmatrix} \sin\phi \\ -\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\vec{e}_\phi(-\rho z)} = \vec{e}_\rho A^\rho + \vec{e}_\phi A^\phi + \vec{e}_z A^z \quad (4)$$

$$A^\rho = 0, \quad A^\phi = -\rho z, \quad A^z = 0 \quad (5)$$

Check:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{e}_\rho\left[\frac{1}{\rho}\partial_\phi \overset{0}{A^z} - \partial_z \overset{(-\rho z)}{A^\phi}\right] + \vec{e}_\phi\left(\partial_z \overset{0}{A^\rho} - \partial_\rho \overset{0}{A^z}\right) + \vec{e}_z \frac{1}{\rho}\left[\partial_\rho(\rho \overset{(-\rho z)}{A^\phi}) - \partial_\phi \overset{0}{A^\rho}\right] \quad (6)$$

$$\overset{(5)}{=} \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z \frac{1}{\rho}\underbrace{\partial_\rho(-\rho^2 z)}_{-2\rho z} = \boxed{\vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z(-2z)} \overset{\checkmark}{\underset{(2)}{=}} \vec{B}$$

5(a) Lösung mittels Stokes Bsp 5d

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &\equiv \int_{S_1} d\vec{S}\cdot\vec{B} \\ \Phi_2 &\equiv \int_{S_2} d\vec{S}\cdot\vec{B} \end{aligned}\right\} \underset{(5a.3)}{\overset{\text{Stokes}}{=}} \oint_\gamma d\vec{r}\cdot\vec{A} \equiv \Phi \quad (1)$$

Allgemeine Definition von Linienintegral:
gegeben eine Parametrisierung

$$\{\vec{r} = \vec{r}(\phi),\ \phi\in[\phi_0,\phi_1]\} \quad (2)$$

$$\int_\gamma d\vec{r}\cdot\vec{A} = \int_{\phi_0}^{\phi_1} d\phi\ \frac{d\vec{r}}{d\phi}\cdot\vec{A}(\vec{r}(\phi)) \quad (3)$$

Parametrisierung: $\vec{r} = \vec{r}(\phi) \underset{(c.1')}{=} \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z$

Im aktuellen Fall, für $\gamma =$ (5a.4):

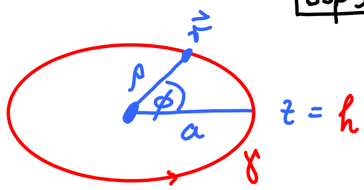
$$\left.\frac{d}{d\phi}\vec{r}(\phi)\right|_\gamma \overset{(5c.1)}{=} \left.\vec{e}_\phi \rho\right|_\gamma \overset{(5b.4)}{=} \vec{e}_\phi a \quad \text{denn} \quad \frac{d\vec{e}_\rho}{d\phi} \overset{(5c.1)}{=} \vec{e}_\phi \quad (4)$$

$$\left.\vec{A}(\vec{r})\right|_\gamma \overset{(5c.4)}{=} \left.\vec{e}_\phi(-\rho z)\right|_\gamma = \vec{e}_\phi(-ah) \quad (5)$$

$$\Phi = \oint_\gamma d\vec{r}\cdot\vec{A} \overset{(3)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi\ (\vec{e}_\phi a)\cdot(\vec{e}_\phi(-ah)) = \boxed{-2\pi a^2 h} \quad (6)$$

5(b) Flussintegral über Kreisfläche S_1

Bsp 5e



$$\Phi_1 \overset{(5d.1)}{=} \int_{S_1} d\vec S \cdot \vec B \qquad (1)$$

Kreisfläche: $S_1 = \{ \vec r(\rho,\phi,h) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \in (0,a),\ \phi \in (0,2\pi) \}$ (2)

Flächenelement: $$d\vec S = d\rho\, d\phi\, \underbrace{\rho\, \vec e_z}_{\overset{(5c.1)}{=}(\partial_\rho \vec r \times \partial_\phi \vec r)} \qquad (3)$$

$$B_z = \vec e_z \cdot \vec B = \vec e_z \cdot (\rho\, \vec e_\rho - 2z\, \vec e_z) \overset{(5c.2,3)}{=} -2z \qquad (4)$$

$$d\vec S \cdot \vec B \big|_{S_1} = d\rho\, d\phi \cdot \rho(-2h) \qquad (5)$$

$$\Phi_1 = \int_{S_1} d\vec S \cdot \vec B \overset{(1,5)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho\, \rho \cdot (-2h) = 2\pi \cdot \tfrac{1}{2} a^2 \cdot (-2h) = \boxed{-2\pi a^2 h}$$

$= (5d.6)$

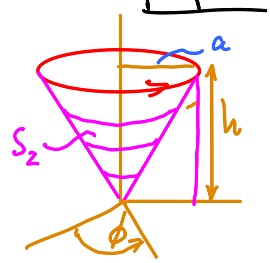
5(b) Flussintegral über Kegelmantel

Bsp 5f

Kegelmantel:

$$S_2 = \left\{ \vec r(\rho,\phi,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho = \frac{za}{h},\ \phi \in (0,2\pi),\ z \in (0,h) \right\} \qquad (1)$$

$$\vec r(\phi,z) \overset{(5c.1')}{=} \left(\vec e_\rho \rho + \vec e_z z\right)\Big|_{S_2} = \boxed{\vec e_\rho \frac{za}{h} + \vec e_z z} \qquad (2)$$



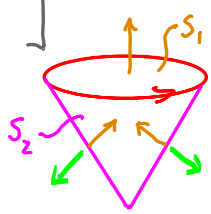
Flächenelement:

S_2 und S_1 müssen dieselbe Orientierung haben, also muss $d\vec S$ 'nach innen' zeigen.

$$d\vec S = -d\phi\, dz\, \left(\partial_\phi \vec r \times \partial_z \vec r\right)\Big|_{S_2} \qquad (3)$$

$$= -d\phi\, dz \left(\vec e_\phi \frac{za}{h}\right) \times \left(\vec e_\rho \frac{a}{h} + \vec e_z\right) = \boxed{-d\phi\, dz\, \frac{za}{h}\left(-\vec e_z \frac{a}{h} + \vec e_\rho\right)} \qquad (4)$$

zeigt 'nach aussen'
also brauchen wir ein zusätzliches (-1)



$$\vec B\Big|_{S_2} \overset{(5c.2,3)}{=} \left(\vec e_\rho \rho + \vec e_z(-2z)\right)\Big|_{S_2} = \vec e_\rho \frac{za}{h} + \vec e_z(-2z) \qquad (5)$$

$$d\vec S \cdot \vec B\Big|_{S_2} \overset{(4,5)}{=} -d\phi\, dz\, \frac{za}{h}\left(-\vec e_z \frac{a}{h} + \vec e_\rho\right) \cdot \left(\vec e_\rho \frac{za}{h} + \vec e_z(-2z)\right) = -d\phi\, dz\, \frac{za}{h}\left(\frac{2za}{h} + \frac{za}{h}\right) \qquad (6)$$

$$\Phi_2 = \int_{S_2} d\vec S \cdot \vec B \overset{(6)}{=} -\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz\, 3z^2 \frac{a^2}{h^2} = \boxed{-2\pi a^2 h} \qquad (7)$$

$= (5d.6) = (5e.6)$ ✓