

C7.5 Differentialgleichungen 1. Ordnung - Allgemeine Aussagen

C7.5a

System von n gewöhnlichen DG 1. Ordnung hat die allgemeine Form:

$$\dot{x}^1 = f^1(x^1, x^2, \dots, x^n, t) \quad (1)$$

$$\dot{x}^2 = f^2(x^1, x^2, \dots, x^n, t) \quad (2)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\dot{x}^n = f^n(x^1, x^2, \dots, x^n, t) \quad (3)$$

Anfangsbedingung: $x^i(t_0) = x_0^i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$

Gesuchte Lösung: $x^i(t) \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$

Kompaktnotation:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (6)$$

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (7)$$

$$\vec{x}(t) \quad (8)$$

Gleichungen dieser Art beschreiben die Zeitentwicklung eines multi-Komponenten-Systems (z.B. Koordinaten oder Impulse eines mechanischen Systems; Konzentration von chemischen Komponenten; Aktienwerte von Firmen) in Reaktion auf Mechanismen, die die Zeitentwicklung bedingen (z.B. verallgemeinerte Kräfte; chemische Reaktionen; ökonomische Entwicklungen). Kopplung der Gleichungen beschreibt die Wechselwirkungen der Komponenten miteinander.

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen einer DGL?

7.5b

Ist in der Physik immer gewährleistet, falls Problem physikalisch sinnvoll gestellt ist!



Mathematisch gibt es für gewöhnliche DG erster Ordnung mehrere denkbare Möglichkeiten (abhängend von der Form der Gleichung, d.h. der Form von $\vec{f}(\vec{x}, t)$):

- | | |
|---|---|
| - es gibt gar keine Lösung, | die die angegebene Anfangsbedingung erfüllt |
| - es gibt eine und genau eine Lösung, ('eine eindeutige') | „ „ „ „ |
| - es gibt mehrere Lösungen, | „ „ „ erfüllen |

- oder: es gibt zwar eine Lösung, aber nur in einer hinreichend kleinen Umgebung des Anfangszeit t_0 ('lokale Existenz')

- oder: es existiert eine Lösung für alle $t \in I$ ('globale' Lösung)

Theorie der Existenz v. Lösungen einer gegebenen DG ist i.A. ein schwieriges mathematisches Problem!

Satz (Picard & Lindelöf): (siehe C7.2)

C7.5c

Falls $\vec{f}(\vec{x}, t)$ Lipschitz-stetig in \vec{x} und stetig differenzierbar in t

(1)

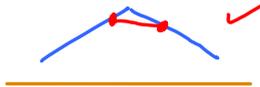
ist, existiert eindeutig eine lokale Lösung des Anfangswertproblems.

'Stetig differenzierbar': Ableitung ist stetig, d.h., Funktion hat 'keine Zacken':



'Lipschitz-stetig': Steigung zwischen zwei beliebigen Punkte auf der Kurve ist begrenzt, d.h., Funktion hat 'keine Sprünge':

Steigung endlich:



Steigung unendlich:



Bemerkungen zur physikalischen Anwendung:

(i) Der Satz gewährleistet Determinismus a la Newton: Spezifikation von Anfangsort und - Geschwindigkeit [in Gl. (c.1), (c.2)] legt weitere Bewegung eindeutig fest!

(ii) Allgemeiner: DG sind für sinnvolle Beschreibung physikalischer Prozesse geeignet.

Warum ist Lipschitz-Stetigkeit nötig? Intuitive Begründung (für n=1)

C7.5d

(siehe Altland-Delft, C7.2)

$$x : I \rightarrow M \subset \mathbb{R} \quad t \mapsto x(t) \quad (1)$$

$$f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) \quad (2)$$

DG: $\dot{x} = f(x(t)) \quad (3)$

Diskrete Näherung: $\frac{x(t+\delta) - x(t)}{\delta} \stackrel{(3)}{\approx} f(x(t)) \quad (4)$

gilt nur, falls $f(x(t))$ sich nicht zu abrupt ändert im Intervall $(t, t+\delta)$

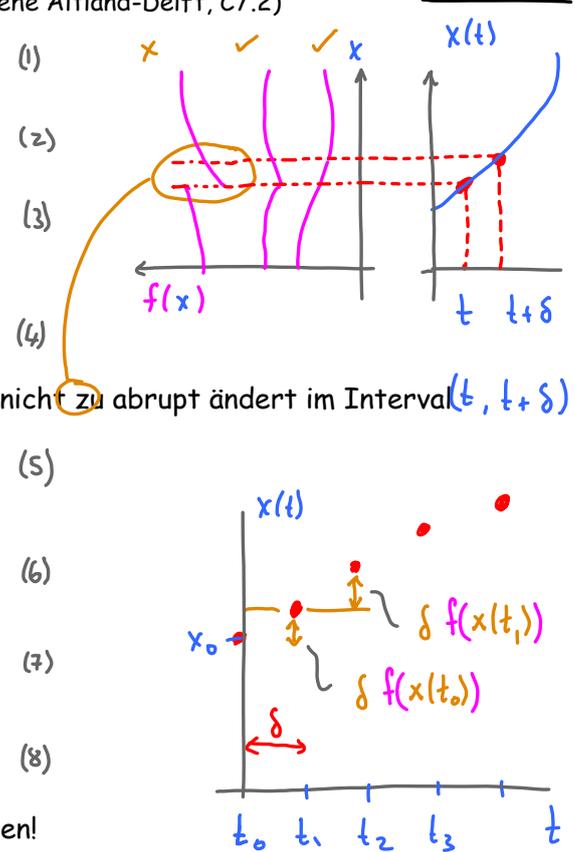
$$x(t+\delta) \stackrel{(4)}{=} x(t) + \delta f(x(t)) \quad (5)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (6)$$

$$x(t_1) \stackrel{(5)}{=} x(t_0) + \delta f(x(t_0)) \quad (7)$$

$$x(t_2) \stackrel{(5)}{=} x(t_1) + \delta f(x(t_1)) \quad (8)$$

usw. So lässt sich die Lösung in kleinen Schritten aufbauen!



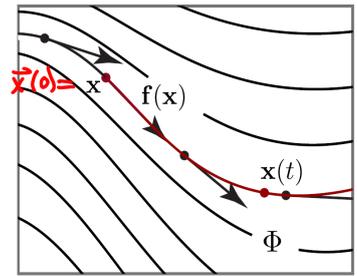
C7.6 Trajektorien, Fluss einer Differentialgleichung

C7.6a

Gegeben: eine Funktion $\vec{f}: M \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n, \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x})$

und System von DG 1. Ordnung: $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}(t))$ (1)

Für gegebenen Anfangspunkt \vec{x} sei $\vec{x}(t)$ eine Lösung der DG, mit Anfangspunkt $\vec{x}(0) \equiv \vec{x}$, (2)



Diese Lösung wird auch als 'Trajektorie' der DG bezeichnet.

Die Kombination aller möglichen Trajektorien bildet den 'Fluss' der DG:

Fluss: $\vec{\Phi}: I \times M \rightarrow M, (t, \vec{x}) \mapsto \vec{x}(t) \equiv \vec{\Phi}_t(\vec{x})$ (3)

↑ Punkt auf Trajektorie zum Zeitpunkt t
 ↑ Anfangspunkt der Trajektorie
 ↑ Zeitpunkt entlang Trajektorie

Der Punkt $\vec{x}(t)$ ist Endpunkt einer Trajektorie von Dauer t mit Anfangspunkt \vec{x} (5)

Der Punkt $\vec{x}(s+t)$ ist Endpunkt einer Trajektorie von Dauer s mit Anfangspunkt $\vec{x}(t)$ (6)

aber auch Endpunkt einer Trajektorie von Dauer $s+t$ mit Anfangspunkt \vec{x} (7)

Kompositionsregel: $\vec{\Phi}_{s+t}(\vec{x}) \stackrel{(5,3)}{=} \vec{x}(s+t) \stackrel{(6)}{=} \vec{\Phi}_s(\vec{x}(t)) \stackrel{(3,7)}{=} \vec{\Phi}_s(\vec{\Phi}_t(\vec{x}))$ (8)

Autonome DGL in zwei Dimensionen: wie findet man den 'Fluss' der DG?

C7.6b

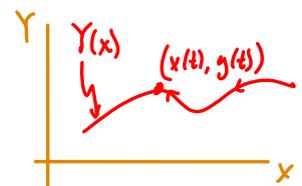
↳ keine explizite Zeitabhängigkeit

Betrachte DGL mit stetig differenzierbaren $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

'Autonom': rechte Seite $\dot{x} = f(x, y)$ (1)

ist zeitunabhängig: $\dot{y} = g(x, y)$ (2)

Gesucht sind Lösungen $x(t), y(t)$ (3)



Direkte Lösung ist oft schwierig. Trick: Überführung in 1-dimensionale DGL!

Interpretiere die gesuchte Lösung als eine durch x parametrisierte Bahnkurve; entlang dieser ist $y(t)$ eine von $x(t)$ abhängige Variable: $y(t) = Y(x(t))$ (4)

$\dot{y}(t) \stackrel{(4)}{=} \frac{d}{dt} Y(x(t)) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{d}{dx} Y(x(t)) \cdot \frac{\dot{x}}{dt}$ (5)

Wir erhalten eine 1-dimensionale DGL für die 'Bahnkurve': $Y(x)$

$\frac{dY}{dx} \stackrel{(5)}{=} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \stackrel{(1,2)}{=} \frac{g(x, Y)}{f(x, Y)}$ (6)

Man merke sich (5) mit der Eselsbrücke: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx}$ (7)

Beispiel 1: Newton 2:

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p \quad (1) \quad (m = \text{Masse}, p = \text{Impuls})$$

C7.6c

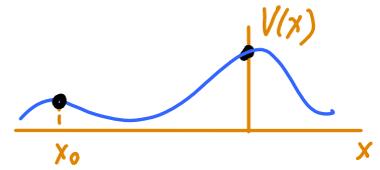
$$X \leftrightarrow x$$

$$y \leftrightarrow p$$

$$\dot{p} = F(x) = -V'(x) \quad (2) \quad (= \text{konservatives Kraftfeld})$$

$\uparrow \sim \frac{d}{dx} V(x)$

Fragestellung: lässt sich $p(x)$ ermitteln, ohne das DG-System vollständig zu lösen, d.h. ohne die $x(t)$ und $p(t)$ zu finden?

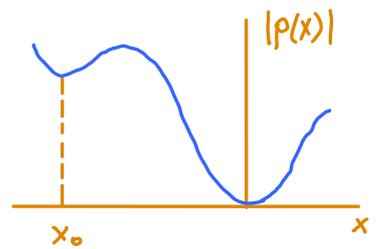


Entlang Bahnkurve sei $p(t) \stackrel{(b.4)}{=} P(x(t)) \quad (3)$

DGL (b.7) für Bahnkurve:

$$\frac{dP(x)}{dx} = \frac{\dot{p}}{\dot{x}} \stackrel{(1,2)}{=} \frac{-V'(x)}{P/m} \quad (4)$$

Eselsbrücke (b.7)!



Trennen der Variablen:

$$\int_{p_0}^p d\tilde{P} \cdot \tilde{P}/m = - \int_{x_0}^x d\tilde{x} V'(\tilde{x}) \quad (5)$$

Integrieren:

$$\frac{1}{2m}(p^2 - p_0^2) = -V(x) + V(x_0) \quad (6)$$

Fazit:

Energie-Erhaltung!

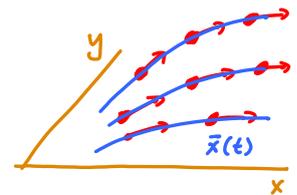
$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{p_0^2}{2m} + V(x_0) \equiv E_0 \quad (7)$$

Beispiel 2: Feldlinien in 2 Dimensionen

C7.6d

$\vec{E}(\vec{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei ein Vektorfeld. Zeichne die Feldlinien!

Strategie: Finde Raumkurve $\vec{x}(t)$ mit $\dot{\vec{x}} \parallel \vec{E}(\vec{x}(t)) \quad (1)$

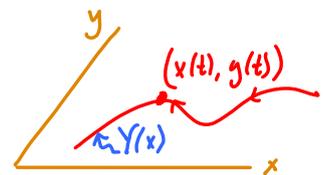


Dann ist Vektorfeld tangential an Raumkurve

(verschiedene Anfangsbedingungen liefern verschiedene Raumkurven)

In 2d: $\dot{x}(t) \stackrel{(1)}{\propto} E_x(x(t), y(t)) \quad (2)$

$$\dot{y}(t) \stackrel{(1)}{\propto} E_y(x(t), y(t)) \quad (3)$$



Feldlinie: $Y = Y(x) \quad (4)$

DGL für Feldlinie: $\frac{dY}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{E_y(x, Y)}{E_x(x, Y)} \quad (5)$

Eselsbrücke (b.7)!

Beispiel: $\bar{E}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ $y = Y(x)$ C7.6e
(1)

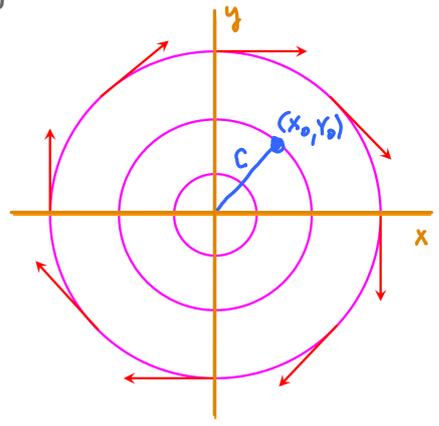
DGL für Feldlinie: $\frac{dY}{dx} \stackrel{(d.5)}{=} \frac{E_y(x, Y)}{E_x(x, Y)} \stackrel{(1)}{=} \frac{-x}{Y}$ (2)

Trennen, Integrieren: $\int_{Y_0}^Y d\tilde{Y} \tilde{Y} \stackrel{(2)}{=} - \int_{x_0}^x d\tilde{x} \tilde{x}$ (3)

$\frac{1}{2}(Y^2 - Y_0^2) = -\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)$ (4)

Umgestellt: $y^2 + x^2 = y_0^2 + x_0^2$ (5)

$= C^2$
Konstante unabhängig von x und y (6)



Feldlinien bilden Kreise!

Qualitatives Verhalten von Lösungen von DGL

C7.6f

Betrachte die 'autonome' DGL: $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ (1)
keine explizite Zeitabhängigkeit $\bar{f}(\bar{x}, X)$

Vektorfeld:
 $\bar{F}(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Frage: wie verhalten sich Lösungen für lange Zeiten, $t \rightarrow \infty$?

Antwort: es gibt drei typische Szenarien:

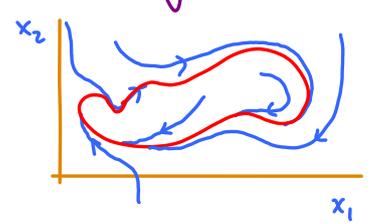
1) Fixpunkte:

Bewegung kommt zum Stillstand



2) Grenzyklen (für Dimension $n \geq 2$)

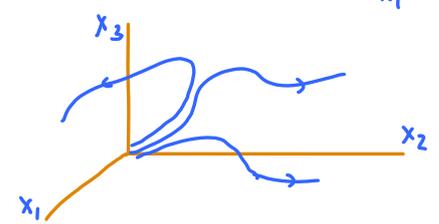
Eine geschlossene Trajektorie, zu der alle Trajektorien in ihrer Nähe hinlaufen ('stabiler GZ') von der " " " " " weglafen ('instabiler GZ')



3) Chaos (für Dimension $n \geq 3$)

Sensitivität auf Anfangsbedingungen: infinitesimale Änderung führt zu komplett anderem Langzeitverhalten.

[Beispiel: Lorenz-Attraktor]



Beispiel (nur zur Kenntnissnahme): 'Lorenz-Attraktor'

(siehe Altland-Delft, C7.6)

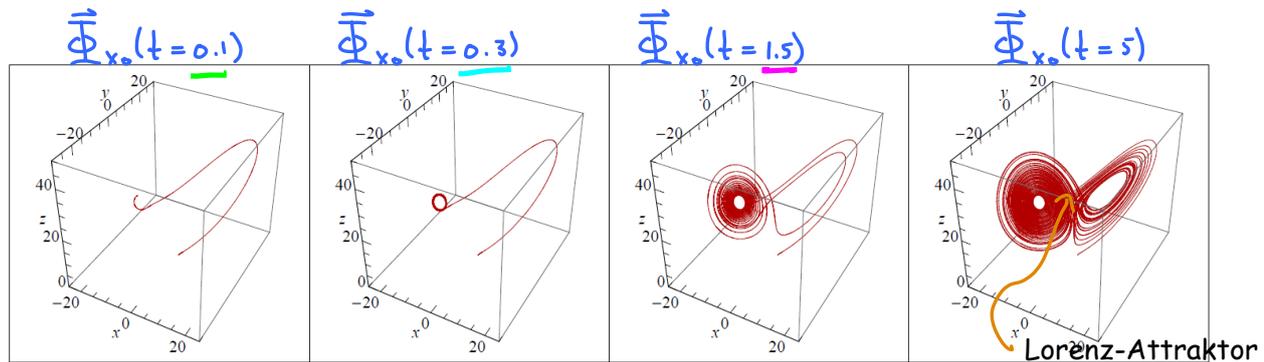
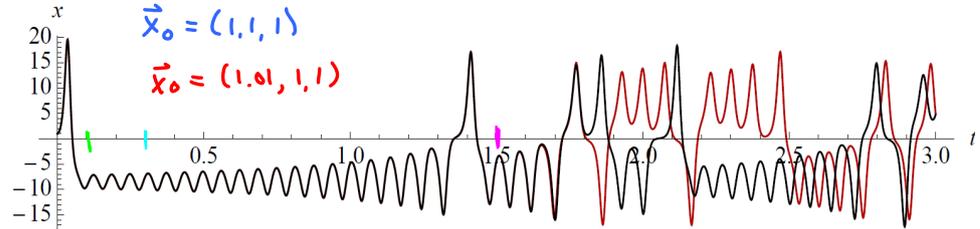
C7.6g

Lorenz-Modell für Konvektionsphänomene in der Atmosphäre.

$$\dot{x} = \sigma(y-x), \quad \dot{y} = x(\rho-z) - y, \quad \dot{z} = xy - \beta z$$

$\sigma, \rho, \beta \in \mathbb{R}$ sind Konstanten

Abhängigkeit von Anfangsbedingungen:



7.7 Fixpunkte, Linearisierung von Differentialgleichungen

C7.7a

Betrachte die 'autonome' DGL:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \tag{1}$$

Sei \vec{x}^* eine Nullstelle von $\vec{f}(\vec{x})$, also

$$\vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{0} \tag{2}$$

Dann ist eine offensichtliche

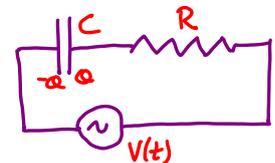
Lösung der DGL (1):

$$\vec{x}(t) = \vec{x}^* = \text{konstant} = \text{'Fixpunkt des Flusses'} \tag{3}$$

Beispiel: RC-Schaltkreis mit konstanter Spannung: (siehe C7.3e-g)

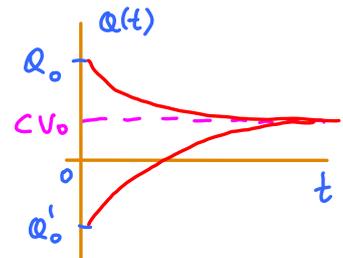
(C7.4e.4) mit $V(t) = V_0 = \text{konstant}$

$$\dot{Q} = \frac{V_0}{R} - \frac{1}{\tau} Q(t), \quad \tau = RC \tag{4}$$



Explizite Lösung bereits bekannt:

$$Q(t) = (Q_0 - CV_0) e^{-t/\tau} + CV_0 \tag{5}$$



Langzeitlimes:

$$Q(t \rightarrow \infty) = CV_0 \tag{6}$$

Wird exponentiell schnell erreicht, mit Zeitkonstante

$$\tau = RC \tag{7}$$

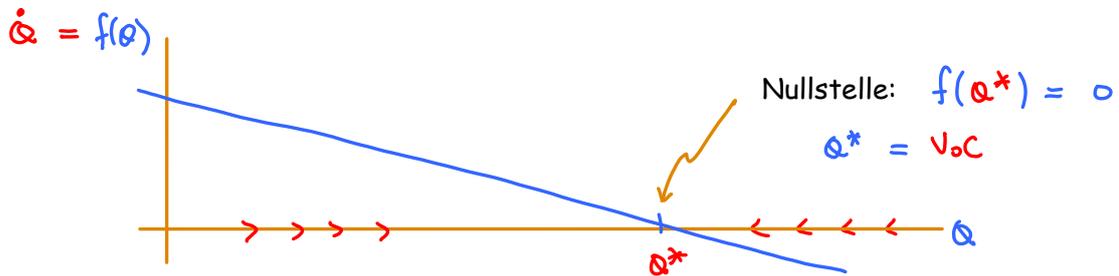
Das Langzeitverhalten ist 'stabil': Änderung der Anfangsbedingung irrelevant; und Änderung der Parameter ändert Langzeitlimes nicht qualitativ (nur quantitativ).

Geometrische Lösung:

C7.7b

Schreibe $\dot{Q}(t) \stackrel{(a.u.)}{=} \frac{V_0}{R} - \frac{1}{RC} Q(t) \equiv f(Q(t))$ (1)

mit $f(Q) = \frac{V_0}{R} - \frac{1}{RC} Q$ (2)



Für $Q < Q^*$: $\dot{Q} = f(Q) > 0 \Rightarrow Q$ nimmt zu (3)

Für $Q > Q^*$: $\dot{Q} = f(Q) < 0 \Rightarrow Q$ nimmt ab (4)

[Pfeile deuten an, wie sich $Q(t)$ mit zunehmender Zeit ändert.]

Offensichtlich läuft $Q(t)$ immer auf Q^* zu, unabhängig von Anfangsbedingung! (5)

\Rightarrow Q^* ist ein 'stabiler Fixpunkt' des Systems

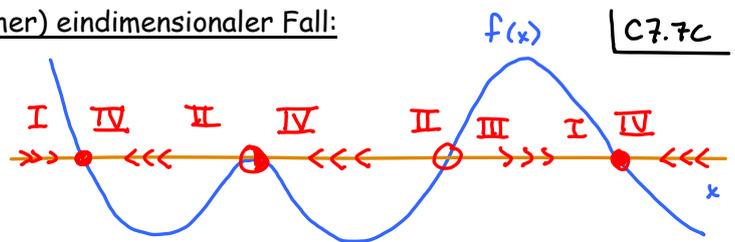
Allgemeiner generischer (= nichtpathologischer) eindimensionaler Fall:

C7.7c

DG: $\dot{x} = f(x)$ (1)

Fixpunkte: $f(x^*) = 0$ (2)

stabil: ● instabil: ○ halbstabil: ◐



Links von x^* : für $\dot{x} = f(x^* - \varepsilon)$ $\begin{cases} > 0 \text{ wächst } x(t), \text{ fließt zu } x^* \text{ hin} \Rightarrow \text{stabil} & \text{(I)} \\ < 0 \text{ nimmt } x(t) \text{ ab, fließt von } x^* \text{ weg} \Rightarrow \text{instabil} & \text{(II)} \end{cases}$

Rechts von x^* : für $\dot{x} = f(x^* + \varepsilon)$ $\begin{cases} > 0 \text{ wächst } x(t), \text{ fließt von } x^* \text{ weg} \Rightarrow \text{instabil} & \text{(III)} \\ < 0 \text{ nimmt } x(t) \text{ ab, fließt zu } x^* \text{ hin} \Rightarrow \text{stabil} & \text{(IV)} \end{cases}$

Falls $f'(x^*) < 0$: stabil, $f'(x^*) > 0$: instabil (3)

Leichtes 'wackeln' an $f(x)$ ändert nicht viel am qualitativen Langzeitverhalten.

(Wie muss $f(x)$ beschaffen sein, damit das Langzeitverhalten sensitiv auf 'wackeln' ist? Theorie der 'Bifurkationen'.)

Qualitative Folgerungen für eindimensionalen Fall:

- monotone Annäherung an Fixpunkt (oder Weglaufen ins Unendliche):
- keine unendlich sich wiederholenden Oszillationen, - kein Chaos

$t \rightarrow \infty, x \rightarrow x^*$

Allgemeine Lösung:
Summe über Eigenmoden:

$$\vec{\eta}(t) \stackrel{(C7.4d.4)}{=} \sum_j \vec{v}_j e^{\lambda_j t} c_j^j \quad (1) \quad \boxed{C7.7f}$$

Dabei sind:

$$\lambda_j = \text{Eigenwerte der Matrix } A, \text{ mit } A_{ij} = \frac{\partial^2 f^i(x^*)}{\partial x_j^2} \quad (2)$$

$$\vec{v}_j = \text{Eigenvektoren} \quad (3)$$

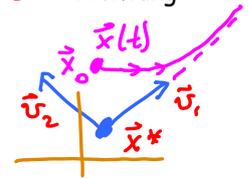
Um generisches Verhalten zu untersuchen, sollten alle

$$c_j^j \neq 0 \text{ sein.} \quad (4)$$

Falls $\text{Re}(\lambda_j) \begin{cases} > 0 & \text{dann wächst} \\ < 0 & \text{dann schrumpft} \end{cases}$ der Beitrag von $\vec{v}_j \Rightarrow \begin{cases} \text{instabile Richtung} \\ \text{stabile Richtung} \end{cases}$ (5)

Z.B.: Falls

$$\left. \begin{matrix} \text{Re}(\lambda_1) > 0 \\ \text{Re}(\lambda_2) < 0 \end{matrix} \right\} \text{ dann } \vec{x}(t \rightarrow \infty) \approx c_1^1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \underbrace{c_2^2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}}_{t \rightarrow \infty \rightarrow 0}$$



Charakteristische Zeitskalen

$$\tau_j = \frac{1}{|\text{Re}(\lambda_j)|}$$

(1) \Rightarrow

$$\vec{\eta}(t) \rightarrow \vec{0}$$

nur falls alle Richtungen stabil sind,
d.h. nur falls für alle Eigenwerte gilt:

$$\text{Re}(\lambda_j) < 0 \quad (6)$$

(dann ist A 'negativ definit')

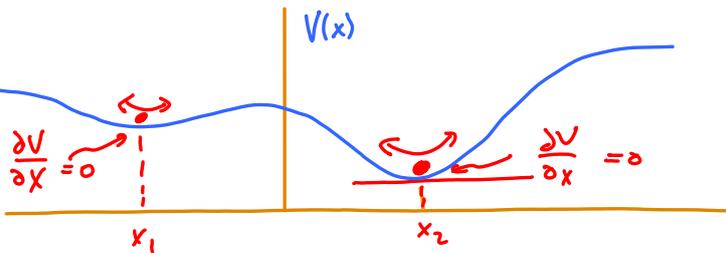
(6) ist ein allgemeines Kriterium für die Stabilität von Fixpunkten!

(7)

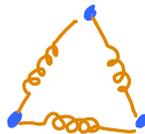
Kleine Schwingungen um Potentialminimum

C7.7g

Beispiele:
Teilchen in
Potentialminimum:

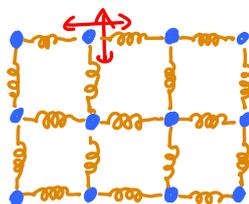


Moleküle:



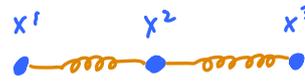
symbolisiert Rückstellkräfte
auf Grund von Coulomb-Wechselwirkung

Atome im
Kristallgitter



Vorgehensweise:

Z.B. für Molekül:



C7.7h

Packe alle Freiheitsgrade in einen 'Vektor':

$$\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)^T \quad (1)$$

Gleichgewichtslage:

(entspricht einem Fixpunkt: $\vec{x}(t) = \vec{x}_0$)

$$\vec{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)^T \quad (2)$$

Auslenkung relativ zur Gleichgewichtslage:

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}_0 \quad (3)$$

Für kleine Auslenkungen ist Kraft proportional zu den Auslenkungen:

$$m_1 \ddot{y}^1 = f^1(\vec{y}) \approx \tilde{A}^1_j y^j \quad (4)$$

$$m_2 \ddot{y}^2 = f^2(\vec{y}) \approx \tilde{A}^2_j y^j \quad (5) \Rightarrow$$

$$m_3 \ddot{y}^3 = f^3(\vec{y}) \approx \tilde{A}^3_j y^j \quad (6)$$

$$\ddot{\vec{y}} = A \cdot \vec{y} \quad (7)$$

$$A^i_j = \frac{\tilde{A}^i_j}{m_i} \quad (8)$$

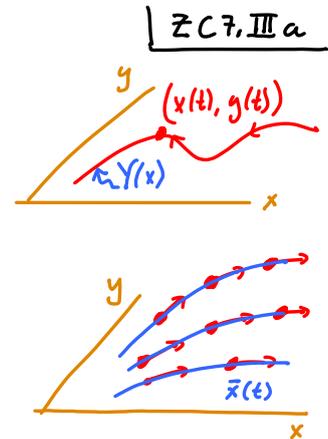
Lösbar mit Ansatz:

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 \cos \omega t \quad \left[\text{oder} \quad \vec{y}_0 e^{-i\omega t} \right] \quad (9)$$

Zusammenfassung: C7.6 Fluss einer DG

Autonome DGL in zwei Dimensionen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad , \quad y(t) = Y(x(t)) \quad \Rightarrow \quad \frac{dY}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x, Y)}{f(x, Y)}$$



DGL für Feldlinie eines

$$\text{Vektorfelds} \quad \vec{E}(\vec{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \frac{dY}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{E_y(x, Y)}{E_x(x, Y)}$$

Zusammenfassung: C7.7 Fixpunkte, Linearisierung von Differentialgleichungen

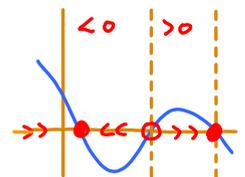
$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad \text{hat Fixpunkt bei} \quad \vec{x}^* \quad \text{falls} \quad \vec{f}(\vec{x}^*) = 0$$

Für n=1: $\dot{x} = f(x)$: ○ instabile Fixpunkte:

● stabile Fixpunkte:

$$f'(x^+) > 0$$

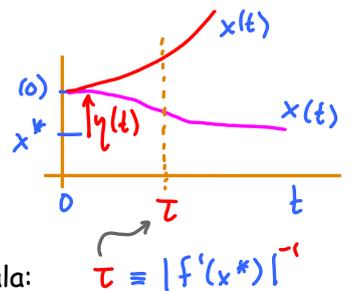
$$f'(x^+) < 0$$



Lineare Stabilitätsanalyse (n=1):

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f(x^*) = 0$$

$$\eta(t) \equiv x(t) - x^* \Rightarrow \dot{\eta}(t) = f'(x^*) \eta(t)$$



Lösung für kleine Auslenkungen:

$$\eta(t) = \eta(0) \exp[f'(x^*) t]$$

mit charakteristischen Zeitskala: $\tau \equiv |f'(x^*)|^{-1}$

Stabilität von Fixpunkten in höheren Dimensionen:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)) \quad , \quad \vec{f}(\vec{x}^*) = 0$$

$$\vec{\eta}(t) \equiv \vec{x}(t) - \vec{x}^* \Rightarrow \dot{\vec{\eta}}(t) = A \cdot \vec{\eta}(t) \quad , \quad A = (A^i_j) = \frac{\partial f^i(\vec{x}^*)}{\partial x_j}$$

Lösung für kleine Auslenkungen ist
Summe über Eigenmoden von A:

$$\vec{\eta}(t) = \sum_j \vec{v}_j e^{\lambda_j t} c_j$$

$\vec{\eta}(t) \rightarrow \vec{0}$ nur falls 'A negativ definit' ist: $Re(\lambda_j) < 0 \quad \forall j$