# C: Calculus

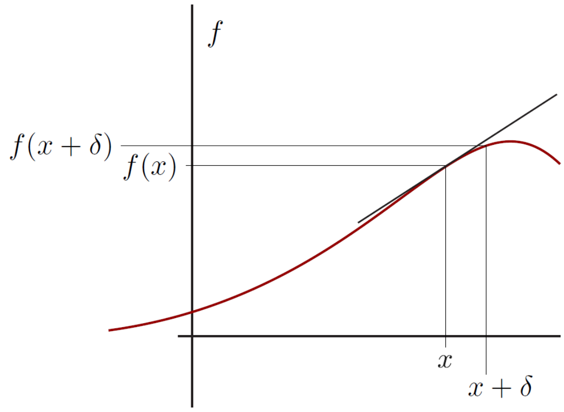
## C1: Differenzieren (Ableiten) 1-dimensionaler Funktionen

Lernziel: verallgemeinerbare Interpretation des Begriffs 'Ableitung einer Funktion'

### C1.1 Def. der Ableitung

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x)$

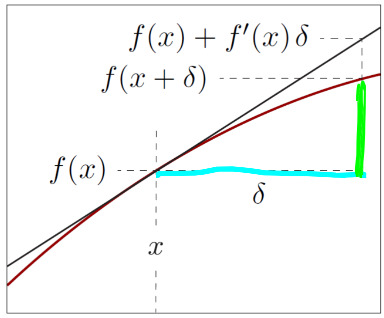
sei eine glatte Funktion (keine Sprünge, keine Zacken).




'Ableitung von f am Punkt x ':

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim_{\delta \to 0} \underbrace{\left[\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}\right]}_{\text{'Differenzquotient'}} \qquad (1)$$

'Differentialquotient'




Interpretation: Steigung v. $f(x)$ am Punkt $x$

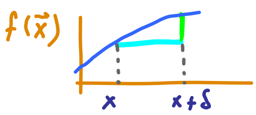


Alternative Notationen: $f'(x) \equiv \frac{d f(x)}{dx} \equiv \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=x} \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv d_x f(x)$ (1)

Verallgemeinerbare Betrachtung: Sei $\delta$ klein, aber nicht infinitesimal klein.

Dann: $\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \overset{(a.1)}{\simeq} f'(x)$ (2)

(a.1) in guter Näherung, wird exakt für $\delta \to 0$




Grundlegende Formel: $f(x+\delta) \overset{(2)}{\simeq} f(x) + \delta f'(x)$ (3)

E1-Sprech: 'Taylor-Entwicklung' 'Mutter aller Ableitungen'

Schreibe $x + \delta \equiv y$ : $f(y) \simeq f(x) + (y-x) f'(x)$ (4)

linear in y!

Interpretation: nahe bei x kann $f(y)$ näherungsbeweise beschrieben werden durch eine <u>lineare</u> Funktion v. $y$ !

> Allgemeine Faustregel: jede Ableitung liefert eine <u>lokale</u> Näherung einer Funktion durch eine <u>lineare</u> Funktion! (5)

C1c

Beispiel: $f(x) = x^3$ (1)

$f(x+\delta) = (x+\delta)^3$

ausmultipliziert: $= x^3 + \underbrace{\delta\, 3x^2}_{\equiv\ \delta f'(x)} + \underbrace{3(\delta)^2 x + (\delta)^3}_{=\mathcal{O}(\delta^2)}$ (2)

Identifiziere: $= f(x) + \delta f'(x)$ (3)
[(durch Vergleich mit (b.3)]

Fazit: $f'(x) = 3x^2$ ✓

$\mathcal{O}(\delta^2)$ bedeutet: Terme 'höher als lineare Ordnung in $\delta$' (hier: $\delta^2$, $\delta^3$)

sind vernachlässigbar relativ zu $\delta$ wenn $\delta \ll 1$: $10^{-2}$ $10^{-4}$ $10^{-6}$ $10^{-5}$ $10^{-10}$ $10^{-15}$

$$f(x+\delta) = x^3 + \delta\Big[3x^2 + \underbrace{3\delta x + \delta^2}_{\text{vernachlässigbar relativ zum ersten Term in [ ], falls } \delta \ll 1}\Big] \quad (4)$$

C1d

## C1.2 Ableitungsregeln

(aus Schule bekannt? In Übungen trainieren!)
(Siehe auch Skript, Mathe Vorkurs)

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien 'glatte Funktionen', $a \in \mathbb{R}$
Ableitungen existieren

Kompaktnotation:

Produktregel: $\dfrac{d(f(x)g(x))}{dx} = \dfrac{d(f(x))}{dx}\, g(x) + f(x)\, \dfrac{d(g(x))}{dx}$ (1) $(fg)' = f'g + fg'$

Kettenregel: $\dfrac{d(f(g(x)))}{dx} = \left.\dfrac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \dfrac{dg(x)}{dx}$ (2) $(f(g))' = f'(g)\, g'$

Inverse: $f(y) = \frac{1}{y}$ $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{g(x)} \overset{(2)}{=} \left.\underbrace{\dfrac{d}{dy}\dfrac{1}{y}}_{-\frac{1}{y^2}}\right|_{y=g(x)} \dfrac{dg(x)}{dx} = \dfrac{-1}{g^2(x)}\dfrac{dg(x)}{dx}$ (3) $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

Ableitung der Umkehrfunktion: $f(f^{-1}(x)) = x$

$\dfrac{df^{-1}(x)}{dx} \overset{(e.2)}{=} \dfrac{1}{\left.\dfrac{df(y)}{dy}\right|_{y=f^{-1}(x)}}$ (4) $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'(f^{-1})}$

C1e

Inverse Funktion: Sei $f^{-1}$ die Inverse Funktion v. $f$ :

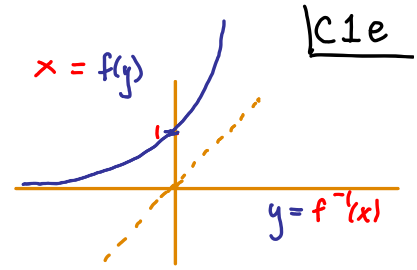
dann gilt:

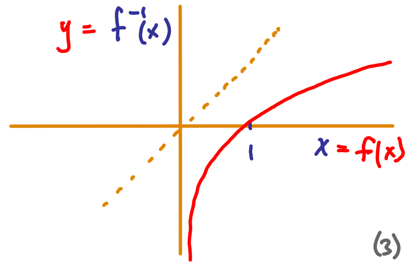
$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dx} f\left(f^{-1}(x)\right) \overset{KR}{=} \left.\frac{df(g)}{dy}\right|_{y=f^{-1}(x)} \frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{d}{dx}x = 1 \qquad (1')$$

(d.2), mit $g = f^{-1}$

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} \overset{(1')}{=} \frac{1}{\left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=f^{-1}(x)}} \qquad (2)$$




(3)

Beispiel: $\exp(\ln(x)) \overset{(1)}{=} x$ , $f^{-1}(x) = \ln(x) = y$ , $f(y) = \exp(y)$ (4)

$$\frac{d\ln(x)}{dx} \overset{(2)}{=} \frac{1}{\left.\frac{d\exp(y)}{dy}\right|_{y=\ln(x)}} = \frac{1}{\left.\exp(y)\right|_{y=\ln(x)}} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} \qquad (5)$$

C1f

## C1.3 Ableitungen v. wichtigen Funktionen (1)

$$\frac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1} \qquad (2)$$

$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ sinus $\qquad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$ cosinus (3)

$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ tangens $\qquad \frac{d}{dx}\cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ cotangens (4)

$\frac{d}{dx} e^{x} = e^{x}$ Exponentialfunktion $\qquad \frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$ logarithmus (5)

$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left[e^{x} - e^{-x}\right]$ sinus hyperbolicus, $\qquad \cosh(x) = \frac{1}{2}\left[e^{x} + e^{-x}\right]$ cosinus hyperbolicus (6)

$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ tangens hyperbolicus, $\qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$ cotangens hyperbolicus (7)

$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x) \qquad \frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$ (8)

$\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \qquad \frac{d}{dx}\coth(x) = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$ (9)

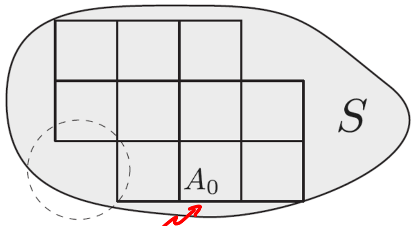
## C2 Integrieren 1-dimensionaler Funktionen

C2a

### C2.1 Grundidee der Integration

Lernziel: verallgemeinerbare Interpretation des Begriffs 'Integral einer Funktion'

Beispiel: Bestimmung einer 2-dimensionalen Fläche:

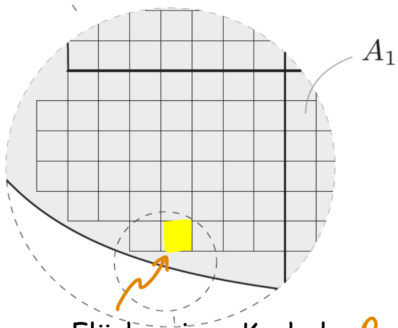



Fläche einer Kachel: $A_0$

Anzahl Kacheln: $N(A_0)$

Schätzung d. Gesamtfläche:

$$F \simeq \sum_{\ell=1}^{N(A_0)} A_0 = A_0 \cdot N(A_0) \qquad (1)$$




Fläche einer Kachel: $A_1$

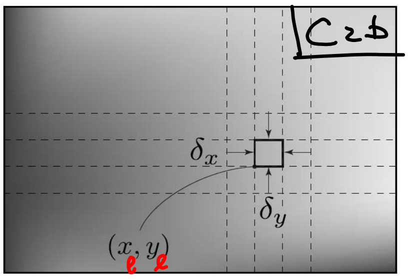
Anzahl Kacheln: $N(A_1)$

Bessere Schätzung d. Gesamtfläche:

$$F \simeq \sum_{\ell=1}^{N(A_1)} A_1 = A_1 \cdot N(A_1) \qquad (2)$$

(3) Tatsächliche Gesamtfläche erhält man im Limes 'unendlich vieler', 'unendlich kleiner' Flächenelemente.

C2b




Kompliziertere Aufgabe: Fläche sei ungleichmäßig angemalt. Was ist Gesamtmasse der Farbe?

Schätzung der Gesammtmasse:

$$M \simeq \sum_{\ell=1}^{N(\delta_x,\delta_y)} \overbrace{\delta_x \delta_y \underbrace{\rho}_{\text{Massendichte = Masse pro Flächenelement}}(x_\ell, y_\ell)}^{\text{Farbmasse der Kachel bei } (x_\ell, y_\ell)} \qquad (1)$$

Tatsächlicher Farbverbrauch, akkurat bestimmt im Limes unendlich vieler, infinitesimal kleiner Kacheln:

$$M = \lim_{\delta_x,\delta_y \to 0} \delta_x \delta_y \sum_{\ell=1}^{N(\delta_x,\delta_y)} \rho(x_\ell, y_\ell) \equiv \int_S \overbrace{dx\,dy}^{\text{Integrationsmass (2-dimensional)}} \rho(x,y) \qquad (2)$$

Funktion von zwei kontinuierlichen Variablen

$S$: Integrationsbereich

[ Falls $\rho(x,y) = 1$ (2')
dann $M$ = Fläche von $S$ ]

$\boxed{\text{Allgemeine Faustregel: Integral = Grenzwert einer Summe}}$ (3)

'Riemann-Summe' $= \lim_{\delta \to 0} \delta \sum_{\ell=1}^{N(\delta)} X_\ell$

'Mutter aller Integrale'

Diskretisierungsparameter: $\delta$

Diskretisierungsindex: $\ell = 1, \dots, N(\delta) \propto \frac{1}{\delta}$

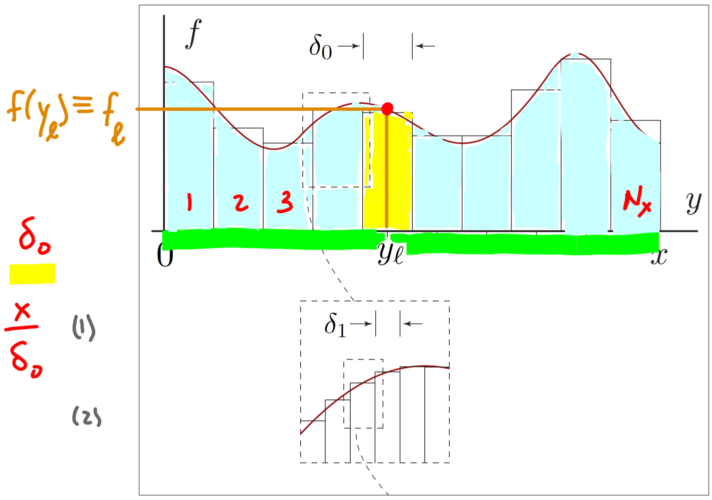
ist proportional zu

Größe, über die summiert wird: $X_\ell$

## Beispiel: Fläche unter einer Kurve

C2c

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto f(y)$




Integrationsbereich: $S = [0, x]$

Diskretisierungsparameter = Kachelbreite: $\delta_0$

Diskretisierungsindex: $\ell = 1, \dots, N_x(\delta_0) = \frac{x}{\delta_0}$ (1)

Fläche v. Kachel $\ell$ : $\delta_0 \cdot f(y_\ell)$ (2)

Schätzung d. Gesamtfläche: $F(x) = \delta_0 \sum_{\ell=1}^{N_x(\delta_0)} f_\ell$ (3)

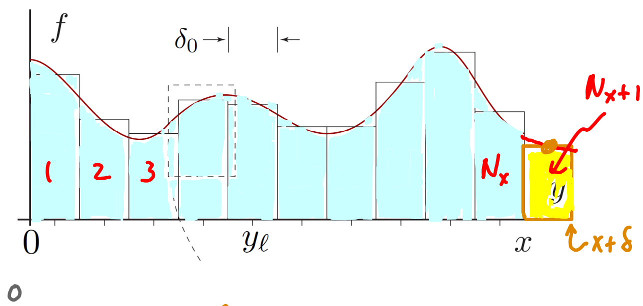
Tatsächliche Fläche: $F(x) = \lim_{\delta \to 0} \delta \sum_{\ell=1}^{N_x(\delta)} f_\ell \equiv \int_0^x dy\, f(y)$ (4)

Definition: 'Integral d. Funktion f'

## Integration als 'Umkehroperation' des Differenzierens

C2d

Wie ändert sich $F(x)$ als Funktion von $x$ ?
(halte $\delta$ fest, füge eine Kachel hinzu)




$F(x+\delta) \overset{(c.3)}{\simeq} \delta \sum_{\ell=1}^{N_x+1} f_\ell$ (1)

$= \delta \sum_{\ell=1}^{N_x} f_\ell + \delta \cdot \underbrace{f_{N_x+1}}_{\simeq f(x+\delta/2) \, \simeq \, f(x) + \underbrace{\frac{\delta}{2} f'(x)}_{\mathcal{O}(\delta)}}$ (2)

$\simeq F(x) + \delta f(x) + \cancel{\mathcal{O}(\delta^2)}$ (3)

Mutter aller Ableitungen

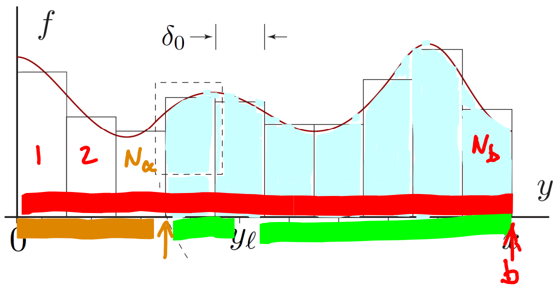
Aufgelöst nach f: $f(x) \overset{(3)}{=} \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} \overset{(1a.1)}{\simeq} \frac{dF(x)}{dx}$ (4)

Im Limes $\delta \to 0$ erhalten wir den 'Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung':

$F(x) = \int_0^x dy\, f(y) \Longrightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ (5)

C2e

'Bestimmtes Integral':




$$F(b) - F(a) \qquad (1)$$

$$\overset{(d.2)}{=} \lim_{\delta \to 0} \left[ \delta \sum_{\ell=1}^{N_b} f_\ell - \delta \sum_{\ell=1}^{N_a} f_\ell \right] \qquad (2)$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \delta \sum_{\ell=N_a+1}^{N_b} f_\ell \equiv \int_a^b dy\, f(y) \qquad (3)$$

= Fläche unter Kurve zwischen $a$ und $b$

Standardnotation: $$\int_a^b dy\, f(y) \overset{(1)}{=} F(b) - F(a) \equiv F(y)\Big|_a^b \equiv \Big[F(y)\Big]_a^b \qquad (4)$$

Falls $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, ist $F: x \mapsto F(x)$ eine 'Stammfunktion' von $f: x \mapsto f(x)$ (5)

Stammfunktion ist nicht eindeutig: $F + c \;:\; x \mapsto F(x) + c$ ist auch eine Stammfunktion. (6)

beliebige Konstante

'Unbestimmtes Integral': $$\int dy\, f(y) \equiv F(y) + c \qquad (7)$$

C2f

## C2.3 Integrationsregeln

### Partielle Integration (entstammt der Produktregel)

Sei $F(x) = u(x)\, v(x)$ mit $u, v$ beliebig aber differenzierbar.

Produktregel: $$F' = u' v + u v' \qquad (1)$$

$\int dx\, (1)$: $$\Big[F(x)\Big]_a^b \overset{\text{Hauptsatz}}{=} \int_a^b dx\, F' = \int_a^b dx \left[u' v + u v'\right] \qquad (2)$$

Umstellen: $$\boxed{\int_a^b dx\, u\, v' \overset{(1,2)}{=} \Big[u\, v\Big]_a^b - \int_a^b dx\, u' v}$$ 'partielle Integration' (3)

Nützlich, falls $u'$ einfacher ist als $u$.

Beispiel: $$\int_0^\pi dx\, \overset{u}{x}\, \overset{v'}{\sin(x)} = - \overset{u \cdot v}{x \cos x}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi dx\, \overset{u' \cdot v}{1 \cdot (-\cos x)} \qquad (4)$$

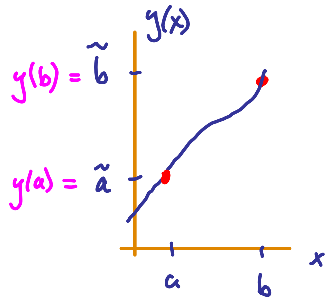
$u = x \qquad v' = \sin(x)$

$u' = 1 \qquad v = -\cos(x)$

$$= -\pi(-1) - 0 + \underbrace{\sin x \Big|_0^\pi}_{=0} = \pi \qquad (5)$$

## Variablen-Substitution (entstammt der Kettenregel)

Sei $$f(y) = \frac{d}{dy}F(y) \qquad (1)$$




$\int dy\,(1)$: $$\int_{\tilde a = y(a)}^{\tilde b = y(b)} dy\, f(y) \overset{(1)}{=} \int_{\tilde a}^{\tilde b} dy \frac{d}{dy}F(y) \overset{\text{Hauptsatz}}{=} \Big[F(y)\Big]_{\tilde a}^{\tilde b} = F(\tilde b) - F(\tilde a) \qquad (2)$$

Sei ferner $$y: [a,b] \to [\tilde a, \tilde b], \quad x \mapsto y(x) \qquad (3)$$

eine monoton steigende Funktion v. $x$ und betrachte $F(y(x))$ als Funktion von $x$:

Kettenregel: $$\frac{d}{dx}F(y(x)) \overset{(C1d.2)}{=} \frac{d}{dy}F(y)\Big|_{y=y(x)} \frac{dy(x)}{dx} \overset{(1)}{=} f(y(x))\,\frac{dy(x)}{dx} \qquad (4)$$

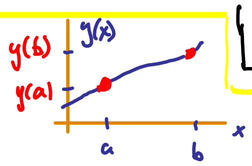
$\int dx\,(4)$: $$\int_a^b dx \frac{dy}{dx} f(y(x)) = \int_a^b dx \frac{d}{dx} F(y(x)) \overset{\text{Hauptsatz}}{=} \Big[F(y(x))\Big]_a^b = F(y(b)) - F(y(a)) \qquad (5)$$

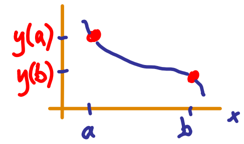
$$= F(\tilde b) - F(\tilde a) \qquad (6)$$

(6) = (2) $$\boxed{\int_a^b dx \frac{dy}{dx} f(y(x)) \overset{(3)}{=} \int_{y(a)}^{y(b)} dy\, f(y)} \qquad (7)$$

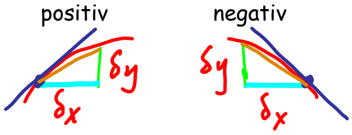


'Variablen-Substitution': $$\int_a^b dx \frac{dy(x)}{dx} f(y(x)) \overset{(g7)}{=} \begin{cases} \int_{y(a)}^{y(b)} dy\, f(y) & \text{[y(x) monoton zunehmend]} \\ -\int_{y(b)}^{y(a)} dy\, f(y) & \text{[y(x) monoton abnehmend]} \end{cases}$$




Steigung positiv — Steigung negativ




Merkregeln: Substitution: $y = y(x)$,

Integrationsmaß: $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy(x)}{dx} \simeq \pm \frac{\delta y}{\delta x}$$

Eselsbrücke $$\Longrightarrow \delta y \simeq \pm\, \delta x \frac{dy(x)}{dx} \qquad (2)$$

Interationsgrenzen: $$x \mapsto y(x), \quad a \mapsto y(a), \quad b \mapsto y(b) \qquad (3)$$

Beispiel: $$I = \int_4^5 dx \frac{x}{(1+x^2)^2} \qquad (4)$$

Substitution: $$y(x) = 1 + x^2 \qquad (5)$$

Integrationsmaß: $$\frac{dy}{dx} \overset{(5)}{=} 2x \Longrightarrow \frac12 \delta y = \delta x \cdot x \qquad (6)$$

Integrationsgrenzen: $$4 \mapsto y(4) \overset{(2)}{=} 1 + 4^2 \qquad (7)$$
$$5 \mapsto y(5) = 1 + 5^2 \qquad (8)$$

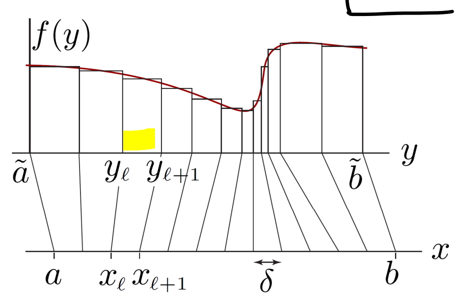
$$I = \underset{(6)}{\frac12} \int_{\underset{(7)}{17}}^{\overset{(8)}{26}} dy \frac{1}{(y)^2} = -\frac12 \frac{1}{y}\Big|_{17}^{26} = -\frac12\left[\frac{1}{26} - \frac{1}{17}\right] \qquad (9)$$

## Variablen-Substitution (intuitive Diskussion)

Kacheln müssen nicht alle gleich groß sein!

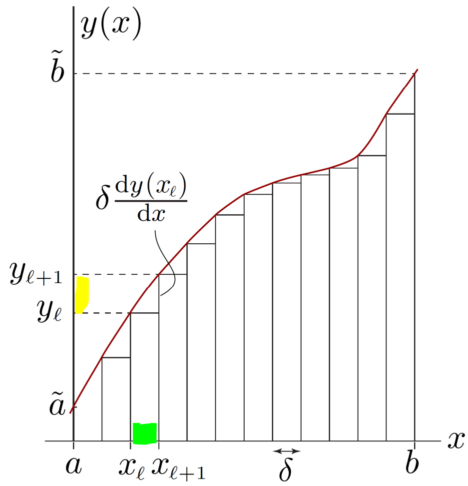
$$f : [\tilde{a}, \tilde{b}] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto f(y) \qquad (1)$$

$\{y_\ell\}$ seien Grenzpunkte v. 'ungleichbreiten' Kacheln.




Verallgemeinerung der Riemann-Summe:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} dy\, f(y) = \lim_{N\to\infty} \sum_\ell f(y_\ell) \underbrace{[y_{\ell+1} - y_\ell]}_{\text{Breite v. Kachel } \ell} \qquad (2)$$




Umformung in Riemann-Summe mit gleichbreiten Kacheln:

$$x_\ell \equiv \delta \cdot \ell \qquad (3)$$

$$\delta \equiv (b-a)/N \qquad (4)$$

Kachelbreiten seien bestimmt durch eine (frei gewählte) monoton steigende Funktion, y:

$$x : [a, b] \longrightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}] = [y(a), y(b)]$$

$$x \longmapsto y(x) \qquad \text{mit} \qquad y_\ell = y(x_\ell) \qquad (5)$$



## Variablen-Substitution in der Riemann-Summe:

$$\int_{y(a) = \tilde{a}}^{y(b) = \tilde{b}} dy\, f(y) \overset{(i.2)}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_\ell f(y_\ell)[y_{\ell+1} - y_\ell] \qquad (1)$$

$$\overset{(i.5)}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_\ell f(y(x_\ell)) \left[\frac{y(x_{\ell+1}) - y(x_\ell)}{\delta}\right] \cdot \delta \qquad (2)$$

↳(C1b.2) Mutter aller Ableitungen

$$\simeq \lim_{N\to\infty} \sum_\ell f(y(x_\ell)) \frac{dy(x_\ell)}{dx} \cdot \delta \qquad (3)$$

$$= \int_a^b dx\, f(y(x)) \frac{dy(x)}{dx} \qquad (4)$$

entstammt den ungleichen Kachelbreiten in Ausgangsformel (i.2), und beschreibt die Streckung/Stauchung der Kachelbreiten, die beim Übergang zu gleichbreiten Kacheln generiert wird.

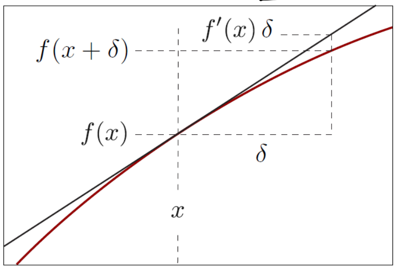
'Variablen-Substitution':

$$\boxed{\int_a^b dx \frac{dy(x)}{dx} f(y(x)) \overset{(4)}{=} \int_{y(a)}^{y(b)} dy\, f(y)} \qquad (5)$$

## Zusammenfassung: C1-C2

ZC1

### C1: Ableitung 1-dimensionaler Funktionen




Definition d. Ableitung:

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \qquad (1)$$

Jede Ableitung stellt eine lokale Näherungen einer Funktion durch eine lineare Funktion dar!

$$f(x+\delta) \simeq f(x) + \delta \, \frac{df(x)}{dx} \qquad (2)$$

Produktregel:

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx}\, g(x) + f(x)\, \frac{d(g(x))}{dx} \qquad (3)$$

Kettenregel:

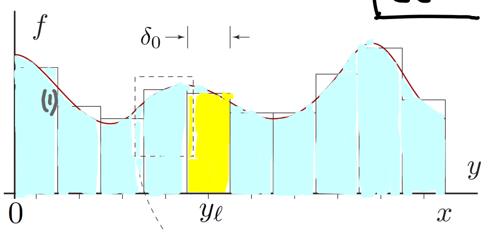
$$\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx} \qquad (4)$$

Ableitung d. Umkehrfunktion:

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=f^{-1}(x)}} \qquad (5)$$

### C2 Integrale

ZC2




'Riemann-Summe'

$$= \lim_{\delta \to 0} \delta \sum_{\ell=1}^{N(\delta)} X_\ell \qquad (1)$$

Fläche unter Kurve:

$$F(x) = \lim_{\delta \to 0} \delta \sum_{\ell} f_\ell \equiv \int_0^x dy\, f(y) \qquad (2)$$

'Hauptsatz':

$$F(x) = \int_0^x dy\, f(y) \Longrightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \qquad (3)$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b dy\, f(y) = F(b) - F(a) \equiv F(y)\Big|_a^b \qquad (4)$$

'Partielle Integration'

$$\int_a^b dx\, u(x)\, v'(x) = u(x)\, v(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx\, u'(x)\, v(x) \qquad (5)$$

'Variablen-Substitution':

$$\int_a^b dx\, \frac{dy(x)}{dx}\, f(y(x)) = \int_{y(a)}^{y(b)} dy\, f(y), \quad dy = dx\, y'(x), \quad \begin{array}{l} x \mapsto y(x) \\ a \mapsto y(a) \\ b \mapsto y(b) \end{array} \qquad (6)$$