Erläuterung der Seiten- und Gleichungsnummerierung:
L: Teil "Lineare Algebra" in AD.
L1: Kapitel L1, "Mathematics before Numbers", in AD
a: erste Seite im handschriftlichen Skript zu Kapitel L1

Gleichungen die auf Seite L1a (Kapitel L1, Seite a) stehen, werden zitiert als
(1), (2) falls die Zitate auf derselben Seite stehen;
(a.1), (a.2) falls die Zitate auf anderen Seiten (z.B. b,c) desselben Kapitels L1 stehen;
(L1a.1), (L1a.2) falls die Zitate auf Seiten anderer Kapitel (z.B. L2, C3) stehen.

L1 Mathematische Grundbegriffe

L1.1 Mengen und Abbildungen

Zwei Mengen: $A = \{\times \; + \; \Delta\}$ $\quad B = \{\circ \; \square\}$

kartesisches Produkt: $A \times B = \{(\;,\;) \mid \;,\; \} = \{(\times,\circ)\; (\times,\square)\; (+,\circ)\; (+,\square)\; (\Delta,\circ)\; (\Delta,\square)\}$ (1)

"ist Element von"

Abbildung:

Definitionsmenge

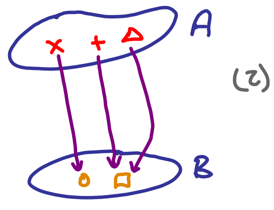
Zielmenge

Name der Abbildung $\quad : \quad \longrightarrow$

$\longmapsto$

Argument

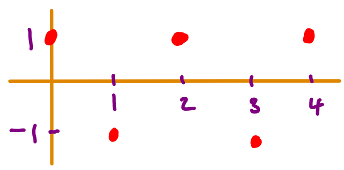
Zielelement



$F(A) = B$ (2)

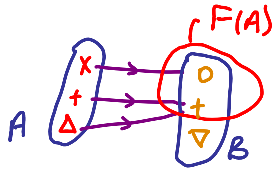
Beispiel: $F : \quad \longrightarrow$

$\longmapsto$



<u>Bild</u> v. A: $\quad = \{ \quad \mid a \in A \}$

'ist eine Teilmenge von, oder ist gleich'

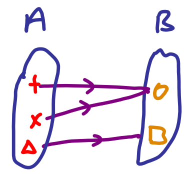


Eine Abbildung ist...

<u>surjektiv</u> falls $\forall\, b \in B$ gilt: $b = F(a)$ für ein $a \in A$

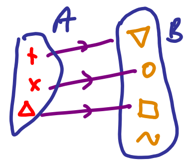
'für alle'

'<u>alle</u> Elemente v. B werden erreicht'



<u>injektiv</u> falls $\forall\, b \in B$ gilt: $b = F(a)$ für ein $a \in A$

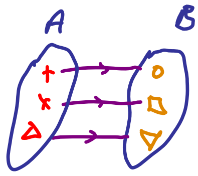
'<u>kein</u> Element v. B wird mehr als einmal erreicht'



<u>bijektiv</u> falls $\forall\, b \in B$ gilt: $b = F(a)$ für ein $a \in A$

(injektiv <u>und</u> surjektiv)

'1-zu-1-Abbildung'

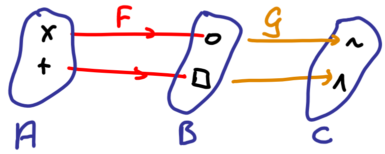


Verkettung / Komposition

L1c

$F: A \to B$, $g: B \to C$, $: A \to$

$a \mapsto$ $\qquad b \mapsto$ $\qquad a \mapsto$



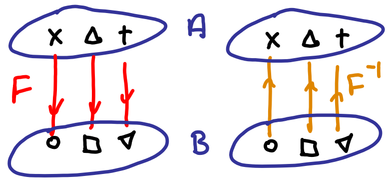
Beispiel: $A, B, C =$

$F(a) =$ $\qquad g(b) =$, $(g \circ F)(\ ) =$

Inverse einer bijektiven Abbildung:

$F: A \to B$ $\qquad F^{-1}: \quad \to$

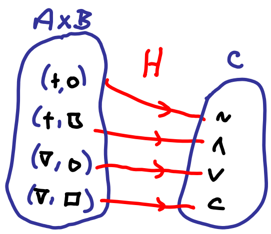
$a \mapsto$ $\qquad \mapsto$



Binäre Verknüpfung:
Definitionsmenge ist ein kartesisches Produkt:

$H: \quad \to$

$\mapsto$



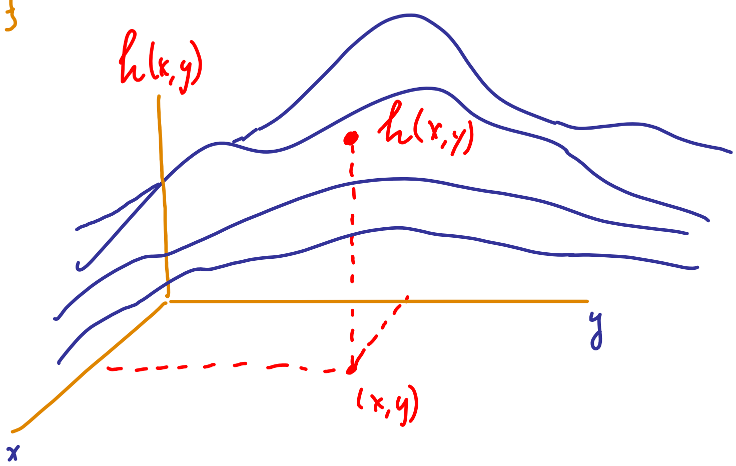
Beispiel einer binären Verknüpfung: Höhe eines Gebirges

L1d

$h: \underbrace{\qquad} = \{ \quad | \quad \}$

$\to$

$\mapsto$



L1.2 Gruppe: (einfachste Struktur die 'Operationen' mit Elementen erlaubt)

L1e

Definition: Eine 'Gruppe'
ist eine Menge A ausgestattet mit
einer binären Verknüpfung,

kartesisches Produkt

$\bullet : \quad \times \quad \longrightarrow$ (1)

$(\; , \;) \longmapsto$ (2)

und folgenden Eigenschaften ('Gruppenaxiome'):

'für alle'

i) Abgeschlossenheit: $\forall\, a, b \in A,$ (3)

ii) Assoziativität: $a \bullet b \bullet c = a \bullet b \bullet c$ (4)

'es existiert'

iii) neutrales Element: $\exists \quad \in A,$ so dass $a \bullet \quad = \quad \bullet a = \quad , \quad \forall \quad \in A$ (5)

iv) inverses Element: $\forall \quad \in A \quad \exists \quad \in A$ mit $\quad \bullet \quad = \quad = \quad \bullet \quad$ (6)

'links wird definiert durch rechts' (7)

Falls $a \bullet b = b \bullet a$ 'kommutative Gruppe', 'Abelsche Gruppe'

Falls $a \bullet b \neq b \bullet a$ 'nicht-kommutative Gruppe', 'nicht-Abelsche Gruppe' (8)

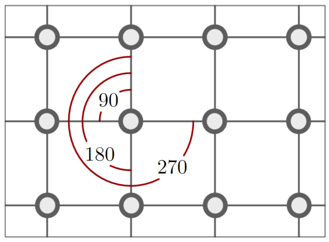
Beispiel 1: Rotationen eines Gitters um eine feste Achse um 0, 90, 180, 270 Grad

L1f

$r(\phi) \equiv$ Rotation um ϕ , $\quad r(\phi + 360) = r(\phi)$ (1)

$R_{90} \equiv \{ r(\phi) \mid \phi \in \{0, 90, 180, 270\} \}$ (2)

'linke Seite ist Kurznotation für rechte Seite,
bzw. wird durch rechte Seite definiert'



Verknüpfung v. zwei Rotationen aus C sei die Rotation um die Summe der Winkel:

$\bullet : R_{90} \times R_{90} \longrightarrow R_{90}$ (3)

z.B.: $(r(\phi), r(\phi')) \longmapsto r(\phi) \bullet r(\phi') \equiv$ (4)

$r(0) \bullet r(90) = r(\quad)$ (5)

$r(90) \bullet r(180) = r(\quad)$ (6)

$r(270) \bullet r(180) = r(\quad)$ (7)

Verknüpfungstabelle:

$\bullet$	0	90	180	270
0	0	90	180	270
90	90	180	270	0
180	180	270	0	90
270	270	0	90	180

(,) ist eine kommutative Gruppe.

(bestimmt Gruppe vollständig)

Neutrales element:

(Inverse von $r(\phi)$) =

Beispiel 2: Addition ganzer Zahlen modulo q

L1g

Definition: für $p, q \in$ sei $\equiv$ positiver Rest v. (p geteilt durch q) (1)

Beispiele: $5 \bmod 4 =$ $\qquad 9 \bmod 4 =$ (2)

$7 \bmod 4 =$ $\qquad -3 \bmod 4 =$ (3)

Definition: $\mathbb{Z}_q \equiv \{ \ , \ , \ , \ldots , \ \}$ (4)

Verknüpfung v. zwei Elementen v. $\mathbb{Z}_q$ sei ihre Summe modulo q:

$\bullet : \qquad \longrightarrow$ (5)

$(p, p') \mapsto p \bullet p' = (\qquad) \bmod$ (6)

z.B. für q = 4: $0 \bullet 1 = (0+1) \bmod 4 =$ (7)

$1 \bullet 2 = (1+2) \bmod 4 =$ (8)

$3 \bullet 2 = (3+2) \bmod 4 =$ (9)

$(\qquad , \qquad)$ ist eine kommutative Gruppe. (10)

Verknüpfungstabelle für q = 4:

$\bullet$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

(bestimmt Gruppe vollständig)

Ihre Verknüpungstabelle hat dieselbe Struktur wie die von $(R_{90}, \bullet)$

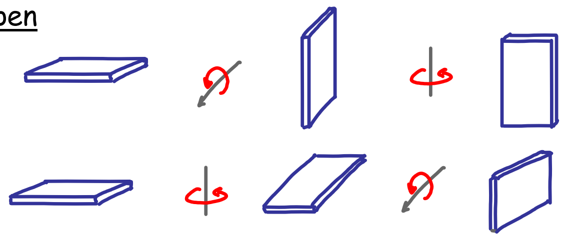
Folglich sind die beiden Gruppen 'isomorph': $(\mathbb{Z}_q, \bullet) \qquad (R_{90}, \bullet)$ [AD-Buch, S. 9-10]

Beispiele von nicht-kommutativen Gruppen

L1h

Rotationen in drei Dimensionen: (1)

Rotationen um verschiedene
Achsen sind nicht-kommutativ
(Reihenfolge ist nicht egal):



verschieden! (2)

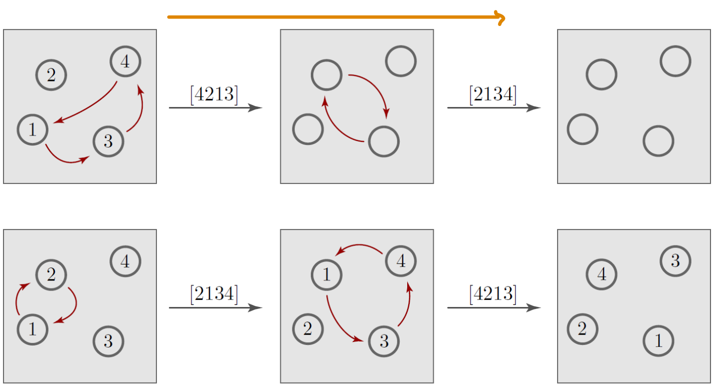
Permutationsgruppe z.B. von 4 unterscheidbaren (nummerierten) Objekten

Kurznotation:

Beispiel einer Permutation: 'Ersetze 1 durch 4, 2 durch 2, 3 durch 1, 4 durch 3 ': [ ]

(Die Ersetzungsregel bezieht sich nur auf die Nummern der Kugeln; sie gilt, egal wo die Kugeln liegen!) (3)

Permutationen bilden eine Gruppe, mit Verknüpfungsregel: $= P' \circ P$ = erst P, dann P' (4)



$[\qquad] = [2134] \circ [4213]$ (5)

verschieden!

$[2413] = [4213] \circ [2134]$ (6)

L1.3 Körper

L1i

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

Körper: $F = (\quad , \quad , \quad)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation) (1)

- Addition: $(A, \quad)$ bildet eine kommutative Gruppe, mit neutralem Element = . (2)

  (additives Inverse v. a) = Subtraktion: $a - b \equiv a +$ (3)

- Multiplikation: $(A \quad , \quad)$ bildet eine kommutative Gruppe, mit neutralem Element = . (4)

  Multiplik. Inverse v. a = Division: $a/b \equiv$ (5)

- Für das neutrale Element d. Addition, gilt: $\cdot a \equiv \quad \forall a \in A$ (6)

  Also hat 0 kein multiplikatives Inverse [sonst würde gelten: $0 \cdot a = 0$

  $\Rightarrow a = \quad \forall a \in A$]

- Distributivitätsaxiom: $a \cdot (b + c) =$ (7)

$\mathbb{Z}$ (ausgestattet mit der üblichen Definition von Addition und Multiplikation ganzer Zahlen) ist kein Körper, denn Multiplikation hat kein Inverses in $\mathbb{Z}$ (8)

Beispiele von Körpern:

L1j

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} \equiv \{ q/p \mid q, p \in \mathbb{Z}, \; p \neq 0 \}$ (1)

Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \{$ alle Zahlen, die als Limes von 'Folgen von rationalen Zahlen' dargestellt werden können $\}$ (2)

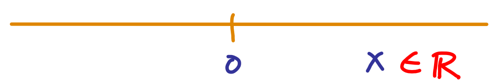
z.B.: $\mathbb{Q} \not\ni \sqrt{2} = 1,4142\ldots$ (3)

kann approximiert werden durch die Folge

$$\left\{ \begin{array}{l} 1,4 = \frac{14}{10} \in \mathbb{Q} \\ 1,41 = \frac{141}{100} \in \mathbb{Q} \\ 1,414 = \frac{1414}{1000} \in \mathbb{Q} \\ 1,4142 = \frac{14142}{10000} \in \mathbb{Q} \\ \vdots \end{array} \right.$$

(4)

$\mathbb{R} = \{$ alle Zahlen, die gebraucht werden, um eine Linie zu Parametrisieren $\}$



Komplexe Zahlen: $\mathbb{C}$ L1k

Ausgangsfrage: was sind die Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$? x (1)

Lösungsansatz: erweitere unser Zahlensystem um eine neue Zahl, die 'imaginäre Einheit', .

Definiere als eine Zahl, deren Quadrat -1 liefert: $\boxed{\quad \equiv -1}$ (2a)

Dasselbe gilt für : $(\quad)^2 = -1$ (2b)

sind Wurzeln von -1. Notationskonvention: $\equiv \sqrt{-1}$ (3)

Wurzel von negativen Zahlen: Sei $r > 0$: $\sqrt{-r} =$ (4)

Menge aller komplexen Zahlen: $\mathbb{C} \equiv \{ \quad | \quad \}$ (5)

jede kompl. Zahl wird dargestellt durch zwei reelle Zahlen:
$x \equiv \quad =$ 'Realteil v. z' (6)
$y \equiv \quad =$ 'Imaginärteil v. z' (7)

Def. v. Addition: (analog den üblichen Regeln für einen Körper) L1l

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') \overset{4}{\equiv} (\quad) + (\quad)$$ (1)

Bsp: $(1+2i) + (2-3i) =$

Def. v. Multiplikation: (analog den üblichen Regeln für einen Körper)

$$z z' = (x + iy)(x' + iy') \equiv (xx' + xiy' + iyx' + i^2yy' \overset{(k.2)}{=})$$ (2)

$$= (\quad) + (\quad)$$ (3)

Bsp: $(1+2i)(2-3i) = (\quad) + i(\quad) =$

Neutrales Element der Addition: Additives Inverse: $-z =$ (4)

Neutrales Element der Multiplikation: 1

Falls $z \neq 0$, was ist das multiplikatives Inverse: $z^{-1} = ?$ (5)

Was sind Re(z^{-1}), Im(z^{-1}) ?

Lim

Definiere zunächst: 'komplex Konjugierte' von $z = x+iy$: $\quad \equiv \quad \equiv x \quad iy$ (1)

dann:

$z\bar{z} \overset{(1)}{=} (x \quad iy)(x \quad iy) \overset{(\ell.3)}{=} (\quad) + i(\quad) = $ (2)

(2)$\cdot \frac{1}{x^2+y^2}$: $\underbrace{z \cdot \bar{z} \overset{(2)}{=}}_{\equiv}$ (3)

Inverse: $z^{-1} \overset{(3)}{\equiv} \frac{\bar{z}}{x^2+y^2} = \frac{\quad}{x^2+y^2}$, $Re(z^{-1}) = \frac{\quad}{x^2+y^2}$, $Im(z^{-1}) = \frac{\quad}{x^2+y^2}$ (4)

Check: $z z^{-1} \overset{(4)}{=} (x+iy)\frac{x-iy}{x^2+y^2} \overset{(2)}{=} \frac{\quad}{x^2+y^2} = \quad \checkmark$ (5)

Merkregel für Inverse:
'mache den Nenner reell' ! $\quad z^{-1} = \quad = \frac{\quad}{z} = \frac{\quad}{\quad} = (4) \checkmark$ (6)

<u>Bsp:</u> $z = 2-3i$, $\quad z^{-1} = \frac{1}{2-3i} = \quad = \frac{\quad}{\quad} = \frac{1}{13}(2+3i)$ (7)

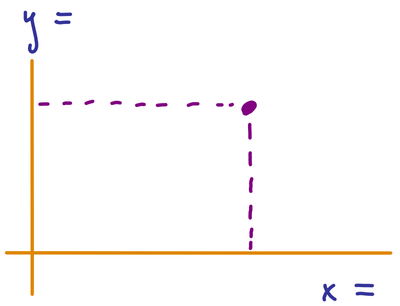
Lim

<u>Komplexe Ebene:</u>

Identifikation einer komplexen Zahl mit 'geordnetem Paar' von zwei reellen Zahlen:

$I: \mathbb{C} \to \quad = \{ \quad | \; x, y \in \quad \}$ (1)

$z \mapsto \quad =$ Punkt in zwei-dimensionaler Ebene ('komplexe Ebene') (2)



Reelle Achse: $z = \quad$ 'rein reell'

Imaginäre Achse: $z = \quad$ 'rein imaginär'

<u>Polardarstellung:</u>

Betrag v. z (Abstand zum Ursprung):

$|z| \equiv \quad = \quad$ (3)

$z = x + iy$ (4)

$= (\quad + i \quad)$ (5)

Zusammenfassung: L1

ZL1

Gruppe: $\mathcal{G} = (A, \bullet)$ Verknüpfung: $\bullet : A \times A \longrightarrow A, \quad (a,b) \longmapsto a \bullet b$

(i) Abgeschlossenheit, (ii) Assoziativität, (iii) neutrales Element, (iv) inverses Element

Körper: $F = (A, +, \bullet)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation, beide liefern jeweils eine kommutative Gruppe)

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

Beispiele: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

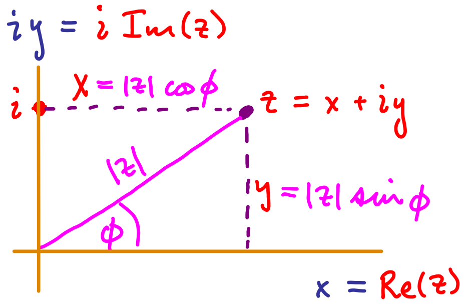
Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \} \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$i^2 = -1, \quad i = \sqrt{-1}$

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

$$z^* \equiv \bar{z} \equiv x - iy, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$



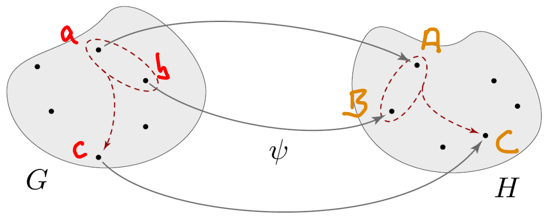
Optional: Homomorphismus

L10

$(\mathcal{G}, \cdot)$ und $(H, \bullet)$

$a \cdot b = c \qquad A \bullet B = C$

seien zwei Gruppen mit *a priori* unabhängigen Verknüpfungsregeln.



Def: Eine Abbildung $\psi : \qquad \longrightarrow \qquad , \qquad \longmapsto$ (1)

ist ein 'Homomorphismus', falls $\psi(\qquad) = \psi(\qquad)\ \psi(\qquad) \quad \forall\, a, b \in \mathcal{G}$ (2)

'bewahrt die Form' verknüpfen, dann abbilden = abbilden, dann verknüpfen

Beispiel: $(\mathcal{G}, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$, $(H, \bullet) = (2\mathbb{Z}, +)$ (3)

Addition ganzer Zahlen — Addition gerader Zahlen

Die Abbildung $\psi : \mathcal{G} \to H, \quad n \longmapsto \psi(n) = 2n$ ist ein Homomorphismus, (4)

denn $\psi(n+m) = 2(n+m)$ ist gleich $\psi(n) + \psi(m) = 2n + 2m = 2m + 2n$ (5)

verknüpfen, dann abbilden — abbilden, dann verknüpfen

Die Abbildung $\phi : \mathcal{G} \to H, \quad n \longmapsto \phi(n) = 2n^2$ ist kein Homomorphismus, (6)

denn $\phi(n+m) = 2(n+m)^2$ ist nicht gleich $\phi(n) + \phi(m) = 2n^2 + 2m^2 = 2n^2 + 2m^2$ (7)

verknüpfen, dann abbilden — abbilden, dann verknüpfen

Optional: Isomorphismus

L1p

Def: Eine Abbildung $\varphi : G \longrightarrow H \,, \quad a \longmapsto \varphi(a)$ (1)

heisst ein 'Isomorphismus' ('identische Form') zwischen den Gruppen G und H ist, falls sie ein <u>bijektiver</u> Homomorphismus ist. Wir schreiben dann: $G \cong H$ (2)

Isomorphe Gruppen sind praktisch 'identisch'.

$(R_{90}, \bullet) \cong (\mathbb{Z}_4, \cdot)$

Konkret: es existiert eine 1-zu-1 Zuordnung ihrer Elemente, die ihre Verknüpfungstabellen aufeinander abbildet (d.h. sie haben 'dieselbe' Verknüpfungstabelle, alle Eigenschaften der einen Gruppe gelten auch für die andere).

$\bullet$	0	90	180	270
0	0	90	180	270
90	90	180	270	0
180	180	270	0	90
270	270	0	90	180

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Gruppentheorie: sehr wichtig in der Physik !

- Diskrete Translationen, Reflektionen (Kristallstrukturen)
- Translationen in Raum oder Zeit
- Rotationen (Quantenmechanische Theorie des Drehimpulses, Spin)
- Lorentz-Gruppe, Poincare-Gruppe (spezielle Relativitätstheorie)