

Zusammenfassung: L1

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{L}$

Gruppe: $G = (A, \cdot)$ Verknüpfung: $\cdot : A \times A \rightarrow A, (a, b) \mapsto a \cdot b$

(i) Abgeschlossenheit, (ii) Assoziativität, (iii) neutrales Element, (iv) inverses Element

Körper: $F = (A, +, \cdot)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation, beide liefern jeweils eine kommutative Gruppe)

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

Beispiele: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

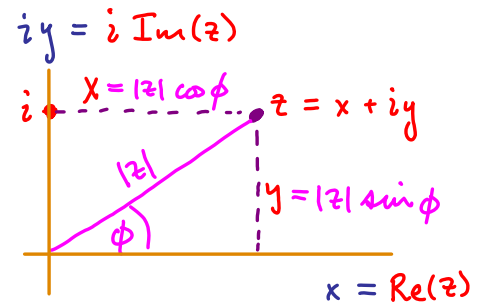
Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$$i^2 = -1, i = \sqrt{-1}$$

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

$$z^* = \bar{z} = x - iy, z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

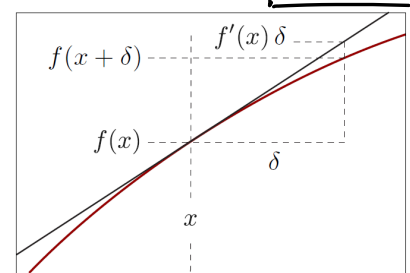


Zusammenfassung: C1-C2

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$

C1: Ableitung 1-dimensionaler Funktionen

Definition d. Ableitung: $\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim_{\delta > 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$ (1)



Jede Ableitung stellt eine lokale Näherungen einer Funktion durch eine lineare Funktion dar!

$$f(x+\delta) \approx f(x) + \delta \frac{df(x)}{dx} \quad (2)$$

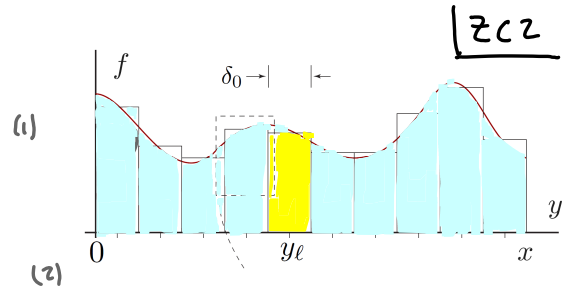
Produktregel: $\frac{d(fg)}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} g(x) + f(x) \frac{d(g(x))}{dx}$ (3)

Kettenregel: $\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx}$ (4)

Ableitung d. Umkehrfunktion: $\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=f^{-1}(x)}}$ (5)

C2 Integrale

'Riemann-Summe' $= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{l=1}^{N(\delta)} X_l$



Fläche unter Kurve: $F(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_l f_l \equiv \int_0^x dy f(y)$

'Hauptsatz': $F(x) = \int_0^x dy f(y) \implies \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ (3)

Bestimmtes Integral: $\int_a^b dy f(y) = F(b) - F(a) \equiv F(y) \Big|_a^b$ (4)

'Partielle Integration' $\int_a^b dx u(x) v'(x) = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx u'(x) v(x)$ (5)

'Variablen-Substitution': $\int_a^b dx \frac{dy(x)}{dx} f(y(x)) = \int_{y(a)}^{y(b)} dy f(y)$, $dy = dx y'(x)$, $x \mapsto y(x)$, $a \mapsto y(a)$, $b \mapsto y(b)$ (6)

Zusammenfassung: L2 Vektorräume

Vorlesung 3 ZL2 a

F-Vektorraum: $(V, +, \cdot)$

Vektoraddition: $+ : (V, V) \rightarrow V$
 $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$ } Axiome:
 (i)-(v): kommutative Gruppe

Skalare Multiplikation: $\cdot : (F, V) \rightarrow V$
 $(\lambda, \vec{a}) \mapsto \lambda \cdot \vec{a} \equiv (\lambda \vec{a})$ } (vi, vii) distributiv
 (viii) assoziativ
 (ix) Identitätselement **1**

Wichtigstes Beispiel: \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{a} = (a^1, \dots, a^n)^T \mid a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R} \}$$

Vektoraddition: $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto (\vec{a} + \vec{b}) \equiv \begin{pmatrix} a^1 + b^1 \\ \vdots \\ a^n + b^n \end{pmatrix}$

Skalare Multiplikation: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $(\lambda, \vec{b}) \mapsto (\lambda \vec{b}) \equiv \begin{pmatrix} \lambda b^1 \\ \vdots \\ \lambda b^n \end{pmatrix}$

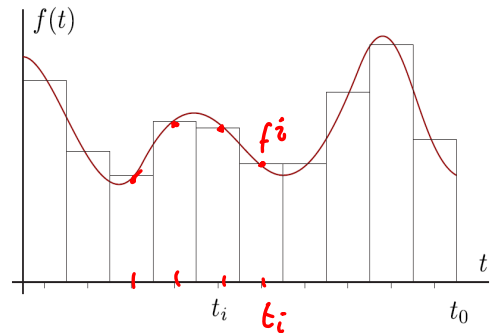
Weiteres Beispiel: Diskretisierte Funktionen:

Diskretisierte Funktion: $\vec{f} = (f^1, \dots, f^N)^T$

Vektoraddition: $(\vec{f} + \vec{g})^i = (\vec{f})^i + (\vec{g})^i$

Skalarmultiplikation: $(a \cdot \vec{f})^i = a(\vec{f})^i$

Vektorraum: $(\{ \vec{f} \mid (\vec{f})^i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N \}, +, \cdot)$



Basis und Dimension

$$S \equiv \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \} \stackrel{?}{=} V \quad (1)$$

$\text{Span}(S) \equiv$ alle möglichen Linearkombination der Vektoren $\{ \vec{v}_j \}$ (2)

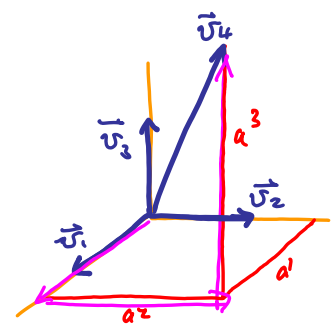
'Linear unabhängig', falls $\sum_j a^j \vec{v}_j = \vec{0} \Rightarrow a^j = 0 \quad \forall j$ (3)

S ist 'vollständig', falls $\text{span}(S) = V$ (4)

S bildet 'Basis', falls S vollständig und linear unabhängig ist. (5)

Standardbasis in \mathbb{R}^n : $\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ j-Position i-Komponente v. j-tem Basisvektor: $(\vec{e}_j)^i = \delta^i_j$ (6)

'Kronecker-delta' Symbol: $\delta^i_j \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$ (7)



Zusammenfassung L3

ZL3a

Euklidische Vektorräume (V: reeller Vektorraum)

Inneres Produkt: $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ Zahl

(i) Symmetrie, (ii-iii) Linearität bzgl. + und • (iv) Positiv definit

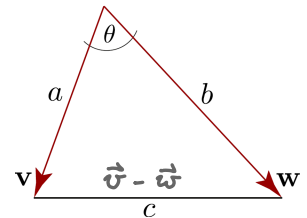
Wichtigstes Beispiel: Skalarprodukt in \mathbb{R}^n

$$\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \vec{u} \cdot \vec{v} \equiv u^1 v^1 + \dots + u^n v^n = u^i v^i$$

Norm: $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}, \vec{v} \mapsto \|\vec{v}\| \equiv \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$

Cauchy-Schwarz Ungleichung (CSU): $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$

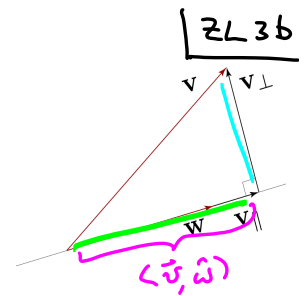
Winkel: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \equiv \cos(\angle(\vec{v}, \vec{w})) \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$



Einheitsvektor: $\hat{w} \equiv \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$

'Projektion' v. \vec{v} auf \vec{w} : $\vec{v}_{\parallel} \equiv \hat{w} \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle$ ($\parallel \vec{w}$)

'Orthogonales Komplement' zu \vec{w} : $\vec{v}_{\perp} \equiv \vec{v} - \hat{w} \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle$ ($\perp \vec{w}$)



Orthonormalbasis: vollständig, normiert, orthogonal: $\{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}, \langle \vec{e}'_i, \vec{e}'_j \rangle = \delta_{ij}$

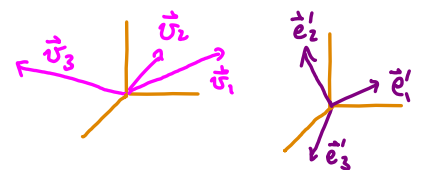
Zerlegung nach Komponenten in Orthonormalbasis: $\vec{x} = \vec{e}_i x^i, x^i = \langle \vec{e}_i, \vec{x} \rangle$

Gram-Schmidt-Verfahren:

liefert orthonormale Vektoren mit demselben Span:

$$\text{span} \{ \vec{e}'_j \} \equiv \text{span} \{ \vec{v}_j \}$$

$$\vec{v}_{1,\perp} \equiv \vec{v}_1, \vec{e}'_1 \equiv \frac{\vec{v}_{1,\perp}}{\|\vec{v}_{1,\perp}\|}$$
$$\vec{v}_{j,\perp} \equiv \vec{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \vec{e}'_i \langle \vec{e}'_i, \vec{v}_j \rangle, \vec{e}'_j \equiv \frac{\vec{v}_{j,\perp}}{\|\vec{v}_{j,\perp}\|}$$



Kovariante Notation für nicht-orthonormale Basis

Index oben: kontravariant (kon)
Index unten: kovariant (ko)

ZL3c

Metrik einer ko-Basis $\{\hat{v}_j\}$ von V : $\langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle = g_{ij}$ · Inverse Metrik erfüllt $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$

Kon-Basis: $\hat{v}^i \equiv g^{ij} \hat{v}_j$ ist orthonormal zur ko-Basis: $\langle \hat{v}^i, \hat{v}^j \rangle = \delta^i_j$

Zerlegung nach Komponenten: $\hat{x} = \hat{v}_i x^i = \hat{v}_i \langle \hat{v}^i, \hat{x} \rangle_V$ ko-Basis
 $= x_j \hat{v}^j = \langle \hat{x}, \hat{v}^j \rangle_V \hat{v}^j$ kon-Komponenten
 kon-Basis
 ko-Komponenten

$\hat{v}_j = g_{ji} \hat{v}^i = \hat{v}^i g_{ij}$, $x_i = g_{ij} x^j = x^j g_{ji}$, g_{ij} zieht Index runter
 $\hat{v}^i = g^{ij} \hat{v}_j = \hat{v}_j g^{ji}$, $x^j = g^{ji} x_i = x_i g^{ij}$, g^{ij} zieht Index hoch

Inneres Produkt in V : \iff Verallgemeinertes Skalarprodukt in \mathbb{R}^n

$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_V = x^i g_{ij} y^j = x^i y_i = x_j y^j \equiv \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}^n}$

Für Orthonormalbasis, mit $g_{ij} = \delta_{ij}$, ist Unterscheidung zwischen Index oben/unten nicht nötig:

$x_i = \delta_{ij} x^j = x^i$, $g^{ij} = \delta^{ij}$, $\hat{v}^i = \delta^{ij} \hat{v}_j = \hat{v}_i$.

Deswegen: wenn möglich eine Orthonormalbasis wählen!

Zusammenfassung: L4 Vektorprodukt

ZL4

$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$
 $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} \equiv \begin{pmatrix} v^2 w^3 - v^3 w^2 \\ v^3 w^1 - v^1 w^3 \\ v^1 w^2 - v^2 w^1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$

Geometrische Def:

$\vec{v} \perp \vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$

$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \theta$

Daumen: $\vec{v} \times \vec{w}$ Mittelfinger: \vec{w}
 Zeigefinger: \vec{v}

$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}^k$

Levi-Civita: ϵ_{ijk} komplett antisymmetrisch

$(\vec{v} \times \vec{w})_k = v^i w^j \epsilon_{ijk}$

$\epsilon_{ijk} \epsilon^{mjk} = \delta_i^m \delta_j^n - \delta_i^n \delta_j^m$

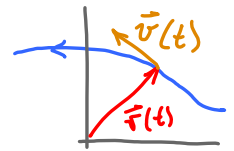
Eigenschaften: antisymmetrisch, distributiv, nicht assoziativ, Identitäten...

Spatprodukt: $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| =$ Volumen v. Parallelepiped

Zusammenfassung V1: Kurven

Z V 1

'Kurve': $\gamma = \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \}$ wobei $\vec{r} : I = (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^d$
 $t \mapsto \vec{r}(t)$



Ort entlang Kurve: $\vec{r}(t) = \vec{e}_j x^j(t)$

Kurvengeschwindigkeit: $\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{e}_j \dot{x}^j(t) = \vec{v}(t)$ liegt 'tangential' zur Kurve

Kurvenlänge: $L[\gamma] = \int_0^\tau dt \|\dot{\vec{r}}(t)\|$ unabhängig von Parametrisierung des Weges

Bogenlänge nach Zeit t: $s(t) \equiv \int_0^t du \|\dot{\vec{r}}(u)\|$ $\gamma = \vec{r}(0, \tau)$

Natürliche Parametrisierung durch Bogenlänge: $\vec{r}_L : (0, L(\gamma)) \rightarrow \mathbb{R}^d, s \mapsto \vec{r}_L(s) \equiv \vec{r}(t(s)), \|\frac{d}{ds} \vec{r}_L(s)\| = 1$

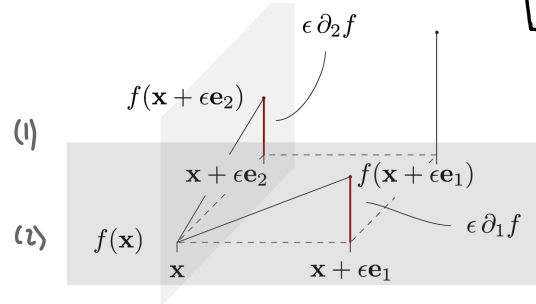
Für Vektorfeld: $\vec{f} : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^d, \vec{r} \mapsto \vec{f}(\vec{r})$
 (vektorwertige Funktion von \vec{r})

Linienintegral: $\int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{f} \equiv \int_0^\tau dt \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}$ unabhängig von Parametrisierung des Weges

Zusammenfassung C3: Partielle Ableitungen

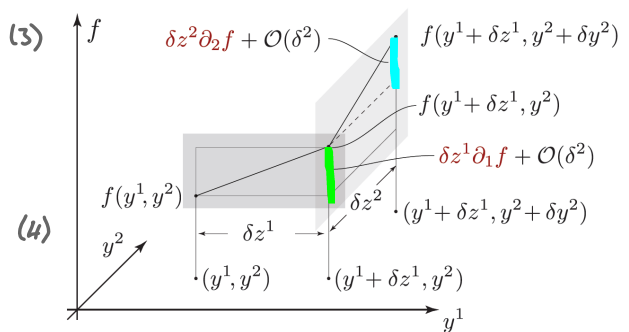
Z C 3

Partielle Ableitung: $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
 $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{x} + \delta \vec{e}_i) - f(\vec{x})]$
 $\equiv \partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i f(\vec{x})$



Satz v. Schwarz: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$

$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \vec{y} \mapsto f(\vec{y})$
 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y})] = \partial_j f(\vec{y}) z^j$



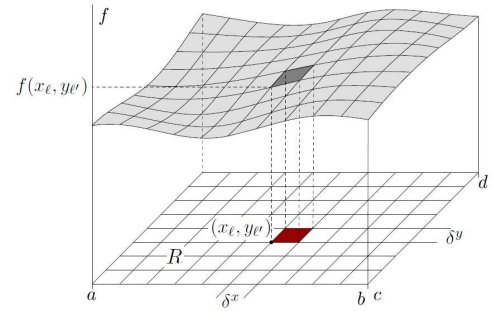
$\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, \vec{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 Allgemeine Kettenregel: $\frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial g^j} \frac{\partial g^j(\vec{x})}{\partial x^k}$ $i = 1, \dots, m$
 $k = 1, \dots, n$ (5)

Zusammenfassung: C4 Mehrdimensionale Integration (Kartesisch)

ZC4a

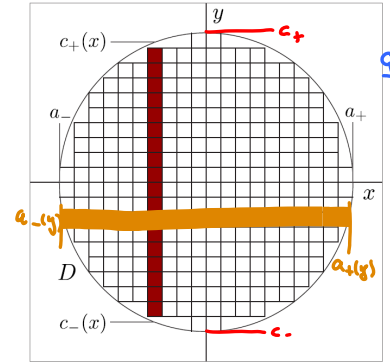
Integration in \mathbb{R}^2

$$\int_a^b dx \int_c^d dy f(x,y) \equiv \lim_{\delta^x, \delta^y \rightarrow 0} \delta^x \delta^y \sum_l \sum_{l'} f(x_l, y_{l'})$$



Fubini: Integrationsreihenfolge ist egal:

$$\int_a^b dx \int_{y_-(x)}^{y_+(x)} dy f(x,y) = \int_{y_a}^{y_b} dy \int_{x_-(y)}^{x_+(y)} dx f(x,y)$$



Für das "innere" (zweite) Integral sind die Grenzen abhängig von der "äußeren"

Analog in 3D: $\int_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} dx dy dz f(x,y,z) = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x,y,z)$
 Reihenfolge dieser Integrale ist beliebig

Zusammenfassung: V5 Krummlinige Koordinaten

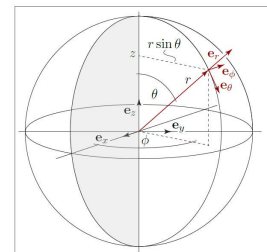
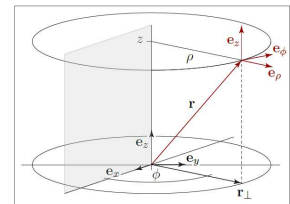
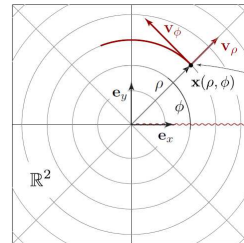
ZV2a

Kartesisch: $\vec{r} = \sum_{i=1}^d \vec{e}_i x^i$

Polar (2D): $\vec{r} = \vec{e}_x \underbrace{\rho \cos \phi}_{x^1} + \vec{e}_y \underbrace{\rho \sin \phi}_{x^2}$
 $\gamma^1 = \rho, \gamma^2 = \phi$

Zylinder (3D): $\vec{r} = \vec{e}_x \rho \cos \phi + \vec{e}_y \rho \sin \phi + \vec{e}_z z$

Kugel (3D): $\vec{r} = \vec{e}_x r \sin \theta \cos \phi + \vec{e}_y r \sin \theta \sin \phi + \vec{e}_z r \cos \theta$



Koordinatenlinie: $\vec{r}_{j,\vec{r}}(y^j) \equiv \vec{r}(y^1, \dots, y^j, \dots, y^d)$
 $\vec{r}_i(y^i) = \vec{r}_\rho(\rho), \vec{r}_\phi(\phi)$
 (Note: y^j is varied, others are constant)

Koordinatenbasis: $\{\vec{v}_{j,\vec{r}}\}$ $\vec{v}_{j,\vec{r}} \equiv \frac{d}{dy^j} \vec{r}_j(y^j) = \partial_j \vec{r}(\vec{y})$
 erinnert an Ortsabhängigkeit, wird meist nicht explizit angezeigt

Metrik: $g_{ij,\vec{r}} \equiv \langle \vec{v}_{i,\vec{r}}, \vec{v}_{j,\vec{r}} \rangle$

Lokale Basis: $\{\vec{e}_{j,\vec{r}}\}$ $\vec{e}_{j,\vec{r}} \equiv \frac{\vec{v}_{j,\vec{r}}}{\|\vec{v}_{j,\vec{r}}\|} = \frac{\vec{v}_{j,\vec{r}}}{\sqrt{g_{jj,\vec{r}}}}$

Kartesisch: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \quad \vec{r} = \sum_i \vec{e}_i x^i$

Polar (2D):

$$\begin{aligned} \vec{v}_\rho &= \vec{e}_\rho, & \vec{e}_\rho &= \vec{e}_x \cos \phi + \vec{e}_y \sin \phi, & g_{\rho\rho} &= 1, & \vec{r} &= \vec{e}_\rho \rho \\ \vec{v}_\phi &= \rho \vec{e}_\phi, & \vec{e}_\phi &= -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi, & g_{\phi\phi} &= \rho^2, & \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{e}}_\rho \rho + \vec{e}_\phi \rho \dot{\phi} \end{aligned}$$

Zylinder (3D):

$$\begin{aligned} \vec{v}_\rho &= \vec{e}_\rho, & \vec{e}_\rho &= \vec{e}_x \cos \phi + \vec{e}_y \sin \phi, & g_{\rho\rho} &= 1, & \vec{r} &= \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z \\ \vec{v}_\phi &= \rho \vec{e}_\phi, & \vec{e}_\phi &= -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi, & g_{\phi\phi} &= \rho^2, & \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{e}}_\rho \rho + \vec{e}_\phi \rho \dot{\phi} + \dot{\vec{e}}_z z \\ \vec{v}_z &= \vec{e}_z, & \vec{e}_z &= \vec{e}_z, & g_{zz} &= 1, & & \end{aligned}$$

Kugel (3D):

$$\begin{aligned} \vec{v}_r &= \vec{e}_r, & \vec{e}_r &= \vec{e}_x \sin \theta \cos \phi + \vec{e}_y \sin \theta \sin \phi + \vec{e}_z \cos \theta, & g_{rr} &= 1, & \vec{r} &= \vec{e}_r r \\ \vec{v}_\theta &= r \vec{e}_\theta, & \vec{e}_\theta &= \vec{e}_x \cos \theta \cos \phi + \vec{e}_y \cos \theta \sin \phi - \vec{e}_z \sin \theta, & g_{\theta\theta} &= r^2, & \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{e}}_r \dot{r} + \vec{e}_\theta r \dot{\theta} \\ \vec{v}_\phi &= r \sin \theta \vec{e}_\phi, & \vec{e}_\phi &= -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi, & g_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2 \theta, & & + \vec{e}_\phi r \dot{\phi} \sin \theta \end{aligned}$$

Alle diese lokalen Basen sind orthonormal: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

Für Zylinder & Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}^k$$

zyklische Reihenfolge:

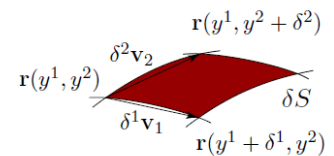


Zusammenfassung: 2D-Flächenintegrale für Fläche in d = 2,3 Dimensionen

$$\vec{r}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \mapsto \vec{r}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x^1(\vec{y}) \\ \vdots \\ x^n(\vec{y}) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\int_S f(\vec{r}) dS = \int_U \int_{\mathcal{U}} \|\partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r}\| f(\vec{r}(y^1, y^2)) dy^1 dy^2 \quad (2)$$

für krummlinig-orthogonale Koord.: $\|\partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r}\| = v_{y^1} v_{y^2} = \sqrt{g_{11} g_{22}} \quad (3)$



Integrationsmaß: Polar: $dS = \rho d\rho d\phi$ (4) Kugel: $dS = d\theta d\phi r^2 \cdot \sin \theta$ (5)

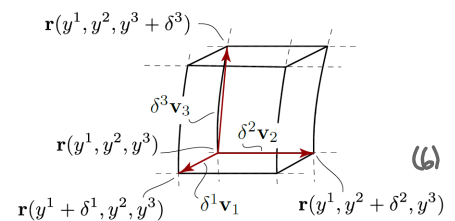
Zusammenfassung: 3D Volumenintegrale

$$\vec{r}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3, \quad \vec{y} \mapsto \vec{r}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x^1(\vec{y}) \\ x^2(\vec{y}) \\ x^3(\vec{y}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\iiint_V f(\vec{r}) dV = \iiint_U \|\partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r} \cdot \partial_{y^3} \vec{r}\| f(\vec{r}(y^1, y^2, y^3)) dy^1 dy^2 dy^3 \quad (7)$$

für krummlinig-orthogonale Koord.: $\|\partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r} \cdot \partial_{y^3} \vec{r}\| = v_{y^1} v_{y^2} v_{y^3} = \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}} \quad (8)$

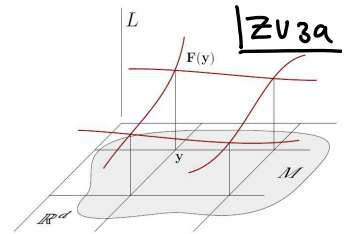
Integrationsmaß: Zylinder: $dV = \rho d\rho d\phi dz$ (9) Kugel: $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ (10)



Zusammenfassung V3.1 Felder

$$\vec{F}: M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow L \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{y} = (y^1, \dots, y^d)^T \mapsto \vec{F}(\vec{y}) = (F^1(\vec{y}), \dots, F^n(\vec{y}))^T$$



V3.2 Skalarfelder, Gradient

Totales Differential: differentielle Änderung von f bei \vec{r} durch einen \vec{u} -Schritt:

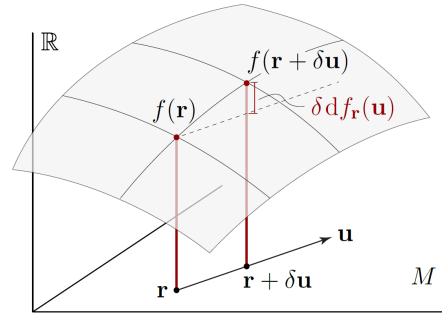
$$df_{\vec{r}}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{u} \mapsto df_{\vec{r}}(\vec{u}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{r} + \delta \vec{u}) - f(\vec{r})]$$

$$df_{\vec{y}}(\vec{u}) = \partial_{y^k} f(\vec{y}) u^k = \partial_{\vec{r}} f \cdot \vec{u} \equiv \vec{\nabla} f_{\vec{y}} \cdot \vec{u}$$

Gradient in kartesischen Koordinaten: $\partial^i = \partial_i$

$$\vec{\nabla} f: M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

'grad f' $\vec{x} \mapsto \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \equiv \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial^d f(\vec{x}) \end{pmatrix} \equiv \vec{e}_i (\vec{\nabla} f)^i(\vec{x})$



$\vec{\nabla} f_{\vec{y}}$ zeigt in Richtung maximaler Steigung v. f , steht \perp auf den 'Höhenflächen' v. f

In krummlinigen Koordinaten: $\vec{\nabla}_r f = \vec{e}_i (\vec{\nabla} f)^i = \vec{e}_i g^{ij} \partial_j f$ (in Koordinatenbasis)

In krummlinig-orthogonalen Koordinaten: $= \vec{e}_i \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \partial_i f$ (in lokaler Basis)

$g_{i \neq j} = 0, \quad g^{ii} = 1/g_{ii}$

Zusammenfassung V3.3: Gradientenfeld

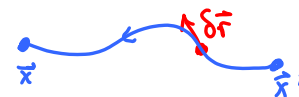
ZV3b

Gradientenfeld: $\vec{\nabla} \varphi: M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \mapsto \vec{\nabla} \varphi_{\vec{x}}$ (1)

$\left(\int_{\gamma: \vec{x}' \rightarrow \vec{x}} d\vec{r} \cdot \vec{u} \text{ ist wegunabhängig } \forall \vec{x}', \vec{x} \in M \right) \iff \oint d\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$ für geschlossenen Weg (1)

$\left(\vec{u} \text{ ist ein Gradientenfeld} \right) \iff \left(\partial_j u^i - \partial_i u^j = 0, \text{ und } M \text{ ist einfach zusammenhängend} \right)$

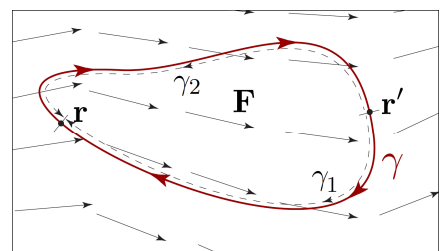
Konkret: $\int_{\gamma: \vec{x}' \rightarrow \vec{x}} d\vec{r} \cdot \vec{u} = \int_{\gamma: \vec{x}' \rightarrow \vec{x}} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}')$ (2)



Konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi_{\vec{r}}$ (5) ist ein Gradientenfeld:

$$W[\gamma] = \oint d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0 \quad (6)$$

$$\iff W[\gamma_1] = W[\gamma_2] \quad (7)$$



Arbeit von x' nach x ist unabhängig vom Weg!

geschlossener Weg: $\delta = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$

Zusammenfassung V3.2,4-6: Nabla, Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace

ZV3c

Skalarfeld: $\varphi(\vec{r})$; Vektorfeld: $\vec{u}(\vec{r})$ (1)

Partielle Ableitung: $\partial_1 \varphi = \frac{\partial \varphi(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^1} \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [\varphi(x^1 + \delta, x^2, x^3) - \varphi(x^1, x^2, x^3)]$ (2)

Totales Differential: $d_{\vec{x}} f(\vec{u}) = \partial_j f(\vec{x}) u^j = \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \cdot \vec{u}$ (3)

Gradient: $\vec{\nabla} \varphi_{\vec{x}} = \vec{e}_i \partial^i \varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial^1 \varphi(\vec{x}) \\ \partial^2 \varphi(\vec{x}) \\ \partial^3 \varphi(\vec{x}) \end{pmatrix}$ (4)

Nabla-Operator: $\vec{\nabla} = \vec{e}_i \partial^i = \vec{e}_1 \partial^1 + \vec{e}_2 \partial^2 + \vec{e}_3 \partial^3$ (5)
 (Vektor-Diff.-Operator) Laplace-Operator: $\vec{\nabla}^2 = \Delta = \partial_i \partial^i$ (6)

Divergenz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial_i u^i = \partial_1 u^1 + \partial_2 u^2 + \partial_3 u^3$ (7)

Rotation: $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{e}_i \varepsilon^{ijk} \partial_j u_k = \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix}$ (8)
 (alle Indizes unten)

Gradiententelder sind 'wirbelfrei': $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0$ (9) Wirbelfelder sind 'quellfrei': $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$ (10)

Zusammenfassung: L5.1-5.3 Lineare Abbildungen und Matrizen

ZL5a

Die Abbildung $F: V \rightarrow W$ ist 'linear', falls $F(a\vec{v} + b\vec{w}) = aF(\vec{v}) + bF(\vec{w})$ (1)

Für $V = \mathbb{C}^n, W = \mathbb{C}^m$ hat eine lineare Abbildung die Form:

$A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m, \vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x},$ mit $y^i = a_j^i x^j = \vec{A}^i \cdot \vec{x}$ (2)
 $= A \cdot \vec{x}$

m x n Matrix:

$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_j & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & \dots & A^i_j & \dots & A^i_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^m_1 & \dots & A^m_j & \dots & A^m_n \end{pmatrix} = \{A^i_j\}$ (3)
 Spalte j: $\vec{A}_j \equiv \begin{pmatrix} A^1_j \\ \vdots \\ A^i_j \\ \vdots \\ A^m_j \end{pmatrix}$ (4)
 Reihe i: $\vec{A}^i \equiv (A^i_1, \dots, A^i_j, \dots, A^i_n)$ (5)

Abbildung der Standardbasis: $\vec{e}_j \xrightarrow{A} A\vec{e}_j = \vec{A}_j = \text{Spalte } j$ (6)

Komplexe (m x n)-Matrizen bilden $m \cdot n$ dim. Vektorraum, $\simeq \mathbb{C}^{m \cdot n}$ | ZL5b

$$\text{mat}(\mathbb{C}, m, n) \equiv \{A = \{A^i_j\} : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n, A^i_j \in \mathbb{C}\} \quad (1)$$

mit Matrixaddition, (elementenweise) $(A, B) \mapsto A + B, (A+B)^i_j \equiv A^i_j + B^i_j \quad (2)$

und Skalarmultiplikation, (elementenweise) $(\lambda, A) \mapsto \lambda A, (\lambda A)^i_j \equiv \lambda A^i_j \quad (3)$

Verknüpfung von zwei linearen Abbildungen \Rightarrow Matrixmultiplikation

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^m \xrightarrow{B} \mathbb{C}^l \quad (4)$$

$$\vec{x} \xrightarrow{A} \vec{y} = A \cdot \vec{x} \xrightarrow{B} \vec{z} = B \cdot \vec{y} = B \cdot (A \cdot \vec{x}) \equiv C \cdot \vec{x} \quad (5)$$

(5e.3,4)

$$C^k_j = B^k_i A^i_j = (\vec{B}^k)_i (\vec{A}_j)^i = \vec{B}^k \cdot \vec{A}_j \quad \begin{cases} k = 1, \dots, l \\ i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (6)$$

(Zeile k von B) * (Spalte j von A)

Matrixmultiplikation ist assoziativ & distributiv, aber nicht kommutativ!

Zusammenfassung: L5.5-6 Basistransformationen | ZL5c

Zwei Vektorräume: $V = \text{span}\{\hat{v}_j\}, W = \text{span}\{\hat{w}_i\} \quad (1)$

Allgemeine lineare Abbildung: $\hat{A} : V \rightarrow W \quad \hat{x} = \hat{v}_j x^j \mapsto \hat{y} = \hat{w}_i y^i \quad (2)$

Matrixdarstellung v. A: $\hat{A}(\hat{v}_j) = \hat{w}_i A^i_j \quad \vec{y} = A \cdot \vec{x}, A = \{A^i_j\} \quad (3)$

In Standardbasis: A bildet Basisvektor \vec{e}_j ab auf: $\vec{A}_j = \text{Spalte } j \text{ von } A \quad (4)$

Zwei Basen für denselben Raum: $V = \text{span}\{\hat{v}_j\} = \text{span}\{\hat{v}'_{i'}\} \quad (5)$

Basistransformation: $T : V \rightarrow V \quad \hat{v}_j = \hat{v}'_{i'} T^{i'}_j \quad (6)$

Matrixdarstellung v. T: $T = \{T^{i'}_j\} \quad x^{i'} = T^{i'}_j x^j, \vec{x}' = T \cdot \vec{x} \quad (7)$

Darstellung v. altem Basisvektor \hat{v}_j in neuer Basis: $\vec{T}_j = \text{Spalte } j \text{ von } T \quad (8)$

Inverse Transformation: $T^{-1} = \{(T^{-1})^{i'}_j\} \quad \hat{v}'_{i'} = \hat{v}_j (T^{-1})^{i'}_j, x^j = (T^{-1})^{i'}_j x^{i'} \quad (9)$

Darstellung v. neuem Basisvektor $\hat{v}'_{i'}$ in alter Basis: $(\vec{T}^{-1})_{i'} = \text{Spalte } i' \text{ von } T^{-1} \quad (10)$

Bezug zwischen $\vec{y} = A \cdot \vec{x} \quad (11)$ und $\vec{y}' = A' \cdot \vec{x}' \quad (12)$: $A' = T \cdot A \cdot T^{-1} \quad (13)$

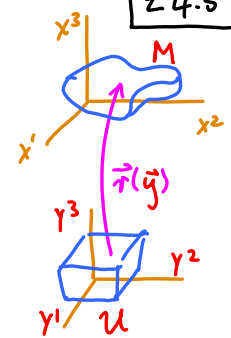
Krummlinige Integration in n Dimensionen

Z4.5

$$\vec{r}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{y} \mapsto \vec{r}(\vec{y}) \equiv \vec{x}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x^1(y^1, \dots, y^n) \\ \vdots \\ x^n(y^1, \dots, y^n) \end{pmatrix}$$

krummlinig \vec{y} $\xrightarrow{\vec{r}}$ \vec{x} kartesisch



n-dimensionales
'Volumenelement':

$$dV^n = dy^1 \dots dy^n \cdot \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right|$$

'Jacobi-Determinante', 'Funktionaldeterminante': = Volumenelement, welches von Koordinatenbasisvektoren $\vec{v}_j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial y^j}$ aufgespannt wird:

$$\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} \right| \equiv \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right| = \det \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial y^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial y^n} \right] \equiv \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^2}{\partial y^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \frac{\partial x^n}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}$$

n-dimensionales Integral:

$$\int_M dx^1 \dots dx^n f(x^1, \dots, x^n) = \int_U dy^1 \dots dy^n \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right| f(x^1(\vec{y}), \dots, x^n(\vec{y}))$$

Das ist Verallgemeinerung der Substitutionsregel in 1D:

$$\int dx f(x) = \int dy \left| \frac{dx}{dy} \right| f(x(y))$$

Zusammenfassung: L7 Diagonalisieren, Eigenwerte, Eigenvektoren

ZL7

Eigenwertgleichung:

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

Eigenwert λ
Eigenvektor \vec{v}

(1)

Bedingung an EW:

$$0 = \det(A - \lambda \mathbb{1}) := P_A(\lambda)$$

charakteristisches
Polynom

(2)

Für $A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist $P_A(\lambda)$ ein Polynom v. Grad n , mit n Nullstellen. diese entsprechen den n Eigenwerten v. A

(3)

Wenn EW λ_j bekannt ist, finde dazugehörigen EV \vec{v}_j durch Lösen des linearen Gleichungssystems:

$$(A - \lambda_j \mathbb{1}) \vec{v}_j = \vec{0}$$

(4)

Falls n linear unabhängige EV existieren, wird A diagonalisiert durch,

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

(5)

wobei T die EV als Spaltenvektoren hat:

$$T = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$$

(6)

Determinante = Produkt der Eigenwerte:

$$\det(A) = \prod_j \lambda_j$$

(7)

Spur = Summe der Eigenwerte:

$$S_p(A) = \sum_j \lambda_j$$

Zusammenfassung: L8.1 Unitäre/orthogonale Matrizen

ZL 8a

Reelles Skalarprodukt (L3.1): $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u^i \delta_{ij} v^j$ $u^i, v^j \in \mathbb{R}$

Komplexes Skalarprodukt (L3.4): $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{u^i} \delta_{ij} v^j$ $u^i, v^j \in \mathbb{C}$

Komplexe Matrix:

$$A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$$

$$(A^{\dagger})^i_j = \overline{A^j_i}$$

Adjungierte Matrix:

$$A^{\dagger} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$$

$$(A^{\dagger})^i_j = (A^{\dagger})^j_i \equiv \overline{(A)^j_i}$$

in Ortnormalbasis

Transponierte Matrix:

$$A^T \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$$

$$(A^T)^i_j = (A^T)^j_i \equiv (A)^j_i$$

in Ortnormalbasis

$\text{mat}(\mathbb{C}, n, n) \ni U$ ist 'unitär' falls $U^{\dagger} \cdot U = \mathbf{1}$ (äquivalent) $U^{-1} = U^{\dagger}$

Komplexes Skalarprodukt invariant:

$$\langle U \cdot \vec{v}, U \cdot \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$\text{mat}(\mathbb{R}, n, n) \ni O$ ist 'orthogonal' falls $O^T \cdot O = \mathbf{1}$ (äquivalent) $O^{-1} = O^T$

Reelles Skalarprodukt invariant:

$$\langle O \cdot \vec{v}, O \cdot \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Spalten (oder Zeilen-)vektoren einer unitären oder orthogonalen Matrix bilden eine orthonormierte Basis.

$$U = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \quad \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Zusammenfassung: L8.1 Unitäre/orthogonale Gruppen

ZL 8b

'Unitäre Gruppe':

$$U(n) = \{ U \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n); U U^{\dagger} = \mathbf{1} \}$$

'Orthogonale Gruppe':

$$O(n) = \{ O \in \text{mat}(\mathbb{R}, n, n); O^T O = \mathbf{1} \}$$

'spezielle unitäre Gruppe':

$$SU(n) = \{ U \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n); U^{\dagger} U = \mathbf{1}, \det U = 1 \}$$

'spezielle orthogonale Gruppe':

$$SO(n) = \{ O \in \text{mat}(\mathbb{R}, n, n); O^T O = \mathbf{1}, \det O = 1 \}$$

Zusammenfassung: L8.2 Hermitesche/symmetrische Matrizen

$A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'hermitesch', falls $A \stackrel{!}{=} A^{\dagger} \Rightarrow A^i_j \stackrel{!}{=} (A^{\dagger})^i_j \equiv \overline{A^j_i}$

Für hermitesche Matrizen gilt: $\langle \vec{x}, A \vec{x} \rangle = \langle A \vec{x}, \vec{x} \rangle$ und $\langle \vec{x}, A \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$

$A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'symmetrisch', falls $A \stackrel{!}{=} A^T \Rightarrow A^i_j \stackrel{!}{=} (A^T)^i_j \equiv A^j_i$

Für symmetrische Matrizen gilt:

$$\langle \vec{x}, A \vec{x} \rangle = \langle A \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

(8)

Zusammenfassung: L8.2 Diagonalisierung v. hermiteschen und symm. Matrizen

ZL8c

$A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'hermitesch', falls $A \stackrel{!}{=} A^\dagger \Rightarrow A_{ij} = (A^\dagger)_{ji} = \overline{A_{ji}}$
 in Orthonormalbasis

$A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'symmetrisch', falls $A \stackrel{!}{=} A^T \Rightarrow A_{ij} = (A^T)_{ji} = A_{ji}$
 (oder \mathbb{R})

Für alle hermiteschen (insb. auch für alle reelle symmetrischen) Matrizen gilt:

- sie sind immer diagonalisierbar
- alle Eigenwerte sind reell: $\lambda = \bar{\lambda}$
- es lässt sich immer eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren finden $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal: $(\lambda_2 - \lambda_1) \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle = 0$

Für $\left\{ \begin{array}{l} \text{hermitesche} \\ \text{reell symmetrische} \end{array} \right\}$ Matrizen ist $T \left\{ \begin{array}{l} \text{unitär: } T^{-1} = T^\dagger \\ \text{orthogonal: } T^{-1} = T^T \end{array} \right.$

$T^\dagger \cdot A \cdot T = D \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{v}_1^\dagger \\ \vdots \\ \vec{v}_n^\dagger \end{bmatrix} \cdot A \cdot (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$
 adjungierte EV als Zeilenvektoren EV als (g.b.) EW als Diagonalelemente

Zusammenfassung: C5.1-3,5 Taylor-Reihen

ZC5.1-3

'Taylor-Reihe' v. $f(x)$ um $x=y$:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-y)^n f^{(n)}(y)$

Wichtige Beispiele:

$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (2) $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} (-z)^{n+1}$, für $|z| < 1$


$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$, (4) $\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ für $z \in \mathbb{C}$

$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Euler-de Moivre:

$e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (7) Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$ (8)

Polardarstellung einer komplexen Zahl:

$z = x + iy = |z| e^{i\phi}$ (9) $\begin{cases} |z|^2 = x^2 + y^2, & (10) \\ \tan \phi = y/x & (11) \end{cases}$ 

Zusammenfassung: L7.4 Funktionen von MatrizenZ L7.4aSei $f(z)$ eine beliebige komplexe Funktion mit wohldefinierter Taylor-Reihe,

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Erweiterung als Matrix-Funktion:

$$f: \text{mat}(\mathbb{C}, n, n) \rightarrow \text{mat}(\mathbb{C}, n, n), \quad A \mapsto f(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n$$

Falls die Matrix diagonalisierbar ist, $A = T D T^{-1}$ mit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

gilt:

$$f(A) = T f(D) T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & f(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Zusammenfassung: C7.2 Separable DifferentialgleichungenZ C7.2

Separable DG:

(f- und t-Abhängigkeit faktorisiert)

$$d_t f(t) = g(t) h(f(t)) \quad (1)$$

$$\text{mit } f(t_0) = f_0 \quad (1')$$

Lösungsweg: Trennung der Variablen

Trennen:

$$\frac{df}{h(f)} = g(t) dt \quad (2)$$

Integrieren:

$$\int_{f_0 = f(t_0)}^{f = f(t)} \frac{d\tilde{f}}{h(\tilde{f})} = \int_{t_0}^t g(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (3)$$

Stammfunktionen:

$$H(f) - H(f_0) = G(t) - G(t_0) \quad (4)$$

Nach f auflösen:

$$f(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(f_0)) \quad (5)$$

Zusammenfassung: C7.3 Lineare DG 1. Ordnung

z C7.3

Lineare DG: $\dot{f}(t) = g(t) f(t) + h(t)$, mit $f(0) = f_0$

falls $h(t) = 0$: homogen

falls $h(t) \neq 0$: inhomogen

Allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DG:

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t)$$

Allgemeine homogene Lösung erfüllt homogene DG:

$$\dot{f}_h(t) = g(t) f_h(t)$$

partikuläre Lösung erfüllt inhomogene DG:

$$\dot{f}_p(t) = g(t) \cdot f_p(t) + h(t)$$

homogene Lösung (Trennung d. Variablen):

$$f_h(t) = f_0 e^{\Phi(t)}$$

mit

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^t g(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

partikuläre Lösung (Variation d. Konstanten):

$$f_p(t) = c(t) e^{\Phi(t)}$$

mit

$$c(t) = \int_{t_0}^t h(\tilde{t}) e^{-\Phi(\tilde{t})} d\tilde{t}$$

Zusammenfassung: C7.4 Homogenes System von linearen DG 1. Ordnung

z C7.4a

$$d_t \vec{f}(t) = A(t) \cdot \vec{f}(t)$$

$\in \mathbb{C}^n \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$

Superpositionsprinzip (SP) für lineare, homogene DG:

falls $d_t \vec{f}_j(t) = A(t) \cdot \vec{f}_j(t)$ ($j=1,2$) dann $d_t \vec{f}(t) = \lambda_1 \vec{f}_1(t) + \lambda_2 \vec{f}_2(t)$

Für konstanten Koeffizienten:

exp-Ansatz: $\vec{f}(t) = \vec{v} e^{\lambda t}$
 \leftarrow Zeitabhängigkeit nur im Exponenten!
 \leftarrow zeitunabhängiger Vektor, $\in \mathbb{C}^n$

führt auf Eigenwertgleichung: $A \vec{v} = \lambda \vec{v}$

Falls A diagonalisierbar ist, ist die allgemeine Lösung die Summe über alle Eigenlösungen:

$$\vec{f}(t) = \sum_j \vec{v}_j e^{\lambda_j t} c_j \quad \text{mit} \quad A \cdot \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j, \quad j=1, \dots, n$$

$$\vec{c} = T^{-1} \cdot \vec{f}(0), \quad T = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$$

Allgemeinerer Exponentialansatz: (funktioniert auch dann, wenn A nicht diagonalisierbar ist):

$$\vec{f}(t) = e^{A t} \vec{f}_0$$

Zusammenfassung: Inhomogene lineare DG 1. Ordnung

ZC7.4b

Lineare DG:

$$\in \mathbb{C}^n \rightsquigarrow \dot{\vec{x}}(t) = A(t) \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t)$$

$\leftarrow \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$

falls = 0 : homogen

falls $\neq 0$: inhomogen

Allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DG:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)$$

Allgemeine homogene Lösung:

$$\dot{\vec{x}}_h(t) = A(t) \cdot \vec{x}_h(t)$$

(irgendeine) Partikuläre Lösung:

$$\dot{\vec{x}}_p(t) = A(t) \cdot \vec{x}_p(t) + \vec{b}(t)$$

1D (n=1):

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

homogene Lösung (Trennung d. Variablen):

$$x_h(t) = x_0 e^{\Phi(t)}$$

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^t a(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

partikuläre Lösung (Variation d. Konstanten):

$$x_p(t) = c(t) e^{\Phi(t)}$$

mit:

$$c(t) = \int_{t_0}^t b(\tilde{t}) e^{-\Phi(\tilde{t})} d\tilde{t}$$

Zusammenfassung: Inhomogene lineare DG mit konstanten Koeffizienten

ZC7.4c

$$\dot{\vec{x}}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t), \quad A = A(\lambda) \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n), \quad \vec{b}(t) \in \mathbb{C}$$

(i) Suche Lösung für homogene DGL per Exponential-Ansatz:

e-Ansatz: $\vec{x}_h(t) = \vec{v} e^{\lambda t}$

Zeitabhängigkeit nur im Exponenten!
zeitunabhängiger Vektor, $\in \mathbb{R}^n$

Ergebnis: Allg. Lösung der homogenen DGL ist Summe über alle Eigenlösungen:

$$\vec{x}_h(t) = \sum_j c_j^i \vec{v}_j e^{\lambda_j t} \quad \text{mit} \quad A \cdot \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j, \quad j=1, \dots, n$$

durch Anfangsbedingungen bestimmt Eigenwertproblem!

(ii) Partikuläre Lösung für inhomogene DGL: per Variation der Konstanten

$$\vec{x}_p(t) = \sum_j c_p^j(t) \vec{v}_j e^{\lambda_j t}, \quad (\text{zerlegt in Eigenbasis von } A)$$

mit $c_p^j(t) = \int_{t_0}^t b^j(\tilde{t}) e^{-\lambda_j \tilde{t}} d\tilde{t}$ und $\vec{b}(t) = \sum_j b^j(t) \vec{v}_j$

(iii) Allgemeine Lösung:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)$$

(6)

Zusammenfassung: C5.4 Taylor-Entwicklung zur Lösung v. Gleichungen

ZC 5.4,5

Löse die Gl. $0 = F(y(x), x)$ mittels einer Reihenentwicklung

für die gesuchte Funktion $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y_n x^n$, mit $y_n \equiv y^{(n)}|_{x=0}$

$$0 = F\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y_n x^n, x\right) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} F_m(y_0, \dots, y_m) x^m \quad \text{mit} \quad \frac{1}{m!} F_m(y_0, \dots, y_m) = \left. \frac{d^m}{dx^m} F(y(x), x) \right|_{x=0}$$

löse die Gleichungen $F_n = 0$ iterativ nach y_0, y_1, y_2, \dots

Zusammenfassung: C5.5 Höherdimensionale Taylor-Reihen

$$f(\vec{y} + \vec{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^n f(\vec{y})$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^n = \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m \overbrace{a_{i_1} \dots a_{i_n}} \partial_{y_{i_1}} \dots \partial_{y_{i_n}}$$

$$n=2: \quad f(y^1 + a^1, y^2 + a^2) = f(\vec{y}) + (a^1 \partial_1 + a^2 \partial_2) f(\vec{y})$$

$$\left[\frac{1}{2} (a^1)^2 \partial_1^2 + a^1 a^2 \partial_1 \partial_2 + \frac{1}{2} (a^2)^2 \partial_2^2 \right] f(\vec{y}) + \mathcal{O}((a^i)^3)$$

Zusammenfassung: V3.3 Extrema mit Nebenbedingungen: Lagrange-Multiplikatoren

ZV3.3

Finde Extrema von $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

mit k Nebenbedingungen $g_i(\vec{x}) = 0$, wobei $g_i: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$

Lösungsstrategie: Führe Lagrange-Multiplikatoren ein, λ_i , $i = 1, \dots, k$

und bilde Hilfsfunktion: $F(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(\vec{x})$

Extremalbedingungen:

$$\vec{\nabla} F(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$