

Zusammenfassung: L1

z L1

Gruppe: $G = (A, \cdot)$ Verknüpfung: $\cdot : A \times A \rightarrow A, (a, b) \mapsto a \cdot b$

(i) Abgeschlossenheit, (ii) Assoziativität, (iii) neutrales Element, (iv) inverses Element

Körper: $F = (A, +, \cdot)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation, beide liefern jeweils eine kommutative Gruppe)

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

Beispiele: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

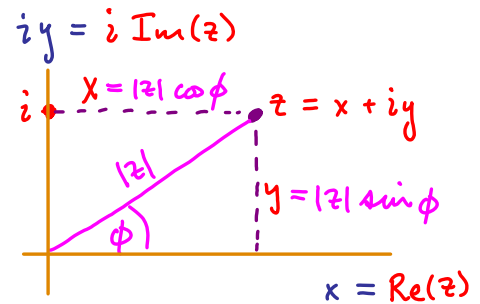
Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$i^2 = -1, i = \sqrt{-1}$

$z + z' = (x + x') + i(y + y')$

$z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

$z^* \equiv \bar{z} \equiv x - iy, z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

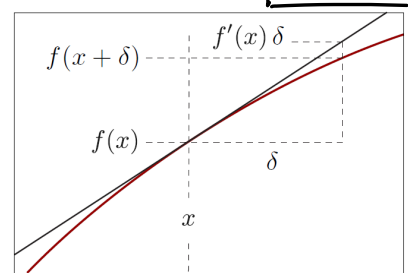


Zusammenfassung: C1-C2

z C1

C1: Ableitung 1-dimensionaler Funktionen

Definition d. Ableitung: $\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim_{\delta > 0} \frac{f(x + \delta) - f(x)}{\delta}$ (1)



Jede Ableitung stellt eine lokale Näherungen einer Funktion durch eine lineare Funktion dar!

$f(x + \delta) \approx f(x) + \delta \frac{df(x)}{dx}$ (2)

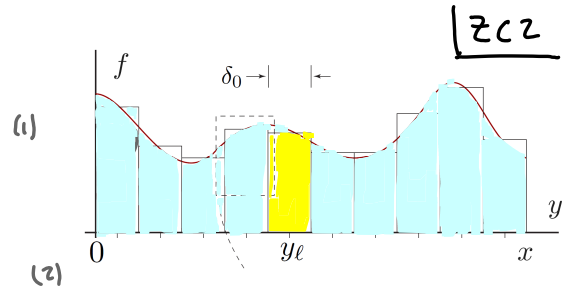
Produktregel: $\frac{d(fg)}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} g(x) + f(x) \frac{d(g(x))}{dx}$ (3)

Kettenregel: $\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx}$ (4)

Ableitung d. Umkehrfunktion: $\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=f^{-1}(x)}}$ (5)

C2 Integrale

'Riemann-Summe' $= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{l=1}^{N(\delta)} X_l$



Fläche unter Kurve: $F(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_l f_l \equiv \int_0^x dy f(y)$

'Hauptsatz': $F(x) = \int_0^x dy f(y) \implies \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ (3)

Bestimmtes Integral: $\int_a^b dy f(y) = F(b) - F(a) \equiv F(y) \Big|_a^b$ (4)

'Partielle Integration' $\int_a^b dx u(x) v'(x) = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx u'(x) v(x)$ (5)

'Variablen-Substitution': $\int_a^b dx \frac{dy(x)}{dx} f(y(x)) = \int_{y(a)}^{y(b)} dy f(y)$, $dy = dx y'(x)$, $x \mapsto y(x)$, $a \mapsto y(a)$, $b \mapsto y(b)$ (6)

Zusammenfassung: L2 Vektorräume

Vorlesung 3 ZL2 a

F-Vektorraum: $(V, +, \cdot)$

Vektoraddition: $+ : (V, V) \rightarrow V$
 $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$ } Axiome:
 (i)-(v): kommutative Gruppe

Skalare Multiplikation: $\cdot : (F, V) \rightarrow V$
 $(\lambda, \vec{a}) \mapsto \lambda \cdot \vec{a} \equiv (\lambda \vec{a})$ } (vi, vii) distributiv
 (viii) assoziativ
 (ix) Identitätselement **1**

Wichtigstes Beispiel: \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{a} = (a^1, \dots, a^n)^T \mid a^1, \dots, a^n \in \mathbb{R} \}$$

Vektoraddition: $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto (\vec{a} + \vec{b}) \equiv \begin{pmatrix} a^1 + b^1 \\ \vdots \\ a^n + b^n \end{pmatrix}$

Skalare Multiplikation: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\lambda, \vec{b}) \mapsto (\lambda \vec{b}) \equiv \begin{pmatrix} \lambda b^1 \\ \vdots \\ \lambda b^n \end{pmatrix}$

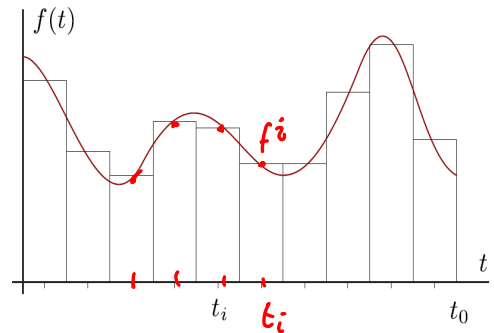
Weiteres Beispiel: Diskretisierte Funktionen:

Diskretisierte Funktion: $\vec{f} = (f^1, \dots, f^N)^T$

Vektoraddition: $(\vec{f} + \vec{g})^i = (\vec{f})^i + (\vec{g})^i$

Skalarmultiplikation: $(a \cdot \vec{f})^i = a(\vec{f})^i$

Vektorraum: $(\{ \vec{f} \mid (\vec{f})^i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N \}, +, \cdot)$



Basis und Dimension

$$S \equiv \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \} \stackrel{?}{=} V \quad (1)$$

$\text{Span}(S) \equiv$ alle möglichen Linearkombination der Vektoren $\{ \vec{v}_j \}$ (2)

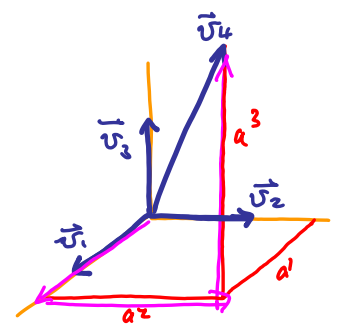
'Linear unabhängig', falls $\sum_j a^j \vec{v}_j = \vec{0} \Rightarrow a^j = 0 \quad \forall j$ (3)

S ist 'vollständig', falls $\text{span}(S) = V$ (4)

S bildet 'Basis', falls S vollständig und linear unabhängig ist. (5)

Standardbasis in \mathbb{R}^n : $\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ j-Position i-Komponente v. j-tem Basisvektor: $(\vec{e}_j)^i = \delta^i_j$ (6)

'Kronecker-delta' Symbol: $\delta^i_j \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$ (7)



Zusammenfassung L3

ZL3a

Euklidische Vektorräume (V: reeller Vektorraum)

Inneres Produkt: $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ Zahl

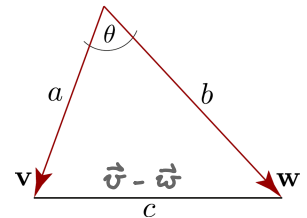
(i) Symmetrie, (ii-iii) Linearität bzgl. + und \cdot (iv) Positiv definit

Wichtigstes Beispiel: Skalarprodukt in \mathbb{R}^n

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \vec{u} \cdot \vec{v} \equiv u^1 v^1 + \dots + u^n v^n = u^i v^i$$

Norm: $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}, \vec{v} \mapsto \| \vec{v} \| \equiv \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$

Cauchy-Schwarz Ungleichung (CSU): $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \| \vec{v} \| \| \vec{w} \|$

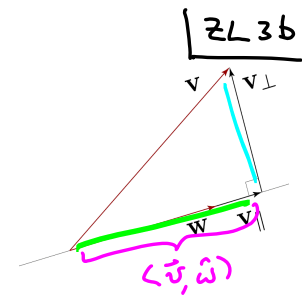


Winkel: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \equiv \cos(\angle(\vec{v}, \vec{w})) \| \vec{v} \| \| \vec{w} \|$

Einheitsvektor: $\hat{w} \equiv \frac{\vec{w}}{\| \vec{w} \|}$

'Projektion' v. \vec{v} auf \vec{w} : $\vec{v}_{\parallel} \equiv \hat{w} \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle$ ($\parallel \vec{w}$)

'Orthogonales Komplement' zu \vec{w} : $\vec{v}_{\perp} \equiv \vec{v} - \hat{w} \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle$ ($\perp \vec{w}$)



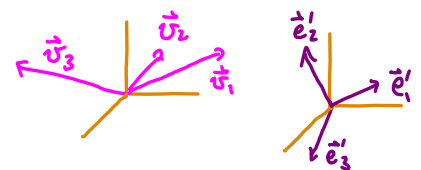
Orthonormalbasis: vollständig, normiert, orthogonal: $\{ \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n \}, \langle \vec{e}'_i, \vec{e}'_j \rangle = \delta_{ij}$

Zerlegung nach Komponenten in Orthonormalbasis: $\vec{x} = \vec{e}'_i x^i, x^i = \langle \vec{e}'_i, \vec{x} \rangle$

Gram-Schmidt-Verfahren:

liefert orthonormale Vektoren mit demselben Span:

$$\text{span} \{ \vec{e}'_j \} \equiv \text{span} \{ \vec{v}_j \}$$



$$\vec{v}_{1,\perp} \equiv \vec{v}_1, \vec{e}'_1 \equiv \frac{\vec{v}_{1,\perp}}{\| \vec{v}_{1,\perp} \|}$$

$$\vec{v}_{j,\perp} \equiv \vec{v}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \vec{e}'_i \langle \vec{e}'_i, \vec{v}_j \rangle, \vec{e}'_j \equiv \frac{\vec{v}_{j,\perp}}{\| \vec{v}_{j,\perp} \|}$$

Kovariante Notation für nicht-orthonormale Basis

Index oben: kontravariant (kon)
Index unten: kovariant (ko)

ZL3c

Metrik einer ko-Basis $\{\hat{v}_j\}$ von V : $\langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle = g_{ij}$ · Inverse Metrik erfüllt $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$

Kon-Basis: $\hat{v}^i \equiv g^{ij} \hat{v}_j$ ist orthonormal zur ko-Basis: $\langle \hat{v}^i, \hat{v}^j \rangle = \delta^i_j$

Zerlegung nach Komponenten: $\hat{x} = \hat{v}_i x^i = \hat{v}_i \langle \hat{v}^i, \hat{x} \rangle_V$ ko-Basis
 $= x_j \hat{v}^j = \langle \hat{x}, \hat{v}^j \rangle_V \hat{v}^j$ kon-Komponenten
 kon-Basis
 ko-Komponenten

$\hat{v}_j = g_{ji} \hat{v}^i = \hat{v}^i g_{ij}$, $x_i = g_{ij} x^j = x^j g_{ji}$, g_{ij} zieht Index runter
 $\hat{v}^i = g^{ij} \hat{v}_j = \hat{v}_j g^{ji}$, $x^j = g^{ji} x_i = x_i g^{ij}$, g^{ij} zieht Index hoch

Inneres Produkt in V : \Leftrightarrow Verallgemeinertes Skalarprodukt in \mathbb{R}^n

$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_V = x^i g_{ij} y^j = x^i y_i = x_j y^j \equiv \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}^n}$

Für Orthonormalbasis, mit $g_{ij} = \delta_{ij}$, ist Unterscheidung zwischen Index oben/unten nicht nötig:

$x_i = \delta_{ij} x^j = x^i$, $g^{ij} = \delta^{ij}$, $\hat{v}^i = \delta^{ij} \hat{v}_j = \hat{v}_i$.

Deswegen: wenn möglich eine Orthonormalbasis wählen!

Zusammenfassung: L4 Vektorprodukt



ZL4

$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$
 $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} \equiv \begin{pmatrix} v^2 w^3 - v^3 w^2 \\ v^3 w^1 - v^1 w^3 \\ v^1 w^2 - v^2 w^1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$

Geometrische Def:

$\vec{v} \perp \vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$

$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin \theta$

Daumen: $\vec{v} \times \vec{w}$ Mittelfinger: \vec{w}
 Zeigefinger: \vec{v}

$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}^k$

Levi-Civita: ϵ_{ijk} komplett antisymmetrisch

$(\vec{v} \times \vec{w})_k = v^i w^j \epsilon_{ijk}$

$\epsilon_{ijk} \epsilon^{mjk} = \delta_i^m \delta_j^n - \delta_i^n \delta_j^m$

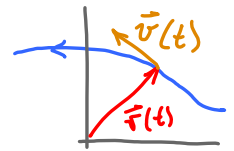
Eigenschaften: antisymmetrisch, distributiv, nicht assoziativ, Identitäten...

Spatprodukt: $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| =$ Volumen v. Parallelepiped

Zusammenfassung V1: Kurven

Z V 1

'Kurve': $\gamma = \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \}$ wobei $\vec{r} : I = (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^d$
 $t \mapsto \vec{r}(t)$



Ort entlang Kurve: $\vec{r}(t) = \vec{e}_j x^j(t)$

Kurvengeschwindigkeit: $\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{e}_j \dot{x}^j(t) = \vec{v}(t)$ liegt 'tangential' zur Kurve

Kurvenlänge: $L[\gamma] = \int_0^\tau dt \|\dot{\vec{r}}(t)\|$ unabhängig von Parametrisierung des Weges

Bogenlänge nach Zeit t: $s(t) \equiv \int_0^t du \|\dot{\vec{r}}(u)\|$



$$\gamma = \vec{r}(0, \tau)$$

Natürliche Parametrisierung durch Bogenlänge:

$$\vec{r}_L : (0, L(\gamma)) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad s \mapsto \vec{r}_L(s) \equiv \vec{r}(t(s)), \quad \|\dot{\vec{r}}_L(s)\| = 1$$

Für Vektorfeld: (vektorwertige Funktion von \vec{r})

$$\vec{f} : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{r} \mapsto \vec{f}(\vec{r})$$

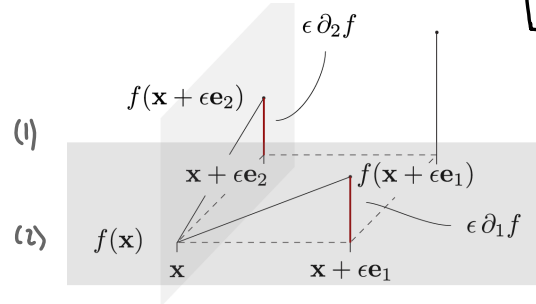
Linienintegral: $\int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{f} \equiv \int_0^\tau dt \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}$ unabhängig von Parametrisierung des Weges

Zusammenfassung C3: Partielle Ableitungen

Z C 3

Partielle Ableitung: $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

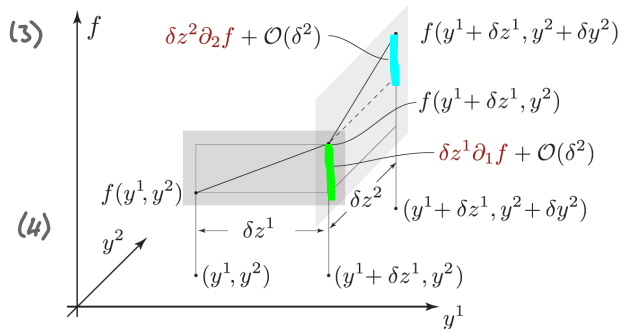
$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{x} + \delta \vec{e}_i) - f(\vec{x})] \\ \equiv \partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i f(\vec{x})$$



Satz v. Schwarz: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{y} \mapsto f(\vec{y})$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y})] = \partial_j f(\vec{y}) z^j$$



$$\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

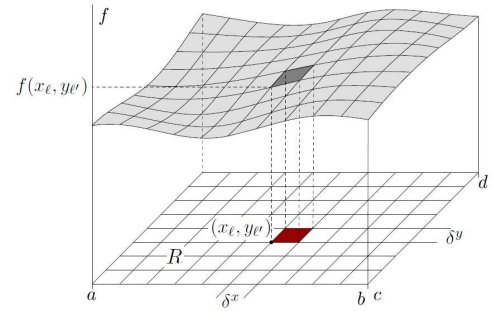
Allgemeine Kettenregel:
$$\frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial g^j} \frac{\partial g^j(\vec{x})}{\partial x^k} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, n \end{matrix} \quad (5)$$

Zusammenfassung: C4 Mehrdimensionale Integration (Kartesisch)

ZC4a

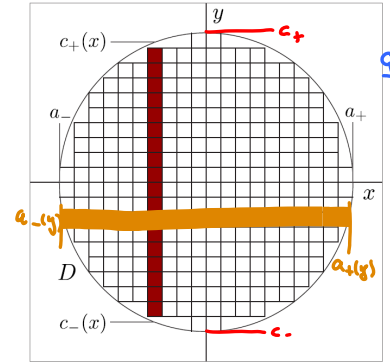
Integration in \mathbb{R}^2

$$\int_a^b dx \int_c^d dy f(x,y) \equiv \lim_{\delta^x, \delta^y \rightarrow 0} \delta^x \delta^y \sum_l \sum_{l'} f(x_l, y_{l'})$$



Fubini: Integrationsreihenfolge ist egal:

$$\int_a^b dx \int_{y_-(x)}^{y_+(x)} dy f(x,y) = \int_{y_a}^{y_b} dy \int_{x_-(y)}^{x_+(y)} dx f(x,y)$$



Für das "innere" (zweite) Integral sind die Grenzen abhängig von der "äußeren"

Analog in 3D: $\int_{[a,b] \times [c,d] \times [e,f]} dx dy dz f(x,y,z) = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x,y,z)$
 Reihenfolge dieser Integrale ist beliebig

Zusammenfassung: V5 Krummlinige Koordinaten

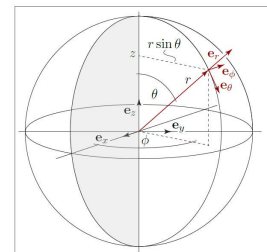
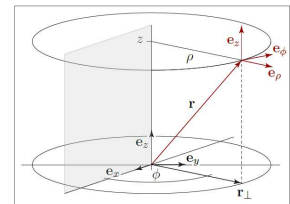
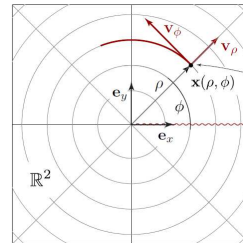
ZV2a

Kartesisch: $\vec{r} = \sum_{i=1}^d \vec{e}_i x^i$

Polar (2D): $\vec{r} = \vec{e}_x \underbrace{\rho \cos \phi}_{x^1} + \vec{e}_y \underbrace{\rho \sin \phi}_{x^2}$
 $\gamma^1 = \rho, \gamma^2 = \phi$

Zylinder (3D): $\vec{r} = \vec{e}_x \rho \cos \phi + \vec{e}_y \rho \sin \phi + \vec{e}_z z$

Kugel (3D): $\vec{r} = \vec{e}_x r \sin \theta \cos \phi + \vec{e}_y r \sin \theta \sin \phi + \vec{e}_z r \cos \theta$



Koordinatenlinie: $\vec{r}_{j,\vec{r}}(y^j) \equiv \vec{r}(y^1, \dots, y^j, \dots, y^d)$
 $\vec{r}_i(y^i) = \vec{r}_\rho(\rho), \vec{r}_\phi(\phi)$
 (y^j wird variiert, y^i werden konstant gehalten)

Koordinatenbasis: $\{\vec{v}_{j,\vec{r}}\}$ $\vec{v}_{j,\vec{r}} \equiv \frac{d}{dy^j} \vec{r}_j(y^j) = \partial_j \vec{r}(\vec{y})$
 erinnert an Ortsabhängigkeit, wird meist nicht explizit angezeigt

Metrik: $g_{ij,\vec{r}} \equiv \langle \vec{v}_{i,\vec{r}}, \vec{v}_{j,\vec{r}} \rangle$

Lokale Basis: $\{\vec{e}_{j,\vec{r}}\}$ $\vec{e}_{j,\vec{r}} \equiv \frac{\vec{v}_{j,\vec{r}}}{\|\vec{v}_{j,\vec{r}}\|} = \frac{\vec{v}_{j,\vec{r}}}{\sqrt{g_{jj,\vec{r}}}}$

Kartesisch: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \quad \vec{r} = \sum_i \vec{e}_i x^i$

Polar (2D):

$$\begin{aligned} \vec{v}_\rho &= \vec{e}_\rho, & \vec{e}_\rho &= \vec{e}_x \cos \phi + \vec{e}_y \sin \phi, & g_{\rho\rho} &= 1, & \vec{\tau} &= \vec{e}_\rho \rho \\ \vec{v}_\phi &= \rho \vec{e}_\phi, & \vec{e}_\phi &= -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi, & g_{\phi\phi} &= \rho^2, & \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{e}}_\rho \rho + \vec{e}_\phi \rho \dot{\phi} \end{aligned}$$

Zylinder (3D):

$$\begin{aligned} \vec{v}_\rho &= \vec{e}_\rho, & \vec{e}_\rho &= \vec{e}_x \cos \phi + \vec{e}_y \sin \phi, & g_{\rho\rho} &= 1, & \vec{\tau} &= \dot{\vec{e}}_\rho \rho + \vec{e}_z z \\ \vec{v}_\phi &= \rho \vec{e}_\phi, & \vec{e}_\phi &= -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi, & g_{\phi\phi} &= \rho^2, & \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{e}}_\rho \rho + \vec{e}_\phi \rho \dot{\phi} + \vec{e}_z \dot{z} \\ \vec{v}_z &= \vec{e}_z, & \vec{e}_z &= \vec{e}_z, & g_{zz} &= 1, & & \end{aligned}$$

Kugel (3D):

$$\begin{aligned} \vec{v}_r &= \vec{e}_r, & \vec{e}_r &= \vec{e}_x \sin \theta \cos \phi + \vec{e}_y \sin \theta \sin \phi + \vec{e}_z \cos \theta, & g_{rr} &= 1, & \vec{\tau} &= \vec{e}_r r \\ \vec{v}_\theta &= r \vec{e}_\theta, & \vec{e}_\theta &= \vec{e}_x \cos \theta \cos \phi + \vec{e}_y \cos \theta \sin \phi - \vec{e}_z \sin \theta, & g_{\theta\theta} &= r^2, & \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{e}}_r \dot{r} + \vec{e}_\theta r \dot{\theta} \\ \vec{v}_\phi &= r \sin \theta \vec{e}_\phi, & \vec{e}_\phi &= -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi, & g_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2 \theta, & & + \vec{e}_\phi r \dot{\phi} \sin \theta \end{aligned}$$

Alle diese lokalen Basen sind orthonormal: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

Für Zylinder & Kugelkoordinaten:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}^k$$

zyklische Reihenfolge:

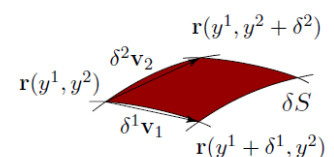


Zusammenfassung: 2D-Flächenintegrale für Fläche in d = 2,3 Dimensionen

$$\vec{r}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \mapsto \vec{r}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x^1(\vec{y}) \\ \vdots \\ x^n(\vec{y}) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\int_S f(\vec{r}) dS = \int_U \int_{\mathcal{U}} \|\partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r}\| f(\vec{r}(y^1, y^2)) dy^1 dy^2 \quad (2)$$

für krummlinig-orthogonale Koord.: $\|\partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r}\| = v_{y^1} v_{y^2} = \sqrt{g_{11} g_{22}} \quad (3)$



Integrationsmaß: Polar: $dS = \rho d\rho d\phi$ (4) Kugel: $dS = d\theta d\phi r^2 \cdot \sin\theta$ (5)

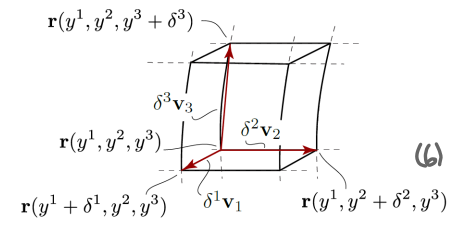
Zusammenfassung: 3D Volumenintegrale

$$\vec{r}: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3, \quad \vec{y} \mapsto \vec{r}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x^1(\vec{y}) \\ x^2(\vec{y}) \\ x^3(\vec{y}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\iiint_V f(\vec{r}) dV = \iiint_U \|\partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r} \cdot \partial_{y^3} \vec{r}\| f(\vec{r}(y^1, y^2, y^3)) dy^1 dy^2 dy^3 \quad (7)$$

für krummlinig-orthogonale Koord.: $\|\partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r} \cdot \partial_{y^3} \vec{r}\| = v_{y^1} v_{y^2} v_{y^3} = \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}} \quad (8)$

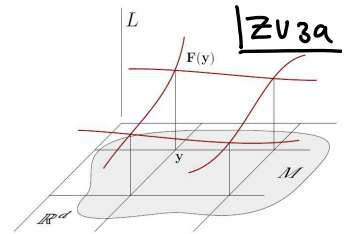
Integrationsmaß: Zylinder: $dV = \rho d\rho d\phi dz$ (9) Kugel: $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ (10)



Zusammenfassung V3.1 Felder

$$\vec{F}: M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow L \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{y} = (y^1, \dots, y^d)^T \mapsto \vec{F}(\vec{y}) = (F^1(\vec{y}), \dots, F^n(\vec{y}))^T$$



V3.2 Skalarfelder, Gradient

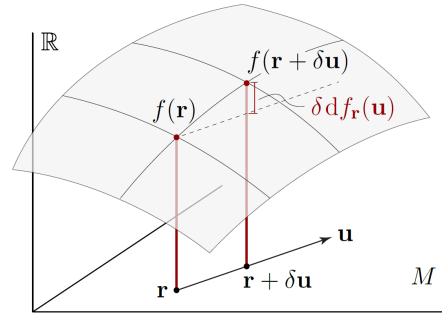
Totales Differential: differentielle Änderung von f bei \vec{r} durch einen \vec{u} -Schritt:

$$df_{\vec{r}}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{u} \mapsto df_{\vec{r}}(\vec{u}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(\vec{r} + \delta \vec{u}) - f(\vec{r})]$$

$$df_{\vec{y}}(\vec{u}) = \partial_{y^k} f(\vec{y}) u^k = \partial_{\vec{r}} f \cdot \vec{u} \equiv \vec{\nabla} f_{\vec{y}} \cdot \vec{u}$$

Gradient in kartesischen Koordinaten: $\partial^i = \partial_i$

$$\vec{\nabla} f: M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \mapsto \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \equiv \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial^d f(\vec{x}) \end{pmatrix} \equiv \vec{e}_i (\vec{\nabla} f)^i(\vec{x})$$



$\vec{\nabla} f_{\vec{y}}$ zeigt in Richtung maximaler Steigung v. f , steht \perp auf den 'Höhenflächen' v. f

In krummlinigen Koordinaten: $\vec{\nabla}_r f = \vec{e}_i (\vec{\nabla} f)^i = \vec{e}_i g^{ij} \partial_j f$ (in Koordinatenbasis)

In krummlinig-orthogonalen Koordinaten: $= \vec{e}_i \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \partial_i f$ (in lokaler Basis)
 $g_{i \neq j} = 0, \quad g^{ii} = 1/g_{ii}$

Zusammenfassung V3.3: Gradientenfeld

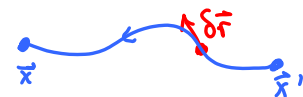
ZV3b

Gradientenfeld: $\vec{\nabla} \varphi: M \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \mapsto \vec{\nabla} \varphi_{\vec{x}}$ (1)

$\left(\int_{\vec{x}' \mapsto \vec{x}} d\vec{r} \cdot \vec{u} \text{ ist wegunabhängig } \forall \vec{x}', \vec{x} \in M \right) \iff \oint d\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$ für geschlossenen Weg (1)

$\left(\vec{u} \text{ ist ein Gradientenfeld} \right) \iff \left(\partial_j u^i - \partial_i u^j = 0, \text{ und } M \text{ ist einfach zusammenhängend} \right)$

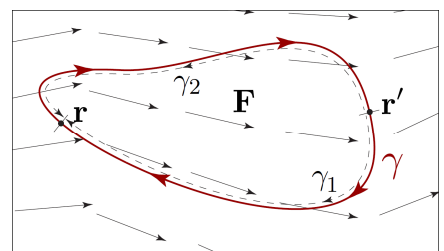
Konkret: $\int_{\vec{x}' \mapsto \vec{x}} d\vec{r} \cdot \vec{u} = \int_{\vec{x}' \mapsto \vec{x}} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}')$ (2)



Konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi_{\vec{r}}$ (5)
 ist ein Gradientenfeld:

$$W[\gamma] = \oint d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0 \quad (6)$$

$$\iff W[\gamma_1] = W[\gamma_2] \quad (7)$$



Arbeit von x' nach x ist unabhängig vom Weg!

geschlossener Weg: $\delta = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$

Zusammenfassung V3.2,4-6: Nabla, Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace

ZV3c

Skalarfeld: $\varphi(\vec{r})$; Vektorfeld: $\vec{u}(\vec{r})$ (1)

Partielle Ableitung: $\partial_1 \varphi = \frac{\partial \varphi(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^1} \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [\varphi(x^1 + \delta, x^2, x^3) - \varphi(x^1, x^2, x^3)]$ (2)

Totales Differential: $d_{\vec{x}} f(\vec{u}) = \partial_j f(\vec{x}) u^j = \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \cdot \vec{u}$ (3)

Gradient: $\vec{\nabla} \varphi_{\vec{x}} = \vec{e}_i \partial^i \varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial^1 \varphi(\vec{x}) \\ \partial^2 \varphi(\vec{x}) \\ \partial^3 \varphi(\vec{x}) \end{pmatrix}$ (4)

Nabla-Operator: $\vec{\nabla} = \vec{e}_i \partial^i = \vec{e}_1 \partial^1 + \vec{e}_2 \partial^2 + \vec{e}_3 \partial^3$ (5)
 (Vektor-Diff.-Operator) Laplace-Operator: $\vec{\nabla}^2 = \Delta = \partial_i \partial^i$ (6)

Divergenz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial_i u^i = \partial_1 u^1 + \partial_2 u^2 + \partial_3 u^3$ (7)

Rotation: $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{e}_i \varepsilon^{ijk} \partial_j u_k = \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix}$ (8)
 (alle Indizes unten)

Gradiententelder sind 'wirbelfrei': $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0$ (9) Wirbelfelder sind 'quellfrei': $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$ (10)

Zusammenfassung: L5.1-5.3 Lineare Abbildungen und Matrizen

ZL5a

Die Abbildung $F: V \rightarrow W$ ist 'linear', falls $F(a\vec{v} + b\vec{w}) = aF(\vec{v}) + bF(\vec{w})$ (1)

Für $V = \mathbb{C}^n, W = \mathbb{C}^m$ hat eine lineare Abbildung die Form:

$A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m, \vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x},$ mit $y^i = a_j^i x^j = \vec{A}^i \cdot \vec{x}$ (2)
 $= A \cdot \vec{x}$

m x n Matrix:

$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_j & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & \dots & A^i_j & \dots & A^i_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^m_1 & \dots & A^m_j & \dots & A^m_n \end{pmatrix} = \{A^i_j\}$ (3)
 Spalte j: $\vec{A}_j \equiv \begin{pmatrix} A^1_j \\ \vdots \\ A^i_j \\ \vdots \\ A^m_j \end{pmatrix}$ (4)
 Reihe i: $\vec{A}^i \equiv (A^i_1, \dots, A^i_j, \dots, A^i_n)$ (5)

Abbildung der Standardbasis: $\vec{e}_j \xrightarrow{A} A \vec{e}_j = \vec{A}_j = \text{Spalte } j$ (6)

Komplexe (m x n)-Matrizen bilden $m \cdot n$ dim. Vektorraum, $\simeq \mathbb{C}^{m \cdot n}$ | ZL5b

$$\text{mat}(\mathbb{C}, m, n) \equiv \{A = \{A^i_j\} : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n, A^i_j \in \mathbb{C}\} \quad (1)$$

mit Matrixaddition, (elementenweise) $(A, B) \mapsto A + B, (A+B)^i_j \equiv A^i_j + B^i_j \quad (2)$

und Skalarmultiplikation, (elementenweise) $(\lambda, A) \mapsto \lambda A, (\lambda A)^i_j \equiv \lambda A^i_j \quad (3)$

Verknüpfung von zwei linearen Abbildungen \Rightarrow Matrixmultiplikation

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^m \xrightarrow{B} \mathbb{C}^l \quad (4)$$

$$\vec{x} \xrightarrow{A} \vec{y} = A \cdot \vec{x} \xrightarrow{B} \vec{z} = B \cdot \vec{y} = B \cdot (A \cdot \vec{x}) \equiv C \cdot \vec{x} \quad (5)$$

(5e.3,4)

$$C^k_j = B^k_i A^i_j = (\vec{B}^k)_i (\vec{A}_j)^i = \vec{B}^k \cdot \vec{A}_j \quad \begin{cases} k = 1, \dots, l \\ i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (6)$$

(Zeile k von B) * (Spalte j von A)

Matrixmultiplikation ist assoziativ & distributiv, aber nicht kommutativ!

Zusammenfassung: L5.5-6 Basistransformationen

| ZL5c

Zwei Vektorräume: $V = \text{span}\{\hat{v}_j\}, W = \text{span}\{\hat{w}_i\} \quad (1)$

Allgemeine lineare Abbildung: $\hat{A} : V \rightarrow W \quad \hat{x} = \hat{v}_j x^j \mapsto \hat{y} = \hat{w}_i y^i \quad (2)$

Matrixdarstellung v. A: $\hat{A}(\hat{v}_j) = \hat{w}_i A^i_j \quad \vec{y} = A \cdot \vec{x}, A = \{A^i_j\} \quad (3)$

In Standardbasis: A bildet Basisvektor \vec{e}_j ab auf: $\vec{A}_j = \text{Spalte } j \text{ von } A \quad (4)$

Zwei Basen für denselben Raum: $V = \text{span}\{\hat{v}_j\} = \text{span}\{\hat{v}'_{i'}\} \quad (5)$

Basistransformation: $T : V \rightarrow V \quad \hat{v}_j = \hat{v}'_{i'} T^{i'}_j \quad (6)$

Matrixdarstellung v. T: $T = \{T^{i'}_j\} \quad x^{i'} = T^{i'}_j x^j, \vec{x}' = T \cdot \vec{x} \quad (7)$

Darstellung v. altem Basisvektor \hat{v}_j in neuer Basis: $\vec{T}_j = \text{Spalte } j \text{ von } T \quad (8)$

Inverse Transformation: $T^{-1} = \{(T^{-1})^{i'}_j\} \quad \hat{v}'_{i'} = \hat{v}_j (T^{-1})^{i'}_j, x^j = (T^{-1})^{i'}_j x^{i'} \quad (9)$

Darstellung v. neuem Basisvektor $\hat{v}'_{i'}$ in alter Basis: $(\vec{T}^{-1})_{i'} = \text{Spalte } i' \text{ von } T^{-1} \quad (10)$

Bezug zwischen $\vec{y} = A \cdot \vec{x} \quad (11)$ und $\vec{y}' = A' \cdot \vec{x}' \quad (12)$: $A' = T \cdot A \cdot T^{-1} \quad (13)$

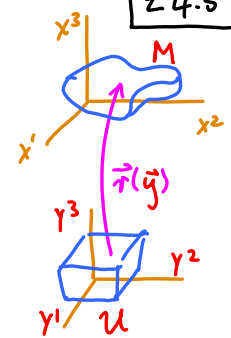
Krummlinige Integration in n Dimensionen

Z4.5

$$\vec{r}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{y} \mapsto \vec{r}(\vec{y}) \equiv \vec{x}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x^1(y^1, \dots, y^n) \\ \vdots \\ x^n(y^1, \dots, y^n) \end{pmatrix}$$

krummlinig \vec{y} \mapsto $\vec{r}(\vec{y}) \equiv \vec{x}(\vec{y})$ \leftarrow kartesisch



n-dimensionales
'Volumenelement':

$$dV^n = dy^1 \dots dy^n \cdot \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right|$$

'Jacobi-Determinante', 'Funktionaldeterminante': = Volumenelement, welches von Koordinatenbasisvektoren $\vec{v}_j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial y^j}$ aufgespannt wird:

$$\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} \right| \equiv \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right| = \det \left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial y^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial y^n} \right] \equiv \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^2}{\partial y^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \frac{\partial x^n}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}$$

n-dimensionales Integral:

$$\int_M dx^1 \dots dx^n f(x^1, \dots, x^n) = \int_U dy^1 \dots dy^n \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right| f(x^1(\vec{y}), \dots, x^n(\vec{y}))$$

Das ist Verallgemeinerung der Substitutionsregel in 1D:

$$\int dx f(x) = \int dy \left| \frac{dx}{dy} \right| f(x(y))$$

Zusammenfassung: L7 Diagonalisieren, Eigenwerte, Eigenvektoren

ZL7

Eigenwertgleichung:

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

Eigenwert λ
Eigenvektor \vec{v}

(1)

Bedingung an EW:

$$0 = \det(A - \lambda \mathbb{1}) := P_A(\lambda)$$

charakteristisches
Polynom

(2)

Für $A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist $P_A(\lambda)$

ein Polynom v. Grad n , mit n Nullstellen.
diese entsprechen den n Eigenwerten v. A

(3)

Wenn EW λ_j bekannt ist, finde dazugehörigen
EV \vec{v}_j durch Lösen des linearen Gleichungssystems:

$$(A - \lambda_j \mathbb{1}) \vec{v}_j = \vec{0}$$

(4)

Falls n linear unabhängige EV existieren,
wird A diagonalisiert durch,

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

(5)

wobei T die EV als Spaltenvektoren hat:

$$T = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$$

(6)

Determinante = Produkt der Eigenwerte:

$$\det(A) = \prod_j \lambda_j$$

(7)

Spur = Summe der Eigenwerte:

$$S_p(A) = \sum_j \lambda_j$$

Zusammenfassung: L8.1 Unitäre/orthogonale Matrizen

ZL 8a

Reelles Skalarprodukt (L3.1): $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u^i \delta_{ij} v^j \quad u^i, v^j \in \mathbb{R}$

Komplexes Skalarprodukt (L3.4): $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{u^i} \delta_{ij} v^j \quad u^i, v^j \in \mathbb{C}$

Komplexe Matrix:

$$A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$$

$$(A^{\dagger})^i_j = \overline{A^j_i}$$

Adjungierte Matrix:

$$A^{\dagger} \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n),$$

$$(A^{\dagger})^i_j = (A^{\dagger})^j_i \equiv \overline{(A)^j_i}$$

 in Ortnormalbasis

Transponierte Matrix:

$$A^T \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$$

$$(A^T)^j_i = (A^T)^i_j \equiv (A)^j_i$$

 in Ortnormalbasis

$\text{mat}(\mathbb{C}, n, n) \ni U$ ist 'unitär' falls $U^{\dagger} \cdot U = \mathbf{1}$ (äquivalent) $U^{-1} = U^{\dagger}$

Komplexes Skalarprodukt invariant: $\langle U \cdot \vec{v}, U \cdot \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

$\text{mat}(\mathbb{R}, n, n) \ni O$ ist 'orthogonal' falls $O^T \cdot O = \mathbf{1}$ (äquivalent) $O^{-1} = O^T$

Reelles Skalarprodukt invariant: $\langle O \cdot \vec{v}, O \cdot \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

Spalten (oder Zeilen-)vektoren einer unitären oder orthogonalen Matrix bilden eine orthonormierte Basis.

$$U = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \quad \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Zusammenfassung: L8.1 Unitäre/orthogonale Gruppen

ZL 8b

'Unitäre Gruppe': $U(n) = \{ U \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n); U U^{\dagger} = \mathbf{1} \}$

'Orthogonale Gruppe': $O(n) = \{ O \in \text{mat}(\mathbb{R}, n, n); O^T O = \mathbf{1} \}$

'spezielle unitäre Gruppe': $SU(n) = \{ U \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n); U^{\dagger} U = \mathbf{1}, \det U = 1 \}$

'spezielle orthogonale Gruppe': $SO(n) = \{ O \in \text{mat}(\mathbb{R}, n, n); O^T O = \mathbf{1}, \det O = 1 \}$

Zusammenfassung: L8.2 Hermitesche/symmetrische Matrizen

$A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'hermitesch', falls $A \stackrel{!}{=} A^{\dagger} \Rightarrow A^i_j \stackrel{!}{=} (A^{\dagger})^i_j \equiv \overline{A^j_i}$

Für hermitesche Matrizen gilt: $\langle \vec{x}, A \vec{x} \rangle = \langle A \vec{x}, \vec{x} \rangle$ und $\langle \vec{x}, A \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$

$A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'symmetrisch', falls $A \stackrel{!}{=} A^T \Rightarrow A^i_j \stackrel{!}{=} (A^T)^i_j \equiv A^j_i$

Für symmetrische Matrizen gilt: $\langle \vec{x}, A \vec{x} \rangle = \langle A \vec{x}, \vec{x} \rangle$ (8)

Zusammenfassung: L8.2 Diagonalisierung v. hermiteschen und symm. Matrizen

ZL8c

$A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'hermitesch', falls $A \stackrel{!}{=} A^\dagger \Rightarrow A_{ij} = (A^\dagger)_{ji} = \overline{A_{ji}}$
 in Orthonormalbasis

$A \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'symmetrisch', falls $A \stackrel{!}{=} A^T \Rightarrow A_{ij} = (A^T)_{ji} = A_{ji}$
 (oder \mathbb{R})

Für alle hermiteschen (insb. auch für alle reelle symmetrischen) Matrizen gilt:

- sie sind immer diagonalisierbar
- alle Eigenwerte sind reell: $\lambda = \bar{\lambda}$
- es lässt sich immer eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren finden $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal: $(\lambda_2 - \lambda_1) \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle = 0$

Für $\left\{ \begin{array}{l} \text{hermitesche} \\ \text{reell symmetrische} \end{array} \right\}$ Matrizen ist $T \left\{ \begin{array}{l} \text{unitär: } T^{-1} = T^\dagger \\ \text{orthogonal: } T^{-1} = T^T \end{array} \right.$

$T^\dagger \cdot A \cdot T = D \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{v}_1^\dagger \\ \vdots \\ \vec{v}_n^\dagger \end{bmatrix} \cdot A \cdot (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$
 adjungierte EV als Zeilenvektoren EV als (g.b.) EW als Diagonalelemente

Zusammenfassung: C5.1-3,5 Taylor-Reihen

ZC5.1-3

'Taylor-Reihe' v. $f(x)$ um $x=y$:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-y)^n f^{(n)}(y)$

Wichtige Beispiele:

$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (2) $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1} (-z)^{n+1}$, für $|z| < 1$

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$, (4) $\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ für $z \in \mathbb{C}$

$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Euler-de Moivre:

$e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (7) Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$ (8)

Polardarstellung einer komplexen Zahl:

$z = x + iy = |z| e^{i\phi}$ (9) $\begin{cases} |z|^2 = x^2 + y^2, & (10) \\ \tan \phi = y/x & (11) \end{cases}$ 

Zusammenfassung: L7.4 Funktionen von MatrizenZ L7.4a

Sei $f(z)$ eine beliebige komplexe Funktion mit wohldefinierter Taylor-Reihe,

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Erweiterung als Matrix-Funktion:

$$f: \text{mat}(\mathbb{C}, n, n) \rightarrow \text{mat}(\mathbb{C}, n, n), \quad A \mapsto f(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n$$

Falls die Matrix diagonalisierbar ist, $A = T D T^{-1}$ mit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

gilt:

$$f(A) = T f(D) T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & f(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Zusammenfassung: C7.2 Separable DifferentialgleichungenZ C7.2

Separable DG:

(f- und t-Abhängigkeit faktorisiert)

$$d_t f(t) = g(t) h(f(t)) \quad (1)$$

$$\text{mit } f(t_0) = f_0 \quad (1')$$

Lösungsweg: Trennung der Variablen

Trennen:

$$\frac{df}{h(f)} = g(t) dt \quad (2)$$

Integrieren:

$$\int_{f_0 = f(t_0)}^{f = f(t)} \frac{d\tilde{f}}{h(\tilde{f})} = \int_{t_0}^t g(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (3)$$

Stammfunktionen:

$$H(f) - H(f_0) = G(t) - G(t_0) \quad (4)$$

Nach f auflösen:

$$f(t) = H^{-1}(G(t) - G(t_0) + H(f_0)) \quad (5)$$

Zusammenfassung: C7.3 Lineare DG 1. Ordnung

z C7.3

Lineare DG: $\dot{f}(t) = g(t) f(t) + h(t)$, mit $f(0) = f_0$

falls $h(t) = 0$: homogen

falls $h(t) \neq 0$: inhomogen

Allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DG:

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t)$$

Allgemeine homogene Lösung erfüllt homogene DG:

$$\dot{f}_h(t) = g(t) f_h(t)$$

partikuläre Lösung erfüllt inhomogene DG:

$$\dot{f}_p(t) = g(t) \cdot f_p(t) + h(t)$$

homogene Lösung (Trennung d. Variablen):

$$f_h(t) = f_0 e^{\Phi(t)}$$

mit

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^t g(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

partikuläre Lösung (Variation d. Konstanten):

$$f_p(t) = c(t) e^{\Phi(t)}$$

mit

$$c(t) = \int_{t_0}^t h(\tilde{t}) e^{-\Phi(\tilde{t})} d\tilde{t}$$

Zusammenfassung: C7.4 Homogenes System von linearen DG 1. Ordnung

z C7.4a

$$d_t \vec{f}(t) = A(t) \cdot \vec{f}(t)$$

$\in \mathbb{C}^n \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$

Superpositionsprinzip (SP) für lineare, homogene DG:

falls $d_t \vec{f}_j(t) = A(t) \cdot \vec{f}_j(t)$ ($j=1,2$) dann $d_t \vec{f}(t) = \lambda_1 \vec{f}_1(t) + \lambda_2 \vec{f}_2(t)$

Für konstanten Koeffizienten:

exp-Ansatz: $\vec{f}(t) = \vec{v} e^{\lambda t}$
 \leftarrow Zeitabhängigkeit nur im Exponenten!
 \leftarrow zeitunabhängiger Vektor, $\in \mathbb{C}^n$

führt auf Eigenwertgleichung: $A \vec{v} = \lambda \vec{v}$

Falls A diagonalisierbar ist, ist die allgemeine Lösung die Summe über alle Eigenlösungen:

$$\vec{f}(t) = \sum_j \vec{v}_j e^{\lambda_j t} c_j \quad \text{mit} \quad A \cdot \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j, \quad j=1, \dots, n$$

$$\vec{c} = T^{-1} \cdot \vec{f}(0), \quad T = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$$

Allgemeinerer Exponentialansatz: (funktioniert auch dann, wenn A nicht diagonalisierbar ist):

$$\vec{f}(t) = e^{A t} \vec{f}_0$$

Zusammenfassung: Inhomogene lineare DG 1. Ordnung

ZC7.4b

Lineare DG:

$$\in \mathbb{C}^n \rightsquigarrow \dot{\vec{x}}(t) = A(t) \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t)$$

$\leftarrow \text{mat}(\mathbb{C}, n, n)$

falls = 0 : homogen

falls $\neq 0$: inhomogen

Allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DG:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)$$

Allgemeine homogene Lösung:

$$\dot{\vec{x}}_h(t) = A(t) \cdot \vec{x}_h(t)$$

(irgendeine) Partikuläre Lösung:

$$\dot{\vec{x}}_p(t) = A(t) \cdot \vec{x}_p(t) + \vec{b}(t)$$

1D (n=1):

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

homogene Lösung (Trennung d. Variablen):

$$x_h(t) = x_0 e^{\Phi(t)}$$

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^t a(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

partikuläre Lösung (Variation d. Konstanten):

$$x_p(t) = c(t) e^{\Phi(t)}$$

mit:

$$c(t) = \int_{t_0}^t b(\tilde{t}) e^{-\Phi(\tilde{t})} d\tilde{t}$$

Zusammenfassung: Inhomogene lineare DG mit konstanten Koeffizienten

ZC7.4c

$$\dot{\vec{x}}(t) = A \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t), \quad A = A(\lambda) \in \text{mat}(\mathbb{C}, n, n), \quad \vec{b}(t) \in \mathbb{C}$$

(i) Suche Lösung für homogene DGL per Exponential-Ansatz:

e-Ansatz: $\vec{x}_h(t) = \vec{v} e^{\lambda t}$

Zeitabhängigkeit nur im Exponenten!
zeitunabhängiger Vektor, $\in \mathbb{R}^n$

Ergebnis: Allg. Lösung der homogenen DGL ist Summe über alle Eigenlösungen:

$$\vec{x}_h(t) = \sum_j c_j^i \vec{v}_j e^{\lambda_j t} \quad \text{mit} \quad A \cdot \vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j, \quad j=1, \dots, n$$

durch Anfangsbedingungen bestimmt Eigenwertproblem!

(ii) Partikuläre Lösung für inhomogene DGL: per Variation der Konstanten

$$\vec{x}_p(t) = \sum_j c_p^j(t) \vec{v}_j e^{\lambda_j t}, \quad (\text{zerlegt in Eigenbasis von } A)$$

mit $c_p^j(t) = \int_{t_0}^t b^j(\tilde{t}) e^{-\lambda_j \tilde{t}} d\tilde{t}$ und $\vec{b}(t) = \sum_j b^j(t) \vec{v}_j$

(iii) Allgemeine Lösung:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t)$$

(6)

Zusammenfassung: C5.4 Taylor-Entwicklung zur Lösung v. Gleichungen

ZC 5.4,5

Löse die Gl. $0 = F(y(x), x)$ mittels einer Reihenentwicklung

für die gesuchte Funktion $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y_n x^n$, mit $y_n \equiv y^{(n)}|_{x=0}$

$$0 = F\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y_n x^n, x\right) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} F_m(y_0, \dots, y_m) x^m \quad \text{mit} \quad \frac{1}{m!} F_m(y_0, \dots, y_m) = \left. \frac{d^m}{dx^m} F(y(x), x) \right|_{x=0}$$

löse die Gleichungen $F_n = 0$ iterativ nach y_0, y_1, y_2, \dots

Zusammenfassung: C5.5 Höherdimensionale Taylor-Reihen

$$f(\vec{y} + \vec{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^n f(\vec{y})$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})^n = \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m \overbrace{a_{i_1} \dots a_{i_n}} \partial_{y_{i_1}} \dots \partial_{y_{i_n}}$$

$$n=2: \quad f(y^1 + a^1, y^2 + a^2) = f(\vec{y}) + (a^1 \partial_1 + a^2 \partial_2) f(\vec{y})$$

$$\left[\frac{1}{2} (a^1)^2 \partial_1^2 + a^1 a^2 \partial_1 \partial_2 + \frac{1}{2} (a^2)^2 \partial_2^2 \right] f(\vec{y}) + \mathcal{O}((a^i)^3)$$

Zusammenfassung: V3.3 Extrema mit Nebenbedingungen: Lagrange-Multiplikatoren

ZV3.3

Finde Extrema von $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

mit k Nebenbedingungen $g_i(\vec{x}) = 0$, wobei $g_i: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$

Lösungsstrategie: Führe Lagrange-Multiplikatoren ein, λ_i , $i = 1, \dots, k$

und bilde Hilfsfunktion: $F(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(\vec{x})$

Extremalbedingungen:

$$\vec{\nabla} F(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} F(\vec{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Zusammenfassung C6.1 delta-Funktion

Z C 6.1

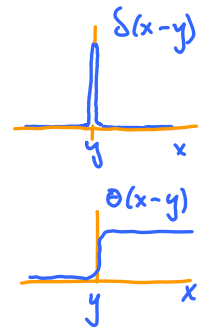
Definierende Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f(x) dx = f(y) \quad (1)$$

$\delta_y(x) = \delta(x-y)$ ist ein unendlich hoher, unendlich scharfer Peak bei $x = y$:

Werte: $\delta(x-y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq y \\ \infty & \text{für } x = y \end{cases}$

Normierung: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) dx = 1$



Beliebte Darstellungen:

Gauß-Peak:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} e^{-x^2/\varepsilon^2}$$

Lorentz-Peak:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon/\pi}{x^2 + \varepsilon^2}$$

Exp.-Peak:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} e^{-|x|/\varepsilon}$$

Wichtige Eigenschaften:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad (7) \quad \delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-y_i)}{|g'(y_i)|} \quad \text{wobei } y_i \text{ die einfachen Nullstellen von } g(x) \text{ sind.}$$

$$\frac{d}{dx} \Theta(x) = \delta(x), \quad (9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x-y) f(x) = -f'(y)$$

Zusammenfassung C6.2 Fourier-Reihen

Z C 6.2a

$$f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto f(x), \quad I = (x_0, x_0+L) \quad (1)$$

Fourier-Reihen-Ansatz für $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_{k \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}} \underbrace{e^{ikx}}_{\text{'Fourier-Moden'}} \underbrace{\tilde{f}_k}_{\text{'Fourier-Komponenten'}} \quad (2)$$

Rücktransformation:

$$\tilde{f}_k = \int_I dx e^{-ik \cdot x} f(x) \quad (3)$$

Eigenschaften der 'Fourier-Moden':

Periodizität:

Wellenlänge: $\lambda_k = \frac{2\pi}{k} = \frac{L}{n} \quad e^{ik \cdot (x+L)} = e^{ik \cdot x} \quad (4)$

Orthonormalität:

$$\int_I dx e^{i(k'-k)x} = L \delta_{kk'} \quad (5)$$

Vollständigkeit:

$$\frac{1}{L} \sum_{k \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}} e^{ikx} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(x+mL) \quad \text{periodische delta-Funktion} \quad (6)$$

Parseval-Identität:

$$\int_I dx |f(x)|^2 = \frac{1}{L} \sum_k |\tilde{f}_k|^2 \quad (7)$$

L9.1 Konzeptionelle Grundlage der Fourier-Entwicklung

L 9.1 a
Z 9.1 a

Kernaussage: Fourier-Entwicklung ist Basiswechsel im Funktionenraum

Zur Erinnerung: Eigenschaften einer Basis in \mathbb{C}^n :

	Invariante Größe	In Komponenten ausgedrückt
Element:	(1) $\vec{v} = \sum_j \vec{e}_j v_j$ (1)	(2) $v^i = (\vec{v})^i = \langle \vec{e}_i, \vec{v} \rangle \stackrel{(5,2')}{=} \delta_{ij} v_j$ (1')
Standardbasis: $j=1, \dots, n$	(2) $\vec{e}_j \stackrel{(6,7)}{=} \sum_\alpha \vec{w}_\alpha \langle \vec{w}_\alpha, \vec{e}_j \rangle$ (7) (2)	(3) $(\vec{e}_j)^i = \delta^i_j$ (2')
Skalarprodukt:	(4) $\langle \vec{e}_j, \vec{e}_j \rangle = \delta_{jj}$ (3) (5) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$	(6) $\sum_i \bar{u}^i v^i$ (3')
Allgemeine Basis: $\alpha=1, \dots, n$	(8) \vec{w}_α (4)	(9) $w^i_\alpha \stackrel{(11)}{=} (\vec{w}_\alpha)^i = \langle \vec{e}_i, \vec{w}_\alpha \rangle$ (4')
Orthonormalität:	(10) $\langle \vec{w}_\alpha, \vec{w}_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ (5)	(11) $\sum_i \bar{w}^i_\alpha w^i_\beta \stackrel{(3')}{=} \delta_{\alpha\beta}$ (5')
Entwicklung:	(12) $\vec{v} = \sum_\alpha \vec{w}_\alpha v^\alpha$ (6) (7) $\stackrel{(7)}{=} \sum_\alpha \vec{w}_\alpha \langle \vec{w}_\alpha, \vec{v} \rangle$ (16)	(13) $v^i = \sum_\alpha \bar{w}^i_\alpha v^\alpha$ Basis-Wechsel (6)
Koeffizienten:	(14) $v^\alpha \stackrel{(6,5)}{=} \langle \vec{w}_\alpha, \vec{v} \rangle$ (7)	(15) $v^\alpha = \sum_i \bar{w}^i_\alpha v^i$ Basis-Wechsel (7')
Vollständigkeit:	(18) $\delta_{jj} \stackrel{(3)}{=} \langle \vec{e}_j, \vec{e}_j \rangle$ (2) $\stackrel{(2)}{=} \sum_\alpha \langle \vec{e}_j, \vec{w}_\alpha \rangle \langle \vec{w}_\alpha, \vec{e}_j \rangle$ (9)	(19) $\delta_{jj} \stackrel{(9)(4)}{=} \sum_\alpha \bar{w}^j_\alpha w^j_\alpha$ (6') $\stackrel{(6')}{=} \sum_\alpha \bar{T}^j_\alpha T^j_\alpha = (T T^\dagger)^j_j$ (8')

Analoge Strukturen existieren im Funktionenraum:

$$L^2(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_I |f(x)|^2 < \infty \right\}$$

$x \mapsto f(x)$

$\vec{v} \leftrightarrow f$	$v^i \leftrightarrow f(x)$	L 9.1 b Z 9.1 b
$\vec{e}_j \leftrightarrow \delta_y$	$e^i_j \leftrightarrow \delta_y(x)$	
$\vec{w}_\alpha \leftrightarrow \psi_k$	$w^i_\alpha \leftrightarrow \psi_k(x) \equiv \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}}$	

	Invariante Größe	In Komponenten ausgedrückt
Element:	(1) f (1)	$f(x) \stackrel{(7)}{=} \langle \delta_x, f \rangle \stackrel{(6)}{=} \int dx' \delta(x-x') f(x')$ (1')
Standardbasis:	(4) $\delta_y \stackrel{(6,7)}{=} \sum_k \psi_k \langle \psi_k, \delta_y \rangle$ (9) (2)	(5) $\delta_y(x) = \delta(y-x)$ (2')
Skalarprodukt:	(2) $\langle f, g \rangle$ (3) (9) $\langle \delta_{y'}, \delta_y \rangle = \delta(y'-y)$ (8)	(3) $\int dx \bar{f}(x) g(x)$ (3') (8) $\int dx \delta(y'-x) \delta(y-x) \stackrel{(11')}{=} \delta(y'-y)$
Allgemeine Basis: $k = \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}$	(10) ψ_k (4)	(11) $\psi_k(x) = \langle \delta_x, \psi_k \rangle \stackrel{(11')}{=} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$ (4')
Orthonormalität:	(13) $\langle \psi_k, \psi_{k'} \rangle = \delta_{kk'}$ (5)	(12) $\int dx \psi_k(x) \psi_{k'}(x) \stackrel{(4')}{=} \int dx \frac{e^{i(k'-k)x}}{L} = \delta_{kk'}$ (5')
Entwicklung:	(15) $f = \sum_k \psi_k \tilde{f}_k$ (6) (7) $\stackrel{(7)}{=} \sum_k \psi_k \langle \psi_k, f \rangle$ (18)	(14) $f(x) = \sum_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}} \tilde{f}_k$ Basis-Wechsel (6) $L = \frac{1}{\sqrt{L}} \tilde{f}_k$
Koeffizienten:	(17) $\tilde{f}_k \stackrel{(6,5)}{=} \langle \psi_k, f \rangle$ (7)	(16) $\tilde{f}_k = \int dx \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{L}} f(x)$ Basis-Wechsel (7')
Vollständigkeit:	(20) $\delta(y'-y) \stackrel{(3)}{=} \langle \delta_{y'}, \delta_y \rangle$ (8) (2) $\stackrel{(2)}{=} \sum_k \langle \delta_{y'}, \psi_k \rangle \langle \psi_k, \delta_y \rangle$ (9)	(19) $\delta(y'-y) \stackrel{(9)(4')}{=} \sum_k \overbrace{\psi_k(y') \overline{\psi_k(y)}} \stackrel{(22)}{=} \frac{1}{L} e^{ik(y'-y)}$ (8')

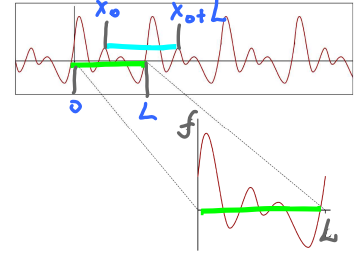
Zusammenfassung C6.2 Fourier-Reihen für periodische Funktionen

ZC6.2b

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ periodisch, mit Periode L :

$f(x + L) = f(x)$

$f_{FR}(x) \stackrel{(b.3)}{=} \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} \tilde{f}_k$, $k \in \frac{2\pi n}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$



$\tilde{f}_k \stackrel{(c.5)}{=} \int_0^L dx e^{-ikx} f(x) = \int_{x_0}^{x_0+L} dx e^{-ikx} f(x)$
 beliebige Periode

Faltung: $(f * g)(x) \equiv \int_{x_0}^{x_0+L} dx' f(x-x')g(x')$, $(f * g)_k = \tilde{f}_k \tilde{g}_k$

Ableitung in Fourier-Darstellung: $\tilde{f}'_k \stackrel{(2)}{=} \int_0^L dx e^{-ikx} f'(x) = ik \tilde{f}_k$

Zeit-Darstellung:

Für $f : (t_0, t_0 + \tau) \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$: $\omega_n = \frac{2\pi n}{\tau}$, $n \in \mathbb{Z}$

Fourier-Reihen-Ansatz: $f(t) = \frac{1}{\tau} \sum_n e^{-i\omega_n t} \tilde{f}_n$, $\tilde{f}_n = \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt e^{+i\omega_n t} f(t)$

Ableitung: $\tilde{f}'_n = \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt e^{+i\omega_n t} f'(t) = -i\omega_n \tilde{f}_n$

Zusammenfassung: C6.3 Fourier-Transformation

ZC6.3a

$f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$

Vorzeichen ist Konvention: in Physik +, Mathe: -

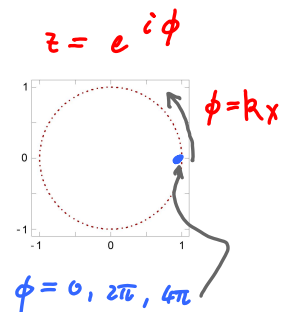
Fourier-Rück-Transformation: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k)$

Fourier-Transformation: $\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$

Wichtige Eigenschaften der Fourier-Exponenten:

'Vollständigkeit': $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} = \delta(x)$

'Orthonormalität': $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} = 2\pi \delta(k)$



Wichtige Beispiele:

Exponentialfunktion \leftrightarrow Lorenzfunktion

Gauß-Funktion \leftrightarrow Gauß-Funktion

Physikerkonvention: $f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(kx - \omega t)} \tilde{f}(k, \omega)$ (1)

Merkregel: $\frac{\partial}{\partial x} \xrightarrow{FT} ik$ $\frac{\partial}{\partial t} \xrightarrow{FT} -i\omega$ (2)

Parseval: $\int_{-\infty}^{\infty} dx \overline{f(x)} g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \overline{\tilde{f}(k)} \tilde{g}(k)$ (3)

Plancherel: $\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |\tilde{f}(k)|^2$ (4)

Faltung: $(f * g)(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x-x') g(x') = (g * f)(x)$ (5)

Faltungstheorem: $(\widetilde{f * g})(k) = \tilde{f}(k) \tilde{g}(k)$ (6)

Zusammenfassung: C7.5 DGL mit konstanten Koeffizienten - Fourier, Green ZC 7.5a

$[c_n d_t^n + c_{n-1} d_t^{n-1} + \dots + c_1 d_t + c_0] x(t) = f(t)$ (1)

Kurznotation: $\hat{L}(d_t) x(t) = f(t)$ (2)

Fourier-transformiert: $f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega)$ (3)

$\tilde{L}(-i\omega) \tilde{x}(\omega) = \tilde{f}(\omega)$ (4) mit $\tilde{L}(-i\omega) \equiv \sum_{l=0}^n c_l (-i\omega)^l$ (5)

Aufgelöst: $\tilde{x}(\omega) \stackrel{(4)}{=} \tilde{g}(\omega) \tilde{f}(\omega)$ (6) mit $\tilde{g}(\omega) \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{\tilde{L}(-i\omega)}$ (7)

Green'sche Funktion erfüllt: $\tilde{L}(-i\omega) \cdot \tilde{g}(\omega) \stackrel{(7)}{=} \underset{= \tilde{\xi}(\omega)}{\downarrow} \delta(\omega)$ (8) $\xrightarrow{\text{Fourier-Tr.}} \hat{L}(d_t) g(t) \stackrel{(1)}{=} \delta(t)$ (9)
 [(1) mit $f(t) = \delta(t)$]

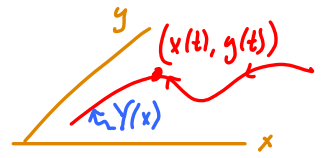
Faltungstheorem, angewandt auf (6): $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} du g(t-u) f(u)$ (10) = allgemeine Lösung für beliebigen Antrieb!

Zusammenfassung: C7.6 Fluss einer DG

ZC7. III a

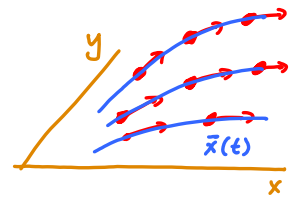
Autonome DGL in zwei Dimensionen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) \\ \dot{y} &= g(x,y) \end{aligned} \quad , \quad y(t) = Y(x(t)) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dY}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x,Y)}{f(x,Y)}$$



DGL für Feldlinie eines Vektorfelds

$$\vec{E}(\vec{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \frac{dY}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{E_y(x,Y)}{E_x(x,Y)}$$

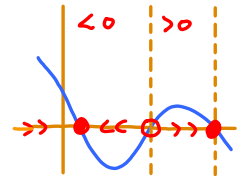


Zusammenfassung: C7.7 Fixpunkte, Linearisierung von Differentialgleichungen

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \quad \text{hat Fixpunkt bei } \vec{x}^* \quad \text{falls} \quad \vec{f}(\vec{x}^*) = 0$$

Für n=1: $\dot{x} = f(x)$:
 ○ instabile Fixpunkte:
 ● stabile Fixpunkte:

$$\begin{aligned} f'(x^+) &> 0 \\ f'(x^+) &< 0 \end{aligned}$$



Lineare Stabilitätsanalyse (n=1):

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad f(x^*) = 0$$

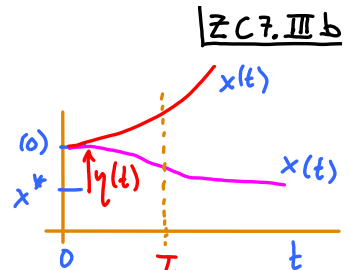
$$\eta(t) \equiv x(t) - x^* \quad \Rightarrow \quad \dot{\eta}(t) = f'(x^*) \eta(t)$$

Lösung für kleine Auslenkungen:

$$\eta(t) = \eta(0) \exp[f'(x^*) t]$$

mit charakteristischen Zeitskala:

$$\tau \equiv |f'(x^*)|^{-1}$$



Stabilität von Fixpunkten in höheren Dimensionen:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)) \quad , \quad \vec{f}(\vec{x}^*) = 0$$

$$\vec{\eta}(t) \equiv \vec{x}(t) - \vec{x}^* \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{\eta}}(t) = A \cdot \vec{\eta}(t) \quad , \quad A = (A^i_j) = \frac{\partial f^i(\vec{x}^*)}{\partial x_j}$$

Lösung für kleine Auslenkungen ist Summe über Eigenmoden von A:

$$\vec{\eta}(t) = \sum_j \vec{v}_j e^{\lambda_j t} c_j$$

$$\vec{\eta}(t) \rightarrow \vec{0} \quad \text{nur falls 'A negativ definit' ist:} \quad \text{Re}(\lambda_j) < 0 \quad \forall j$$

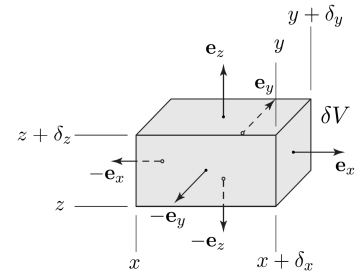
Zusammenfassung: V3.5 Divergenz, Satz v. Gauß

ZV 3.5

Divergenz (kartesisch): $\text{div } \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^d \partial_i u^i$

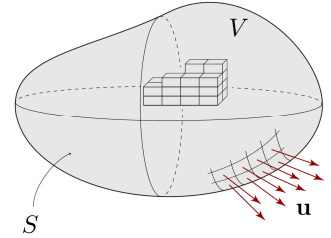
Geometrische Definition der Divergenz:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \int_{\delta S} d\vec{S} \cdot \vec{u} =$ 'Ausfluss pro Volumenelement'

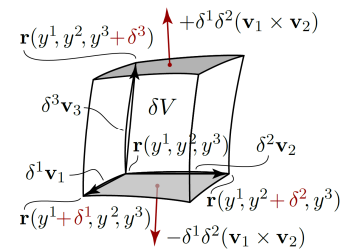


Satz v. Gauß: Volumenintegral der Divergenz = Flussintegral über Fläche

$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{u}$
 (Volumen) (Aussenfläche von V)



Symbolisch: $\int_V dV \partial_i u^i = \int_{\partial V} dS_i u^i$
 suggestive Notation (Rand des Volumens = Oberfläche)



Divergenz in krummlinigen Koordinaten (d=3): $\vec{v}_j = \partial_{y^j} \vec{r}(y) = \vec{e}_j n_j$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{n_1 n_2 n_3} [\partial_{y^1} (n_2 n_3 u^1) + \partial_{y^2} (n_3 n_1 u^2) + \partial_{y^3} (n_1 n_2 u^3)]$

Zusammenfassung: V3.6 Satz von Stokes

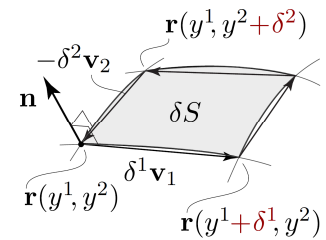
ZV 3.6

Rotation kartesisch: $\text{rot } \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j u^k$

Geometrische Definition der Rotation:

'Zirkulation pro gerichteter Fläche' $\delta \vec{S} = \hat{n} \delta S$

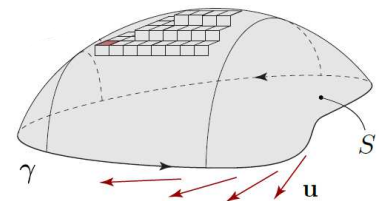
$\hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\delta S} \oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{u}$ (1)



Satz v. Stokes: Flussintegral der Rotation = Linienintegral

$\int_{S_\gamma} d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}(\vec{r})) = \oint_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{u}(\vec{r})$ (2)
 (Fläche) (Rand der Fläche = Linie)

Symbolisch: $\int_S dS_i (\partial_x u^i) = \int_{\partial S} dr_i u^i$ (3)
 suggestive Notation



Rotation in krummlinigen Koordinaten: $\vec{v}_j = \partial_{y^j} \vec{r}(y) = \vec{e}_j n_j$

$(\vec{\nabla} \times \vec{u})^k = \frac{1}{n_i n_j} [\partial_{y^i} (n_j u^j) - \partial_{y^j} (n_i u^i)]$ (4) { analog für zyklisch vertauschte Komponenten (5)

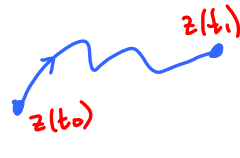
Zusammenfassung: C9.1-2 Analytische Funktionen I

ZC 9.1-2

Def: Komplexe Funktion $f(z) = \begin{cases} U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z = x + iy \longmapsto f(z) = u(x,y) + i v(x,y) \end{cases}$
 ist analytisch in U , falls $f'(z)$ überall in U existiert.

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (CRG): $\partial_x u = \partial_y v$ (2) $\partial_x v = -\partial_y u$

Def: Komplexes Wegintegral: $\int_{\gamma} dz f(z) \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dz(t)}{dt} f(z(t))$
 Weg-Parametrisierung: $z = z(t)$

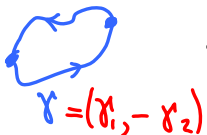



Wichtiges Beispiel: $I_n \equiv \oint_{C_R} dz z^n = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } n = -1 \\ 0 & \text{falls } n \neq -1 \end{cases} = 2\pi i \delta_{n,-1}$



Satz v. Cauchy: falls $f(z)$ analytisch ist auf einfach zusammenhängendem Gebiet, gilt:

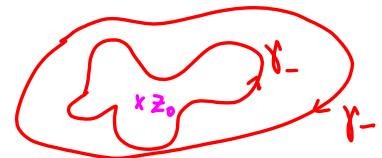
Geschlossener Weg liefert 0: $\oint_{\gamma} f(z) = 0$ \iff Wegunabhängigkeit: $\int_{\gamma_1} dz f(z) = \int_{\gamma_2} dz f(z) = F(z_1) - F(z_0)$, mit $F'(z) = f(z)$

Zusammenfassung: C9.3-4 Analytische Funktionen II

ZC 9.3-4a


$I_n^{(z_0)} \equiv \oint_{\gamma_{\pm}} dz (z - z_0)^n = \pm 2\pi i \delta_{n,-1}$



Reihenentwicklungen: - wenn f analytisch ist: $f(z) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

- wenn f einen Pol der Ordnung p bei $z = z_0$ hat: $f(z) \stackrel{\text{Laurent}}{=} \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_{-p}}{(z - z_0)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)^1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$
 $\equiv \text{Res}(f, z_0)$

$f(z)$ habe mehrere isolierte Pole, und der Weg γ umschlieÙe N Pole, bei z_1, z_2, \dots, z_N



Residuensatz: $\oint_{\gamma} dz f(z) \stackrel{(2),(3)}{=} \sum_{j=1}^N 2\pi i \text{Res}(f, z_j)$

Residuenformel: $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{1}{(p-1)!} \partial_z^{p-1} \left[(z - z_0)^p f(z) \right] \right]$

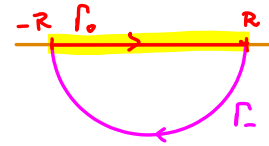
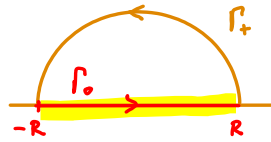
Kontur schließen:

ZC 9.3-46

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} dz f(z) \quad (1)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(\Gamma_0, \Gamma_{\pm})} dz f(z) \quad (2)$$

$$= \pm 2\pi i \sum_j \text{Res}(f, z_j^{\pm}), \quad (3)$$



falls

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} [z f(z)] = 0$$

$\left. \begin{matrix} z_j^+ \\ z_j^- \end{matrix} \right\}$

Pole innerhalb



Diese Strategie funktioniert insbesondere für Integrale folgender Form:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{mit} \quad P(x) = \sum_{j=0}^n p_j x^j, \quad Q(x) = \sum_{j=0}^m q_j x^j \quad \text{falls: } m \geq n+2 \quad (4)$$

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{Q(\omega)} d\omega = \begin{cases} \oint_{\Gamma_+} dz \frac{e^{+iz|t|}}{Q(z)} & \text{falls } t < 0 \quad (5) \end{cases}$$

$$Q(\omega) = \sum_{j=2}^m q_j \omega^j \quad \begin{cases} \oint_{\Gamma_-} dz \frac{e^{-iz|t|}}{Q(z)} & \text{falls } t > 0 \quad (6) \end{cases}$$