

# **Zusatztutorial PPH**

## **#2: Runden**

# Runden von Zahlen

- Beim Messen bzw. Berechnen von Größen liegen die Ergebnisse meist als Zahl mit unendlich vielen Stellen vor oder die Anzahl der Nachkommastellen ist unnötig lang
  - Das beste Beispiel sind Brüche, die unendlich viele Nachkommastellen (z.B. wie hier mit Periode 6) erzeugen:
$$\frac{2}{3} = 0,666666\bar{6}$$
- Darüber hinaus, sofern es sich um eine Messung oder eine Berechnung aus Messwerten handelt, hat die Zahl nur eine endliche Genauigkeit
  - Ab einer bestimmten Nachkommastelle sind die Zahlen nicht mehr vertrauenswürdig und mehr oder weniger zufällig. Der einfachste Grund hierfür ist z.B. ein Rauschen des Messgerätes oder Messfehler
  - Beispiel: Ein Spannungs-Messgerät für 0 – 100 V hat eine Genauigkeit von 1%
    - Das Display kann zwar Werte von z.B. 65,87 V anzeigen, durch die Messgenauigkeit von 1% (entspricht 1 V) sind alle Nachkommazahlen allerdings ungenau
- Um nun Schreibaufwand zu sparen bzw. die Genauigkeit der Angabe wiederzugeben, muss die Zahl gerundet werden
  - Es ist hierbei jedoch unbedingt darauf zu achten, dass das Runden **nur zum Notieren** der Zahlen verwendet wird! Es wird **NIEMALS** mit gerundeten Werten weiter gerechnet! Hierdurch können beträchtliche Rundungsfehler entstehen!

# Kaufmännisches Runden

- Das Runden von Zahlen geschieht in der Regel nach der Kaufmännischen Methode
  - Ist die Ziffer nach der zu rundenden Stelle der Zahl 0, 1, 2, 3 oder 4, so wird abgerundet
    - Zahl: 1,3 -> Gerundet auf ganze Zahl: 1
    - Zahl: 1,74 -> Gerundet auf erste Nachkommastelle: 1,7
  - Ist die Ziffer nach der zu rundenden Stelle der Zahl 5, 6, 7, 8 oder 9, so wird aufgerundet
    - Zahl: 1,7 -> Gerundet auf ganze Zahl: 2
    - Zahl: 51,886 -> Gerundet auf erste Nachkommastelle: 51,9
    - Zahl: 51,886 -> Gerundet auf zweite Nachkommastelle: 51,89
  - Beim Runden kann es sein, dass mehrere Stellen beeinflusst werden (Übertrag), wie im folgenden Beispiel die erste Nachkommastelle
    - Zahl: 74,599 -> Gerundet auf zweite Nachkommastelle: 74,60
- Auf welche Stelle bzw. Nachkommastelle gerundet werden soll, wird entweder vorgegeben oder muss aus den sogenannten „Signifikanten Stellen“ bestimmt werden

# Signifikante Stellen

- Die Signifikante Stelle ist die kleinste Anzahl von benötigten Ziffern einer Zahl, um ein Mess- oder Rechenergebnis genau zu beschreiben
  - Ebenfalls ist die signifikante Stelle die Anzahl der Ziffern von der ersten von Null verschiedenen Stelle bis zur Rundungsstelle der Zahl

Zahl	Signifikante Stellen (SigS)	Nachkommastellen (NK)
98,76	4	2
0,009876	4	6
0,0098760	5	7
987600	4 oder 6	0
$98760 \cdot 10^1$	4 oder 5	0
$9876,0 \cdot 10^2$	5	1
$987,6 \cdot 10^3$	4	1
$9,876 \cdot 10^5$	4	3

- Wie zu sehen ist, gibt es allerdings ein Problem der Mehrdeutigkeit bei Angaben von Zahlen, da für die gleiche Zahl verschiedene Signifikante Stellen vorliegen können

# Signifikante Stellen

- Hintergrund ist die für den Leser unbekannte Rundungsstelle der Zahl:
  - Beispiel anhand der Zahl 987600:
    - Annahme: Originale Zahl war 987600,1 – Rundung auf erste Stelle: 987600 Somit ergeben sich 6 SigS
    - Annahme: Originale Zahl war 987601 – Rundung auf zweite Stelle: 987600 Somit ergeben sich 5 SigS (letzte Stelle nun undefiniert durch das Runden)
    - Annahme: Originale Zahl war 987590 – Rundung auf dritte Stelle: 987600 Somit ergeben sich nur noch 4 SigS, da die letzten beiden Stelle durch das Runden keinen Beitrag zur Genauigkeit der Angabe leisten

# Signifikante Stellen

- Auf welche Stelle nun gerundet wurde, legt die Person fest, welche die Zahl angibt
- Damit der Leser die Information über die Rundungsstelle / signifikanten Stellen einer Zahl ebenfalls erhält, gibt es u.a. folgende Vorgehensweise
  - Die letzte angegebene Ziffer einer Zahl wird als Rundungsstelle betrachtet
  - Liegen große Zahlen vor, wie z.B. 987600, so wird die Rundungsstelle mittels Zehnerpotenzen hinter das Komma geschoben, idealerweise mit einer einzigen Ziffer vor dem Komma
    - Aus 987600 mit 4 SigS wird daher  $9,876 \cdot 10^5$  (oder  $987,6 \cdot 10^3$ )
  - Liegen Zahlen kleiner als 1 vor, so wird die erste von Null verschiedene Ziffer vor das Komma geschoben
    - Aus 0,009786 mit 4 SigS wird daher  $9,786 \cdot 10^{-3}$

# Signifikante Stellen

- Sehr wichtig bei dieser Vorgehensweise / Interpretation von Zahlen ist jedoch noch die Unterscheidung, ob es sich bei der vorliegenden Zahl um eine theoretische und absolut **exakte Zahl** handelt, oder um eine **mit einer Ungenauigkeit behafteten Zahl** z.B. aus einer Messung!
- Zur Vereinfachung in unserer Übung „Physik für Pharmazeuten“ handelt es sich bei *allen* Zahlenangaben um exakte Werte, welche „unendlich“ genau sind
  - D.h. eine Angabe von 20 km ist gleichbedeutend mit 20,000000000...km mit unendlich vielen Signifikanten Stellen
  - Die strikte Anwendung der Rundungsnorm ist hier daher unnötig bzw. sorgt für problematische Rundungsangaben!
  - *Daher gilt für unsere Übung die Faustregel: Angabe der Ergebnisse mit der dritten Stelle nach dem Komma, im Bedarfsfall auch mehr (sehr kleine Zahlen) oder weniger (sehr große Zahlen)*
- Werden Messungen durchgeführt oder es wird mit endlich genauen Zahlen gerechnet (beispielsweise im Praktikum) so sind die Rundungsregeln anzuwenden, um die endliche Genauigkeit der Zahlen zu berücksichtigen

# Faustregel für Addition und Subtraktion

- Bei der Addition bzw. Subtraktion von gerundeten Zahlen bekommt das Ergebnis genauso viele Nachkommastellen (NK), wie die Zahl mit den wenigsten Nachkommastellen
- $18,9984 + 83,80 = 102,7884\dots$ 
  - Die erste Zahl hat 6 SigS und 4 NK, die zweite Zahl 4 SigS und 2 NK
  - Das Ergebnis wird auf 2 NK gerundet und beträgt somit 102,79
- Gleiche Zahlen, jedoch verschiedene Genauigkeiten der Angabe:
  - $12 + 1,234 = 13$
  - $12,00 + 1,234 = 13,23$
  - $12,000 + 1,234 = 13,234$
- Besitzen die Zahlen verschieden große Exponenten, so müssen diese vor einer Rechnung angeglichen werden für die korrekte Anzahl von Nachkommastellen:

$$\begin{array}{r} 1,632 * 10^5 \\ +4,107 * 10^3 \\ +0,984 * 10^6 \\ \hline ? \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 1,632 * 10^5 \\ +0,04107 * 10^5 \\ +9,84 * 10^5 \\ \hline 11,51307 \dots * 10^5 \end{array}$$

- Die wenigsten Nachkommastellen sind 2, somit beträgt das korrekt gerundete Ergebnis  $11,51 * 10^5$



# Rechnen und Runden / Addition und Subtraktion

- Die Anzahl signifikanter Stellen kann sich beim Rechnen erhöhen bzw. verringern:

- Z.B. von 4 auf 5:

$$\begin{array}{r} 5,345 \\ 6,728 \\ \hline 12,073 \end{array}$$

- Oder von 3 auf 2:

$$\begin{array}{r} 7,26 \\ 6,69 \\ \hline 0,57 \end{array}$$

# Faustregel für Multiplikation/Division

- Bei der Addition bzw. Subtraktion von gerundeten Zahlen bekommt das Ergebnis genauso viele Signifikante Stellen (SigS) wie die Zahl mit den geringsten SigS
- $1,234 * 3,33 = 4,10922$ 
  - Die erste Zahl hat 4 SigS und 3 NK, die zweite Zahl 3 SigS und 2 NK
  - Das Ergebnis wird auf 3 SigS gerundet und beträgt somit 4,11
- Gleiche Zahlen, jedoch verschiedene Genauigkeiten der Angabe:
  - $1,234 * 3 = 4$
  - $1,234 * 0,3 = 0$
  - $1,234 * 0,33 = 0,41$
- Zu unterscheiden ist hier noch, ob eine der Zahlen als exakt zu betrachten ist, da sich hierdurch die Anzahl der Signifikanten Stellen ändern kann:
  - $3 * 1,234 = 3,702$  wenn 3 exakt ist und 1,234 4 SigS besitzt
  - $3 * 1,234 = 4$  wenn 1,234 exakt ist und 3 1 SigS besitzt