Zusatztutorium PPH
Ableitung

Ableitung - Allgemein

- Alle Darstellungen und Erklärungen in diesem Zusatztutorium sind vereinfacht, sodass ein besseres Verständnis für die PPh-Veranstaltung vermittelt werden kann

- Generell versteht man unter der Ableitung einer Funktion f(x) den Anstieg dieser Funktion an der Stelle x
  - Anders/vereinfacht ausgedrückt: Die Ableitung der Funktion f(x) ist die Änderung des Funktionswertes Δf pro Änderung der Laufvariablen Δx und wird auch als die Funktion f‘(x) mit einem Strich gekennzeichnet
    - Mathematisch heißt das (vereinfacht):

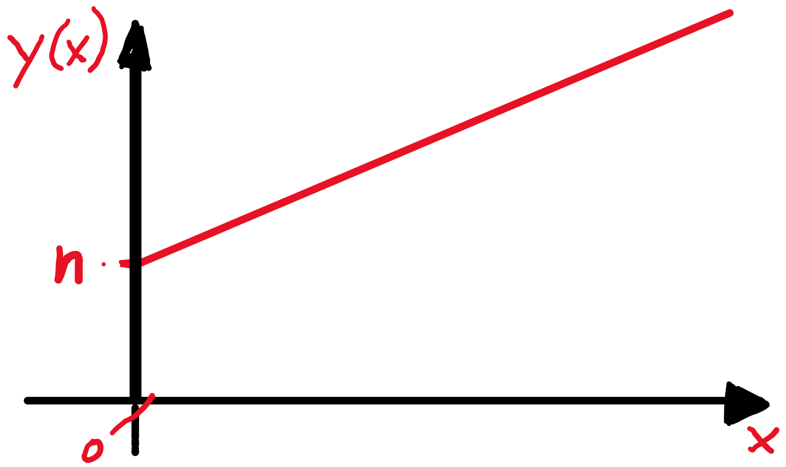
$$\text{Ableitung von } f(x) = f'(x) = \Delta f \,/\, \Delta x$$

    - Ist z.B. die Funktion der gefahrene Weg s über die Zeit t, also die Funktion s(t), dann ist die Ableitung von s(t), d.h. die Änderung des Weges Δs pro Änderung der Zeit Δt, die Geschwindigkeit v mit der Einheit Weg/Zeit (z.B. km/h)
      - Ist die Geschwindigkeit hoch, ändert sich der Weg schneller mit der Zeit. Ist sie null, bleibt der Weg konstant, auch wenn die Zeit zunimmt/vergeht

    - Ein anderes praktisches Beispiel ist die Steigung oder das Gefälle einer Straße, wobei hier die Funktion h(x) die Höhe der Straße h über die horizontal gefahrene Distanz x ist
      - Steht auf einem Schild z.B. die Steigung 10% (entspricht der Ableitung der Höhenfunktion der Straße), dann ändert sich auf einer horizontalen Strecke x von 100 m die Höhe h der Straße um 10% oder 10 m

Ableitung - Gerade

- Ein gutes Beispiel um diese Zusammenhänge besser darzustellen ist die Gerade:



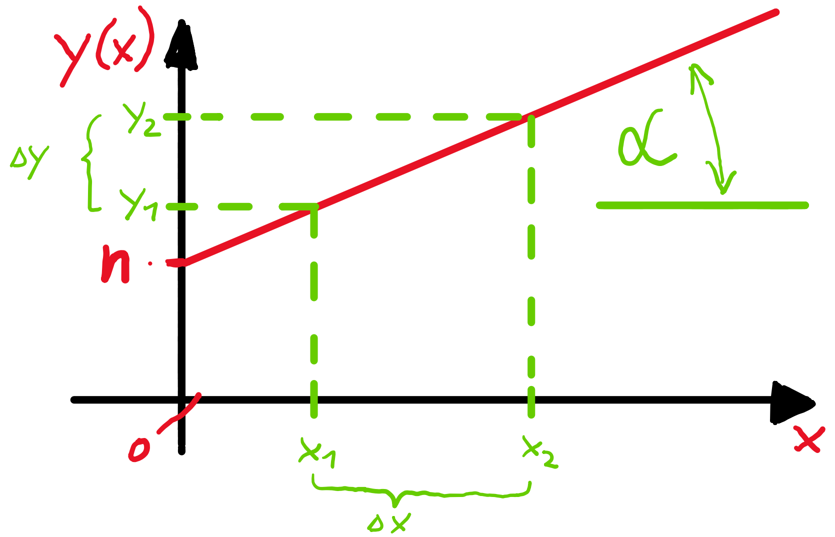
- Allgemein hat die Gerade die Funktion

$$f(x) = y(x) = m \cdot x + n$$

  - y(x) ist lediglich eine andere Darstellung für f(x) und verdeutlicht, dass es sich hier um eine Wegfunktion handelt (andere typische Darstellungen für Wegfunktionen sind z.B. s(x) - Weg, l(x) - Länge, h(x) - Höhe)
  - m ist der Anstieg der Funktion/der Geraden
  - x ist die Laufvariable
  - n ist der Startwert für $x = 0$, d.h. $y(0) = m \cdot 0 + n = n$

Ableitung - Gerade

- Schaut man sich die Gerade genauer an:



- Dann finden sich folgende Zusammenhänge für den Anstieg m der Geraden:
  - ➢ Allgemein ist die Ableitung der Geraden y(x) die Änderung des Funktionswertes Δy pro Änderung der Laufvariablen Δx, d.h.:

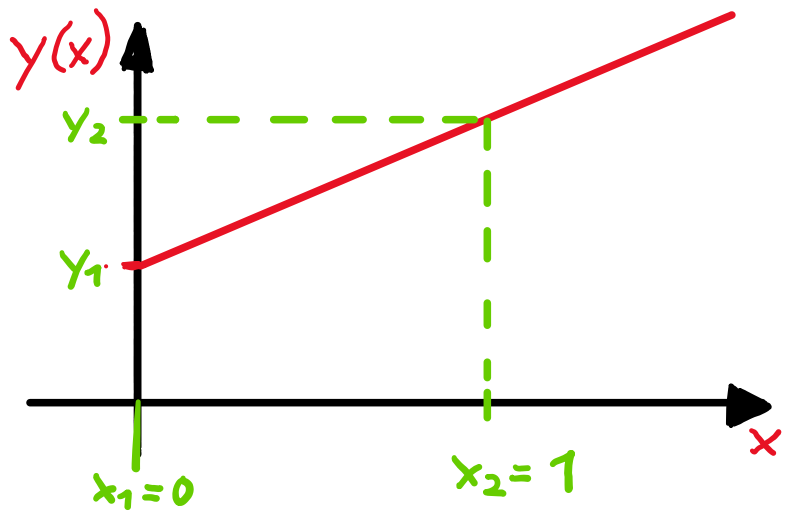
$$y'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

und, laut Trigonometrie: $y'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha = m$

  - ➢ Die Ableitung gibt also neben dem Anstieg m auch den Tangens des (Steigungs-)Winkels der Funktion an!

Ableitung - Gerade

- Als konkretes Beispiel:



- Mit der Funktion y(x) = 5x+3 :

$$\left.\begin{aligned} y(x_1) &= y(0) = 3 \\ y(x_2) &= y(1) = 5+3 = 8 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \Delta y &= 5 \\ \Delta x &= 1 \end{aligned}$$

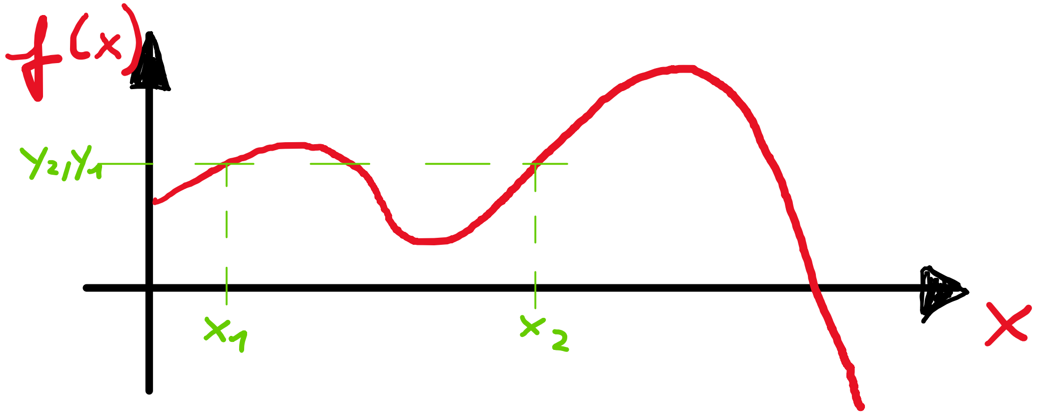
$$\boxed{y'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{1} = 5 = m}$$

und da $m = \tan \alpha \rightarrow \alpha = \arctan(5) = 78{,}7°$

- D.h. die Ableitung/der Anstieg dieser Geraden ist 5 (Δy um 5 nach oben pro Δx um 1 nach rechts) oder 78,7°, oder 500%

Ableitung – Komplexere Funktionen

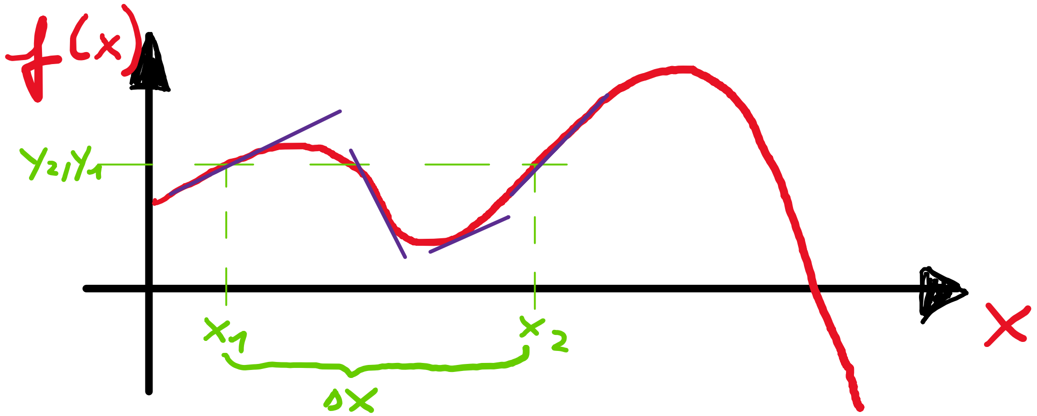
- Während die Darstellung der Ableitung als f'(x) = Δf/Δx gut für die Gerade funktioniert, ist diese Darstellung unzureichend für komplexere Funktionen, wie z.B.:



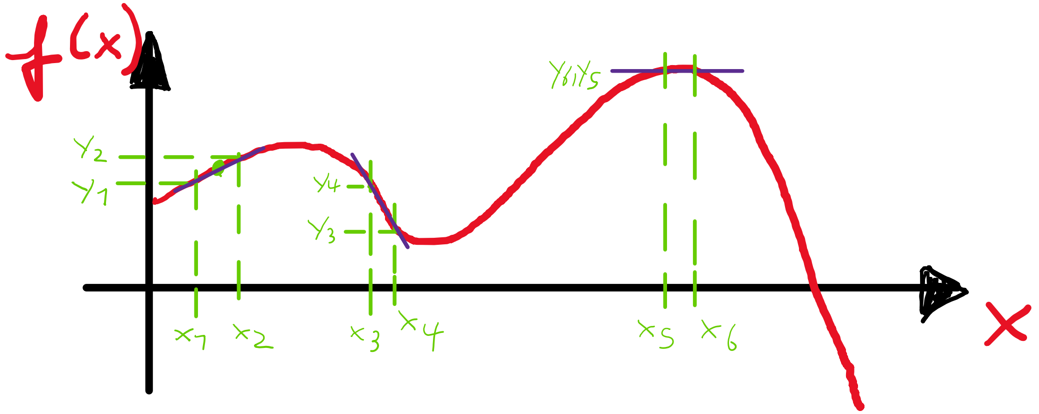
- Die Darstellung über die endlichen großen Werte von Δf und Δx sorgt hier für das Problem, dass die Ableitung nur den Mittelwert des Anstiegs der Funktion über das gewählte Intervall Δx angibt; im oben gezeichneten Fall ist der mittlere Anstieg 0 (keine Änderung des Funktionswertes)

Ableitung – Komplexere Funktionen

- Legt man Geraden an verschiedene Punkte x der Funktion an, welche den lokalen Anstieg der Funktion zeigen, dann zeigt sich, dass die Funktion lokal deutlich vom gemittelten Anstieg 0 des Intervalls Δx abweicht



- Um nun an einer bestimmten Stelle x der Funktion den genauen Anstieg zu berechnen, muss das Intervall Δx um diesen Punkt x möglichst klein gewählt werden, wobei der Anstieg umso genauer wird, je kleiner das Intervall ist:



Ableitung - Analytisch

- Idealerweise lässt man das Intervall Δx der Laufvariablen gegen 0 gehen (es wird infinitesimal/unendlich klein), um die genauste Berechnung des lokalen Anstiegs/der Ableitung der Funktion an einem Punkt x zu erreichen

  - Als Darstellung für eine unendlich kleine Änderung von Δx wird in der Mathematik die Darstellung dx mit einem kleinen d gewählt
  - Somit wird aus der Definition der Ableitung:

$$y'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

- Darüber hinaus ist es bei komplexen Funktionen nicht mehr praktisch/effizient, die konkreten Werte für Δx und Δy per Hand zu berechnen, um den Anstieg der Funktion an einem Punkt x numerisch zu bestimmen

- Man geht deswegen dazu über, die Ableitung/den Anstieg analytisch zu lösen. Hierzu gibt es eine Menge an Regeln, die es zu beachten gilt

Ableitung - Regeln

- Anhand der Geradenfunktion lassen sich schon einige Regeln zum Bilden der Ableitung erklären:

$$f(x) = y(x) = m x^{(1)} + n$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \overset{\#1}{m} \cdot \overset{\#2}{1} \cdot x^{\overbrace{1-1}^{\#3}} + \overset{\#4}{0}$$

$$= m \cdot x^{0}$$

$$= m$$

$$= \tan \alpha$$

- ➢ #1: Konstanten vor einer Laufvariablen bleiben unverändert stehen
- ➢ #2: Der ursprüngliche Exponent der Laufvariablen, nach welcher abgeleitet wird, kommt nach unten, vor die Laufvariable
- ➢ #3: Der Exponent der Laufvariablen wird danach um 1 reduziert
- ➢ #4: Alles, was einzeln steht und sich nicht mit der Laufvariablen ändert, ergibt 0 beim Ableiten
    - ➢ Hierzu zählen Konstanten und beispielweise andere Laufvariablen, nach denen nicht abgeleitet wird

Ableitung - Regeln

- Ein gutes Beispiel, auch für mehrmaliges Ableiten, ist die allgemeine Bewegungsgleichung

  - Es gilt die Ableitungsregel, dass einzelne Summanden in einer Gleichung/Funktion separat abgeleitet werden
  - Sobald eine Funktion nach der Zeit abgeleitet wird, schreibt man statt dem Strich einen Punkt über den Funktionswert der Ableitung

Weg: $s(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + s_0$

Geschwindigkeit: $v(t) = \dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{a}{2} \cdot 2 \cdot t + v_0 + 0 = a \cdot t + v_0$

Beschleunigung: $a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt} = a + 0 = a$

Ableitung - Regeln

- Weitere Beispiele:

$f(x) = a$ $\qquad$ $f'(x) = 0$

$f(x) = m \cdot x + a$ $\qquad$ $f'(x) = m \cdot x^0 + 0 = m$

$f(x) = nx^2 + mx + a$ $\qquad$ $f'(x) = 2n^{2-1} + mx^{1-1} + 0$

$= 2nx + m$

$f(x) = tx^3 + nx^2 + mx + a$ $\qquad$ $f'(x) = 3tx^2 + 2nx + m$

$f(x) = \sqrt{x} \left(= x^{1/2}\right)$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} \left(= x^{\frac{2}{3}}\right)$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Ableitung - Regeln

- Sinus/Cosinus:

$$y(x) = \sin(x)$$
$$y'(x) = \cos(x)$$
$$y''(x) = -\sin(x)$$
$$y'''(x) = -\cos(x)$$
$$y^{IV}(x) = \sin(x)$$

Ableitung - Kettenregel

- Die Kettenregeln beschreibt, wie verschachtelte Funktionen h(g(x)) abgeleitet werden
  - Verschachtelte Funktionen sind Funktionen g(x) innerhalb von äußeren Funktionen h()
  - Die Ableitung wird gebildet mit: f'(x) = h'(g(x)) ·g'(x)

  - Als Regel gilt: Zuerst bestimmen, welche die äußere Funktion h() ist
  - Dann bestimmen, welche die innere Funktion g(x) ist

$$f(x) = \sqrt{x^2+2} \left(= (x^2+2)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad h(\ ) = \sqrt{} = (\ \ )^{1/2}$$

$$g(x) = x^2+2$$

  - Danach werden beide Funktionen separat abgeleitet

$$h'(\ ) = \frac{1}{2}(\ \ )^{-\frac{1}{2}} \qquad g'(x) = 2x$$

  - Und entsprechend der Kettenregel in die Ableitung eingesetzt:

$$\boxed{\text{Kettenregel: } f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

Ableitung - Regeln

- Weitere Beispiele:

$$f(x) = 5a \cdot \cos(2x^3) \qquad h(\ ) = \cos(\ ) \qquad g(x) = 2x^3$$

$$h'(\ ) = -\sin(\ ) \qquad g'(x) = 6x^2$$

$$f'(x) = 5a \cdot \underbrace{(-1) \cdot \sin(2x^3)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{6x^2}_{\text{innere Ableitung}} = -30a \cdot x^2 \cdot \sin(2x^3)$$

äußere Ableitung • innere Ableitung

Ableitung - Exponentialfunktion

- Ein Sonderfall für die Kettenregel ist die Exponentialfunktion:
  - ➢ Hierbei gilt, dass die Exponentialfunktion die äußere Funktion h() ist und beim Ableiten unverändert bleibt
    - ➢ Exponentialfunktion abgeleitet = Unveränderte Exponentialfunktion
  - ➢ Die innere Funktion g(x) wird normal abgeleitet und entsprechend der Kettenregel hinter die Exponentialfunktion geschrieben:

$$f(x) = e^{3x^5}$$

$$h(\ ) = e^{(\ )}$$

$$h'(\ ) = e^{(\ )}$$

$$g(x) = 3x^5$$

$$g'(x) = 15x^4$$

$$f'(x) = e^{(3x^5)} \cdot 15x^4$$

Ableitung – Partielle Ableitung

- Das partielle Ableiten muss angewendet werden, wenn die Funktion f(x) aus 2 Teilfunktionen h(x) und g(x) besteht, welche miteinander multipliziert oder dividiert werden f(x) = h(x) · g(x). Oft wird der Einfachheit halber statt h(x) und g(x) lediglich u und v geschrieben, d.h. f(x) = u·v

- Für die Ableitung gilt dann die Regel f'(x) = u'v+uv'
- Oder falls es mehr als 2 Teilfunktionen gibt f'(x) = u'vn + uv'n +uvn' und so weiter

➢ Zum Lösen werden zuerst die Teilfunktionen bestimmt:

$f(x) = 2a \cdot x^2 \cdot \sin(x)$ $\qquad u = 2ax^2 \qquad v = \sin(x)$

➢ Danach werden die Teilfunktionen separat abgeleitet:

$u' = 4ax \qquad v' = \cos(x)$

➢ Und zum Schluss entsprechend der Regel zum partiellen Ableiten eingesetzt:

$f'(x) = u'v + uv' = 4ax \cdot \sin(x) + 2ax^2 \cdot \cos(x)$

Ableitung - Regeln

- Weiteres Beispiel, Kettenregel und partielle Ableitung:

$$f(x) = \underbrace{e^{3x^5} \cdot 4x}_{\text{Partiell}}$$

$$u = e^{3x^5} \qquad v = 4x$$

$$u' = \underbrace{e^{3x^5} \cdot 15x^4}_{\text{Kettenregel}} \qquad v' = 4$$

$$h(\ ) = e^{(\ )}$$

$$h'(\ ) = e^{(\ )}$$

$$g(x) = 3x^5$$

$$g'(x) = 15x^4$$

$$u' = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = u'v + uv'$$

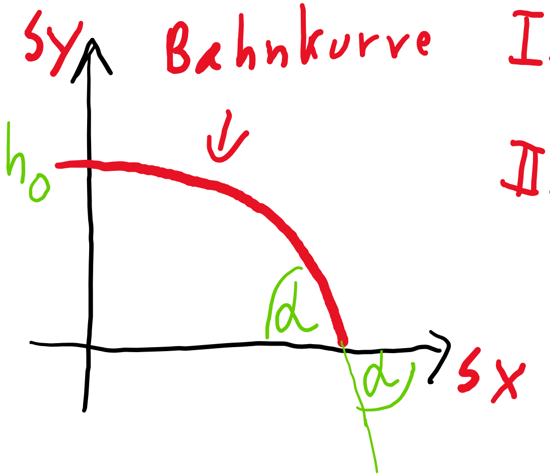
$$= e^{3x^5} \cdot 15x^4 \cdot 4x + e^{3x^5} \cdot 4$$

$$= 60x^5 \cdot e^{3x^5} + 4 \cdot e^{3x^5}$$

Ableitung – Der waagerechte Wurf

- Mit der Ableitung/dem Anstieg einer Funktion lässt sich auch erklären, warum man für die Aufgabe des waagerechten Wurfes die Geschwindigkeiten nehmen muss, um den Auftreffwinkel der abgefeuerten Gewehrkugel relativ zur Erdoberfläche zu berechnen

- Die Flugbahn der abgefeuerten Kugel lässt sich über die Bahnkurve beschreiben. Hierbei werden die Funktionen für den Weg sy(t) in der vertikalen Richtung und für den Weg sx(t) in der Horizontalen Richtung ineinander eingesetzt, sodass die Zeit als Laufvariable entfällt:



I. $s_x(t) = v_{0x} \cdot t$ (gleichförmig in x)

II. $s_y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0$ (beschleunigt in y, Freier Fall)

I. $t = \frac{s_x(t)}{v_{0x}}$

II. $s_y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0 \Rightarrow \overbrace{s_y(s_x) = -\frac{1}{2} g \frac{s_x^2}{v_{0x}^2} + h_0}^{\text{Bahnkurve}}$

Auftreffwinkel = Anstieg/Ableitung der Bahnkurve im Auftreffpunkt $\rightarrow s_y'(s_x) = \frac{ds_y}{ds_x} = -\frac{g \cdot s_x}{v_{0x}^2} \overbrace{=}^{\text{aus I: } \frac{s_x}{v_{0x}} = t} -\frac{g \cdot t}{v_{0x}} \overbrace{=}^{\text{mit } g \cdot t = v_y} -\frac{v_y}{v_{0x}} = \tan\alpha$

Ableitung - Kraft

- Die Kraft ist die Ableitung des Impulses nach der Zeit, wobei im Normalfall die Masse als konstant angenommen wird:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(m \cdot v)}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot a$$

  - Daraus ergibt sich, dass z.B. bei einem Autounfall die Kraft auf die beteiligten Personen umso größer ist, je schneller das Auto gefahren ist, bzw. je mehr sich der Impuls pro Zeit ändert oder je kürzer der Aufprall ist
  - Durch die Elastizität des Airbaigs soll beispielsweise die Zeitdauer verlängert werden, in welcher die Insassen des Autos zur Ruhe kommen. Somit ist die Impulsänderung pro Zeitänderung geringer und die wirkenden Kräfte ebenso

- Es gibt allerdings Prozesse, bei denen kann die Masse nicht als konstant angenommen werden. Bei einer Rakete beispielsweise verändert sich die Masse über die Zeit, da der Treibstoff verbrannt und als Gas mit hoher Geschwindigkeit aus der Rakete tritt. Die Gleichung für die Kraft/die Impulsänderung ergibt sich dann zu:

$$p(t) = \underbrace{m(t)}_{u} \cdot \underbrace{v(t)}_{v}$$

$$u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$F = \dot{p}(t) = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot v + m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$= \underbrace{\frac{dm}{dt} \cdot v}_{\text{austretendes Gas}} + \underbrace{m \cdot a}_{\text{Vorschub der Rakete}}$$