

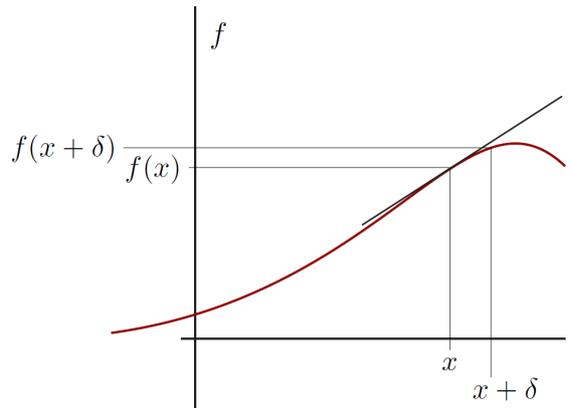
C1: Differenzieren (Ableiten) 1-dimensionaler Funktionen

Lernziel: verallgemeinerbare Interpretation des Begriffs 'Ableitung einer Funktion'

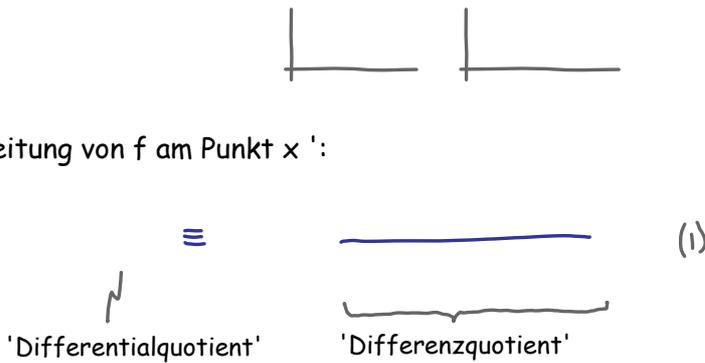
C1.1 Def. der Ableitung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mapsto$$

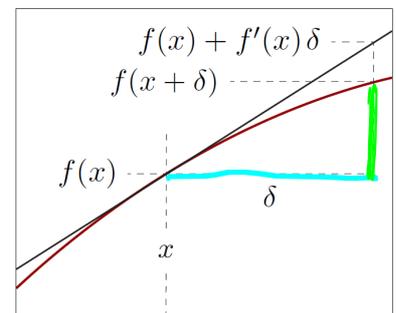
sei eine glatte Funktion (keine Sprünge, keine Zacken).



'Ableitung von f am Punkt x':



Interpretation: Steigung v. am Punkt



Alternative Notationen:

$$f'(x) \equiv \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \equiv \frac{df}{dx} \equiv \frac{dy}{dx}$$

C1b
(1)

Verallgemeinerbare Betrachtung: Sei δ klein, aber nicht infinitesimal klein.

Dann: $\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \stackrel{(a.1)}{\approx} f'(x)$ in guter Näherung, wird exakt für (2)

Grundlegende Formel: $f(x+\delta) \stackrel{(2)}{\approx} f(x) + \delta f'(x)$ 'Mutter aller Ableitungen' (3)

E1-Sprech: 'Taylor-Entwicklung'

Schreibe $x + \delta \equiv \cdot$: $f(\cdot) \approx f(x) + \delta f'(x)$ (4)
↑ linear in y!

Interpretation: nahe bei x kann eine lineare Funktion v. f näherungsweise beschrieben werden durch

Allgemeine Faustregel: jede Ableitung liefert eine lokale Näherung einer Funktion durch eine lineare Funktion! (5)

Beispiel:

$$f(x) = x^3$$

(1)

C1c

$$f(x+h) = (x+h)^3$$

ausmultipliziert:

$$= x^3 + \underbrace{3x^2}_{\text{orange}} + \underbrace{3(\quad)^2 x + (\quad)^3}_{\text{orange}}$$

(2)

Identifiziere:

$$= \quad +$$

(3)

[(durch Vergleich mit (b.3))]

Fazit:

$$f'(x) =$$

bedeutet: Terme 'höher als lineare Ordnung in

(hier:

)

sind vernachlässigbar relativ zu δ wenn

vernachlässigbar relativ zum
ersten Term in [], falls

$$f(x+h) = x^3 + \left[3x^2 + \underbrace{\quad}_{\text{orange}} \right]$$

(4)

C1.2 Ableitungsregeln

(aus Schule bekannt? In Übungen trainieren!)

(Siehe auch Skript, Mathe Vorkurs)

C1d

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

seien 'glatte Funktionen',

$$a \in \mathbb{R}$$

↳ Ableitungen existieren

Produktregel:

$$\frac{d(\quad)}{dx} = \frac{d(\quad)}{dx} + \frac{d(\quad)}{dx}$$

(1)

Kettenregel:

$$\frac{d(\quad)}{dx} =$$

(2)

Inverse:

$$f(y) =$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} \stackrel{(2)}{=} \left. \frac{d g(x)}{d x} \right|_{y=g(x)} = \frac{d g(x)}{d x}$$

(3)

Ableitung der

Umkehrfunktion:

$$\frac{d f^{-1}(x)}{dx} \stackrel{(e.z)}{=} \frac{1}{\quad}$$

(4)

$$f^{-1}(x)$$

Inverse Funktion: Sei f^{-1} die Inverse Funktion v. f :

C1e

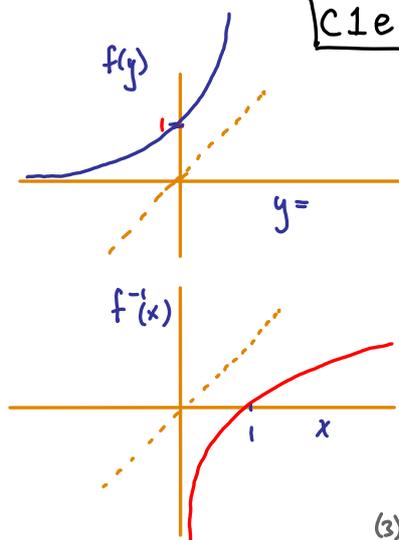
dann gilt:

$$f^{-1}(x) = \quad (1)$$

$$f(f^{-1}(x)) \stackrel{\text{KR}}{=} \quad = x = \quad (1')$$

(d.2), mit $g =$

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} \stackrel{(1')}{=} \frac{1}{\quad} \quad (2)$$



Beispiel:

$$\ln(x) \stackrel{(1)}{\quad}, \quad f^{-1}(x) = \quad, \quad f(y) = \quad (4)$$

$$\frac{d \ln(x)}{dx} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\quad} = \frac{1}{\quad} = \frac{1}{\quad} = \frac{1}{\quad} (5)$$

C1.3 Ableitungen v. wichtigen Funktionen

(1) C1f

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) \quad \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x) \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \frac{d}{dx} \cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \quad \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \quad (5)$$

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}] \quad, \quad \cosh(x) = \frac{1}{2} [e^x + e^{-x}] \quad (6)$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad, \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x) \quad \frac{d}{dx} \cosh(x) = ?? \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \quad \frac{d}{dx} \coth(x) = ?? \quad (9)$$

C2 Integrieren 1-dimensionaler Funktionen

C2a

C2.1 Grundidee der Integration

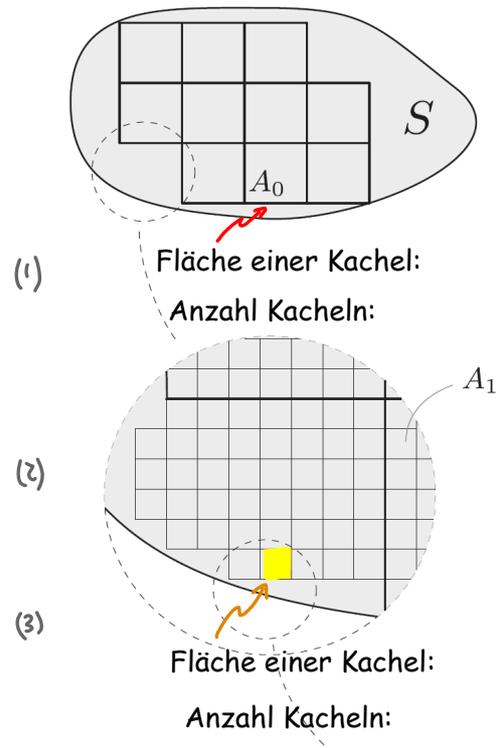
Lernziel: verallgemeinerbare Interpretation des Begriffs 'Integral einer Funktion'

Beispiel: Bestimmung einer 2-dimensionalen Fläche:

Schätzung d. Gesamtfläche: $F \approx \sum =$

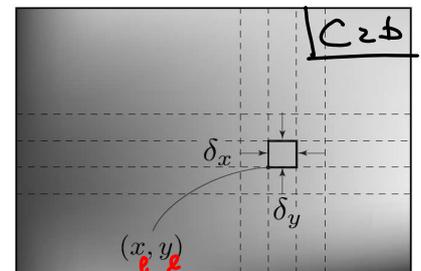
Bessere Schätzung d. Gesamtfläche: $F \approx \sum =$

Tatsächliche Gesamtfläche erhält man im Limes 'unendlich vieler', 'unendlich kleiner' Flächenelemente.



Kompliziertere Aufgabe: Fläche sei ungleichmäßig angemalt. Was ist Gesamtmasse der Farbe?

Schätzung der Gesamtmasse: $M \approx \sum$
 Farbmasse der Kachel bei (x, y)
 Massendichte = Masse pro Flächenelement



Tatsächlicher Farbverbrauch, akkurat bestimmt im Limes unendlich vieler, infinitesimal kleiner Kacheln:
 Integrationsmass (2-dimensional)

$M = \lim \sum_{k=1} \equiv$
 Funktion von zwei kontinuierlichen Variablen (2)
 Integrationsbereich
 Falls $\rho(x, y) =$
 dann = Fläche von

Allgemeine Faustregel: Integral = Grenzwert einer Summe (3)

'Riemann-Summe' = $\lim \sum$
 Diskretisierungsparameter:
 Diskretisierungsindex:
 ist proportional zu
 'Mutter aller Integrale'
 Größe, über die summiert wird:

Beispiel: Fläche unter einer Kurve

C2c

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

Integrationsbereich: $S =$

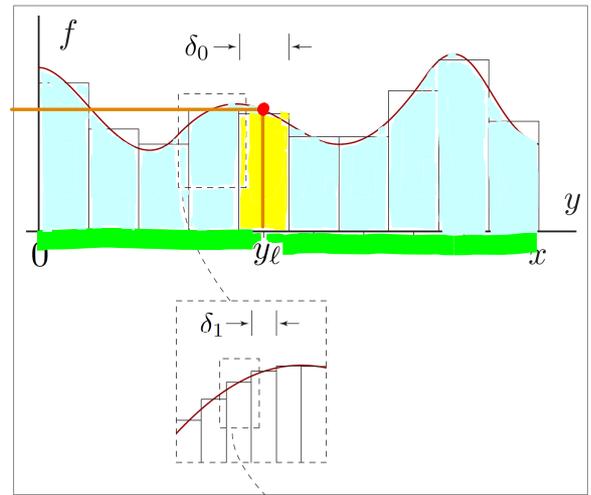
Diskretisierungsparameter = Kachelbreite:

Diskretisierungsindex:

Fläche v. Kachel l :

Schätzung d. Gesamtfläche: $F(x) = \sum$

Tatsächliche Fläche: $F(x) = \lim \sum \equiv$



Definition: 'Integral d. Funktion f'

Integration als 'Umkehroperation' des Differenzierens

C2d

Wie ändert sich $F(x)$ als Funktion von x ?
(halte δ fest, füge eine Kachel hinzu)

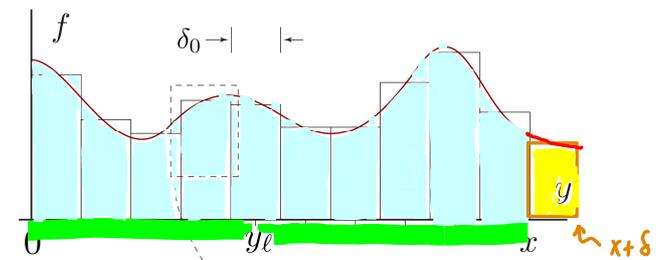
$$F(x + \delta) \stackrel{(c.3)}{\approx} \delta \sum_{l=1}^{N_x} f_l$$

$$= \delta \sum_{l=1}^{N_x} f_l +$$

(1)

(2)

(3)



Mutter aller Ableitungen

(1a.1)

Aufgelöst nach f:

$f(x) \stackrel{(3)}{=} \frac{F(x + \delta) - F(x)}{\delta} \approx$



(4)

Im Limes $\delta \rightarrow 0$ erhalten wir den 'Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung':

$$F(x) = \int_0^x dy f(y) \Rightarrow$$

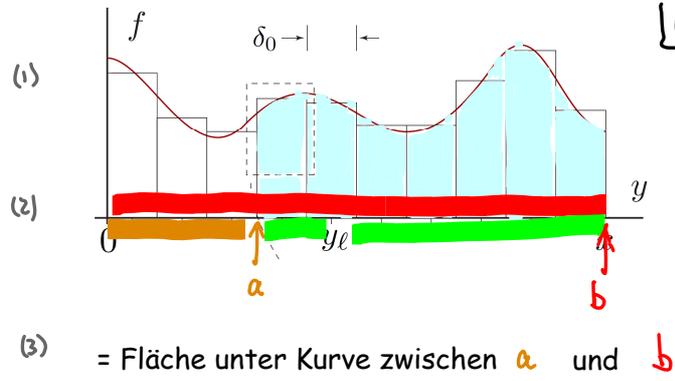
(5)

'Bestimmtes Integral':

$$F(b) - F(a)$$

$$(d.z.) \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\delta \sum_{\ell=1}^n f_{\ell} - \delta \sum_{\ell=1}^n f_{\ell} \right]$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \sum_{\ell=1}^n f_{\ell} \equiv \int_a^b dy f(y) \quad (3)$$



C2e

Standardnotation:

$$\int dy f(y) \stackrel{(1)}{=} F(b) - F(a) \equiv F(y) \Big|_a^b \equiv [F(y)] \quad (4)$$

Falls $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, ist $F: x \mapsto$ eine 'Stammfunktion' von $f: x \mapsto f(x)$ (5)

Stammfunktion ist nicht eindeutig:

$$F: x \mapsto F(x) \quad \text{ist auch eine Stammfunktion.} \quad (6)$$

\hookrightarrow beliebige Konstante

'Unbestimmtes Integral':

$$\int dy f(y) \equiv \quad (7)$$

C2.3 Integrationsregeln

C2f

Partielle Integration (entstammt der Produktregel)

Sei $F(x) =$ mit beliebig aber differenzierbar.

Produktregel: $F = u v + u' v$ (1)

$\int dx (1)$: Hauptsatz $F' = u' v + u v'$ (2)

Umstellen: $\int_a^b dx = \int_a^b dx - \int_a^b dx$ 'partielle Integration' (3)

Nützlich, falls einfacher ist .

Beispiel: $\int_0^{\pi} dx x \sin(x) =$ (4)

$u =$ $v' =$ $=$ $=$ (5)

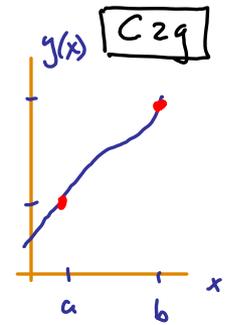
$u' =$ $v =$

Variablen-Substitution (entstammt der Kettenregel)

Sei $f(y) =$ (1)

und eine monoton steigende Funktion v. (2)

$\int dy$ (1): $f(y) \stackrel{(1)}{=} \frac{d}{dy} F(y) =$ (3) Hauptsatz



Alternativ, betrachte $F(y)$ als Funktion von :

Kettenregel: $F(y(x)) \stackrel{(1 \text{ d. 2.})}{=} =$ (1) (4)

$\int dx$ (4): $\frac{dy}{dx} f(y(x)) = \frac{d}{dx} F(y(x)) =$ (5) Hauptsatz

$= F(\quad) - F(\quad) = F(\quad) - F(\quad)$ (6)

(6) = (3): $\int_a^b \frac{dy}{dx} f(y(x)) =$ (3) (7)

'Variablen-Substitution': $\int_a^b \frac{dy(x)}{dx} f(y(x)) \stackrel{(3,7)}{=} \int_{y(a)}^{y(b)} f(y) dy$ [y(x) monoton zunehmend] C2 h

Steigung positiv

Steigung negativ

Merkregel: Substitution: $y = \quad$, Integrationsmaß: $y = y(x) \approx$ Eselsbrücke $\Rightarrow \approx \frac{dy(x)}{dx}$ (2)

Integrationsgrenzen: $x \mapsto y(x)$ (3)

Beispiel: $I = \int_4^5 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$ (4)

Substitution: Integrationsmaß: $y(x) =$ (5) $\frac{dy}{dx} =$ (6) \Rightarrow Integrationsgrenzen: $4 \mapsto y(4) =$ (7) $5 \mapsto y(5) =$ (8)

$I = \int_{(6)} \frac{1}{(7)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{y} \Big|_{17}^{26} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{26} - \frac{1}{17} \right]$ (9)

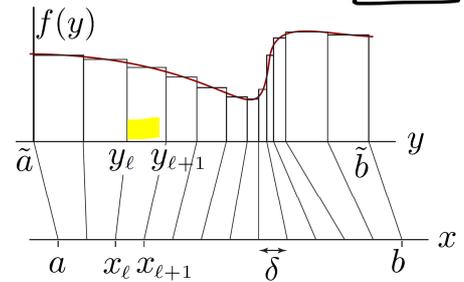
Variablen-Substitution (intuitive Diskussion)

Czi

Kacheln müssen nicht alle gleich groß sein!

$$f: [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto f(y) \quad (1)$$

$\{y_\ell\}$ seien Grenzpunkte v. 'ungleichbreiten' Kacheln.



Verallgemeinerung der Riemann-Summe:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(y) dy = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell} f(y_\ell) \underbrace{[y_{\ell+1} - y_\ell]}_{\text{Breite v. Kachel } \delta} \quad (2)$$

Umformung in Riemann-Summe mit gleichbreiten Kacheln:

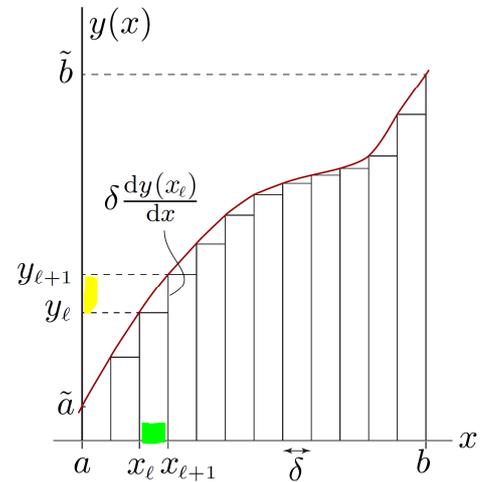
$$x_\ell \equiv \delta \cdot \ell \quad (3)$$

$$\delta \equiv (b-a)/N \quad (4)$$

Kachelbreiten seien bestimmt durch eine (frei gewählte) monoton steigende Funktion, y :

$$x: [a, b] \rightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}] = [y(a), y(b)]$$

$$x \mapsto y(x) \quad \text{mit} \quad y_\ell = y(x_\ell) \quad (5)$$



Variablen-Substitution in der Riemann-Summe:

Czi

$$\begin{aligned} y(b) &= \tilde{b} \\ y(a) &= \tilde{a} \end{aligned} \quad (i.2) \quad \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(y) dy = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell} f(y_\ell) [y_{\ell+1} - y_\ell] \quad (1)$$

$$(i.5) \quad = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell} f(y(x_\ell)) \left[\frac{y(x_{\ell+1}) - y(x_\ell)}{\delta} \right] \cdot \delta \quad (2)$$

$$\approx \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell} f(y(x_\ell)) \underbrace{\frac{dy(x_\ell)}{dx}}_{\substack{\text{Mutter aller Ableitungen} \\ (Cib.2)}} \cdot \delta \quad (3)$$

$$= \int_a^b f(y(x)) \frac{dy(x)}{dx} dx \quad (4)$$

entstammt den ungleichen Kachelbreiten in Ausgangsformel (i.2), und beschreibt die Streckung/Stauchung der Kachelbreiten, die beim Übergang zu gleichbreiten Kacheln generiert wird.

'Variablen-Substitution':

$$\int_a^b \frac{dy(x)}{dx} f(y(x)) dx \stackrel{(4)}{=} \int_{y(a)}^{y(b)} f(y) dy \quad (5)$$

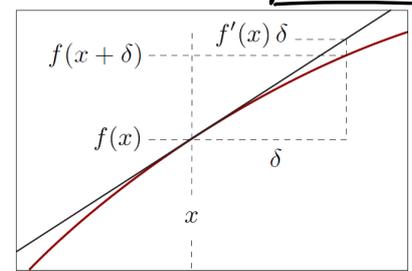
Zusammenfassung: C1-C2

Z C1

C1: Ableitung 1-dimensionaler Funktionen

Definition d.
Ableitung:

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim_{\delta > 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \quad (1)$$



Jede Ableitung stellt eine lokale Näherungen einer Funktion durch eine lineare Funktion dar!

$$f(x+\delta) \approx f(x) + \delta \frac{df(x)}{dx} \quad (2)$$

Produktregel:

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} g(x) + f(x) \frac{d(g(x))}{dx} \quad (3)$$

Kettenregel:

$$\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx} \quad (4)$$

Ableitung d.
Umkehrfunktion:

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df(y)}{dy} \Big|_{y=f^{-1}(x)}} \quad (5)$$

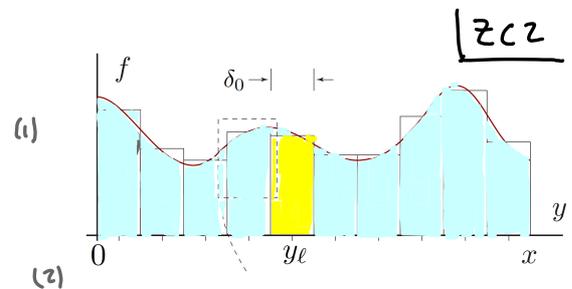
C2 Integrale

'Riemann-Summe'

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{l=1}^{N(\delta)} \delta X_l$$

Fläche
unter Kurve:

$$F(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{l=1}^x \delta f_l \equiv \int_0^x dy f(y)$$



'Hauptsatz':

$$F(x) = \int_0^x dy f(y) \implies \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (3)$$

Bestimmtes
Integral:

$$\int_a^b dy f(y) = F(b) - F(a) \equiv F(y) \Big|_a^b \quad (4)$$

'Partielle
Integration'

$$\int_a^b dx u(x) v'(x) = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx u'(x) v(x) \quad (5)$$

'Variablen-
Substitution':

$$\int_a^b dx \frac{dy(x)}{dx} f(y(x)) = \int_{y(a)}^{y(b)} dy f(y), \quad dy = dx y'(x), \quad \begin{array}{l} x \mapsto y(x) \\ a \mapsto y(a) \\ b \mapsto y(b) \end{array} \quad (6)$$