Blatt 14.2: Komplexe Analysis

Ausgabe: Mo 30.01.23 Zentralübung: Do 02.02.23 Abgabe: Do 09.02.23, 14:00
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 1, 2(a,b), 4(a).
Videos existieren für Beispielaufgaben 2 (C9.4.1), 4 (C9.4.7).

Beispielaufgabe 1: Satz von Cauchy [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](E).

Die Funktion $f(z) = \mathrm{e}^z$ für $z \in \mathbb{C}$ ist analytisch. Folglich müssen nach dem Satz von Cauchy (a) geschlossene Konturintegrale über einem einfach zusammenhängenden Gebiet Null ergeben, und (b) Konturintegrale zwischen zwei Punkten nicht vom gewählten Weg abhängen. Überprüfen Sie diese Aussagen explizit durch Berechnung folgender komplexer Konturintegrale:

(a) $I_{\gamma_R} = \oint_{\gamma_R} \mathrm{d}z\, f(z)$, entlang des Kreises γ_R mit Radius R um den Ursprung $z = 0$.

(b) $I_{\gamma_i} = \int_{\gamma_i} \mathrm{d}z\, f(z)$, zwischen den Punkten $z_0 = 0$ und $z_1 = 1 - \mathrm{i}$, entlang (i) der geraden Strecke $\gamma_1 : z(t) = (1 - \mathrm{i})t$ und (ii) der Kurve $\gamma_2 : z(t) = t^3 - \mathrm{i}t$, mit $t \in (0, 1)$. Berechnen Sie auch explizit die Differenz $F(z_1) - F(z_0)$, wobei $F(z)$ die Stammfunktion von $f(z)$ ist.

Beispielaufgabe 2: Kreisförmige Konturen, Residuensatz [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[2](A)

(a) Berechnen Sie die Integrale $I_+^{(k)} = \oint_{k \text{ mal: } |z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{z}$ und $I_-^{(k)} = \oint_{k \text{ mal: } |z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{z}$, wobei für $I_+^{(k)}$ (bzw. $I_-^{(k)}$) ein Kreis mit Radius R um den Ursprung k mal in mathematisch positive (bzw. negative) Richtung, d.h. gegen (bzw. entlang dem) Uhrzeigersinn, durchlaufen wird. Nutzen Sie dazu nicht den Residuensatz, sondern berechnen Sie die Integrale direkt mittels der Parametrisierung $z(\phi) = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ und einer geeigneten Wahl des Integrationsintervalls für ϕ.

Berechnen Sie folgende geschlossenen Wegintegrale in der komplexen Ebene mit dem Residuensatz, für $0 < a \in \mathbb{R}$:

(b) $$I_1(a) = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \mathrm{d}z\, g(z)\,, \qquad I_2(a) = \oint_{2 \text{ mal: } |z|=2} \mathrm{d}z\, g(z)\,, \quad \text{mit} \quad g(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z^2+1}\,.$$

(c) $$I_3(a) = \oint_{|z|=4} \mathrm{d}z\, f(z)\,, \qquad \text{mit} \quad f(z) = \frac{z}{z^3 + (a\mathrm{i} - 6)z^2 + (9 - 6a\mathrm{i})z + 9a\mathrm{i}}\,.$$

Hinweis: Eine der Pole von $f(z)$ liegt bei $z_1 = -a\mathrm{i}$.

[Kontrollergebnisse: (b) $I_2(\ln 2) = 3\pi$, (c) $I_3(1) = 0$, $I_3(6) = \frac{4\pi}{25}(1 + \frac{4}{3}\mathrm{i})$.]

Beispielaufgabe 3: Integration durch Schließung der Kontur und Residuensatz [3]
Punkte: [3](A).

Berechnen Sie folgendes Integral, mit $a, b \in \mathbb{R}$, durch Schließung der Kontur entlang eines geeignet gewählten Halbkreises mit Radius $\to \infty$:

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{1}{x^2 - 2xa + a^2 + b^2} \, . \qquad \text{[Kontrollergebnis: } I(-1,-2) = \tfrac{\pi}{2}.\text{]}$$

Beispielaufgabe 4: Fourier-Rücktransformation mittels Konturschließung [4]
Punkte: (a)[2.5](A); (b)[1.5](A)

(a) Die Fourier-Transformierte der durch die Differentialgleichung $(\mathrm{d}_t + a)G(t) = \delta(t)$ (mit $0 < a \in \mathbb{R}$) definierten Green'schen Funktion lautet $\tilde{\mathcal{G}}(\omega) = (a - \mathrm{i}\omega)^{-1}$ (vergleiche Blatt 12, Aufgabe 3). Zeigen Sie, dass die entsprechende Fourier-Rücktransformation folgendes Ergebnis liefert:

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{a - \mathrm{i}\omega} = \Theta(t)\,\mathrm{e}^{-at} \, , \quad \text{mit} \quad \Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \, , \\ 0 & \text{für } t < 0 \, . \end{cases}$$

(b) Die Fourier-Transformierte der Exponentialfunktion, $\tilde{L}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{e}^{-a|t|} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$ (mit $0 < a \in \mathbb{R}$), ist eine Lorentz-Kurve. Finden Sie die Fourier-Rücktransformierte, $L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tilde{L}(\omega)$, mittels expliziter Berechnung des Integrals.

Hinweis: Berechnen Sie die Integrale für $t \neq 0$ als Konturintegrale, durch Schließung der Kontur entlang eines geeignet gewählten Halbkreises mit Radius $\to \infty$.

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 14]

Hausaufgabe 1: Satz von Cauchy [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](E).

Berechnen Sie die Konturintegrale $I_{\gamma_i} = \int_{\gamma_i} \mathrm{d}z \, (z - \mathrm{i})^2$ explizit entlang folgender Kurven, γ_i, und erläutern Sie die Ergebnisse mit Verweis auf den Satz von Cauchy:

(a) γ_1 ist die Gerade von $z_0 = 0$ bis $z_1 = 1$, γ_2 die Gerade von $z_1 = 1$ bis $z_2 = \mathrm{i}$, und γ_3 die Gerade von $z_2 = \mathrm{i}$ bis $z_0 = 0$. Was ergibt $I_{\gamma_1} + I_{\gamma_2} + I_{\gamma_3}$? Erläutern Sie das Ergebnis.

(b) γ_4 ist der Viertelkreis mit Radius 1 von z_1 nach z_2. Gibt es einen Bezug zwischen I_{γ_4} und den Integralen aus (a)?

Hausaufgabe 2: Kreisförmige Konturen, Residuensatz [3]
Punkte: (a)[1.5](M); (b)[0.5](E); (c)[0.5](E); (d)[0.5](E).

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{4z}{(z-a)(z+1)^2}$, mit $1 < a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Residuen der Funktion f an allen ihrer Polen.

Berechnen Sie die Integrale $I_{\gamma_i}(a) = \int_{\gamma_i} \mathrm{d}z\, f(z)$ für folgende Integrationswege:

(b) γ_1: ein Kreis mit Radius $R = 1$ um $z = a$, durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn.

(c) γ_2: ein Kreis mit Radius $R = 1$ um $z = -1$, durchlaufen im Uhrzeigersinn.

(d) γ_3: ein Kreis mit Radius $R = 2a$ um den Ursprung, durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn.

[Kontrollergebnisse: (b) $I_{\gamma_1}(2) = \frac{16}{9}\pi\mathrm{i}$, (c) $I_{\gamma_2}(3) = \frac{3}{2}\pi\mathrm{i}$].

Hausaufgabe 3: Integration durch Schließung der Kontur und Residuensatz [5]
Punkte: (a)[2](M); (b)[3](A).

Berechnen Sie folgende Integrale (mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$) durch Schließung der Kontur entlang eines Halbkreises mit Radius $\to \infty$ in der oberen oder unteren komplexen Halbebene (zeigen Sie, dass beide Optionen dasselbe Ergebnis liefern!):

(a) $I(a,b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x}{(x^2 + b^2)(x - \mathrm{i}a)}$, (b) $I(a,b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x}{(x + \mathrm{i}b)^2(x - \mathrm{i}a)}$.

[Kontrollergebnisse: (a) $I(3,-2) = \frac{\pi}{5}$, (b) $I(3,2) = \frac{6\pi}{25}$.]

Hausaufgabe 4: Fourier-Rücktransformation mittels Konturschließung: Green'sche Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators [6]
Punkte: (a)[3](A); (b)[3](A).

Die Green'sche Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators ist durch die Differentialgleichung $(\mathrm{d}_t^2 + 2\gamma \mathrm{d}_t + \Omega^2)G(t) = \delta(t)$ definiert (mit Ω und γ reell und positiv). Ihre Fourier-Transformierte, definiert durch $G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tilde{\mathcal{G}}(\omega)$, lautet $\tilde{\mathcal{G}}(\omega) = (\Omega^2 - \omega^2 - 2\gamma\mathrm{i}\omega)^{-1}$. Schreiben Sie die Green'sche Funktion in die Form $G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, f(z)$, und berechnen Sie das Integral durch Schließung der Kontur in der komplexen Ebene. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Finden Sie die Residuen von $f(z)$. Unterscheiden Sie dabei folgende Fälle:
(i) $\Omega > \gamma$ (unterdämpft), (ii) $\Omega = \gamma$ (kritisch gedämpft) und (iii) $\Omega < \gamma$ (überdämpft).
Hinweis: (i) und (iii) haben jeweils zwei Pole von Ordnung eins; (ii) hat nur einen Pol, dafür aber von Ordnung zwei.

(b) Berechnen Sie $G(t)$ durch Schließung der Kontur entlang eines geeignet gewählten Halbkreises mit Radius $\to \infty$ (wieder mit Fallunterscheidung!). [Kontrollergebnisse für $G(t)$: (i) für $\Omega = 1$ und $\gamma \to 0$, $G(\pi/2) = 1$; (ii) für $\Omega = \gamma = 1$, $G(1) = \mathrm{e}^{-1}$; (iii) für $\Omega = 4$ und $\gamma = 5$, $G(1/3) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-5/3}\sinh(1)$.]

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 17]
