Blatt 14.2: Komplexe Analysis

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 1, 2(a,b), 4(a).
Videos existieren für Beispielaufgaben 2 (C9.4.1), 4 (C9.4.7).

Optionale Aufgabe 1: Cauchy-Riemann-Gleichungen [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E).

Schreiben Sie folgende Funktionen von $z = x + \mathrm{i}y$ bzw. $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ in die Form $f(x,y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ und überprüfen Sie explizit, ob die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt sind. Welche der Funktionen ist analytisch in z?

(a) $f(z) = \mathrm{e}^z\,,$ (b) $f(z) = \bar{z}^2.$

Optionale Aufgabe 2: Cauchy-Riemann-Gleichungen [5]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[2](M).

Ermitteln Sie mittels der Cauchy-Riemann-Gleichungen, welche der folgenden Funktionen analytisch in $z = x + \mathrm{i}y$ sind, und wenn ja, auf welchem Gebiet in $\mathbb{C}$. Kontrollieren Sie jeweils ihre Schlussfolgerung, indem Sie jede Funktion durch z und $\bar{z}$ ausdrücken.

(a) $f(x,y) = (x^3 - 3xy^2) + \mathrm{i}(3x^2y - y^3)\,.$

(b) $f(x,y) = xy + \mathrm{i}\tfrac{1}{2}y^2\,.$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}\,.$

(d) $$\left.\begin{matrix} f_+(x,y) \\ f_-(x,y) \end{matrix}\right\} = \mathrm{e}^x\big[x\cos y \pm y \sin y\big] + \mathrm{i}\mathrm{e}^x\big[x \sin y \mp y \cos y\big]\,.$$

Optionale Aufgabe 3: Laurent-Reihe, Residuen [2]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[1](E).

$p(z)$ sei ein Polynom der Ordnung $k \geq 0$ auf $\mathbb{C}$, welches keine Nullstelle bei z_0 hat, dann ist $f_m(z) = \frac{p(z)}{(z-z_0)^m}$ (mit $m \geq 1$) eine analytische Funktion auf $\mathbb{C}\backslash z_0$, mit einem Pol der Ordnung m bei z_0.

(a) Zeigen Sie mittels der Taylor-Reihe von $p(z)$ bezüglich z_0, dass die Laurent-Reihe von $f_m(z)$ bezüglich z_0 folgende Form hat:
$$f_m(z) = \sum_{n=-m}^{k-m} \frac{p^{(n+m)}(z_0)}{(n+m)!}(z - z_0)^n\,, \quad \text{mit} \quad p^{(n)}(z_0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}p(z)\bigg|_{z=z_0}\,.$$

(b) Finden Sie für $f_m(z) = \frac{z^3}{(z-2)^m}$ die Laurent-Reihe bezüglich des Pols bei $z_0 = 2$.

(c) Finden Sie für $m = 1$, 2, 3, 4 und 5 das Residuum von $f_m(z) = \frac{z^3}{(z-2)^m}$ bezüglich des Pols bei $z_0 = 2$, mittels der Formel $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$.
[Ergebniskontrolle: sind die Residuen von (c) konsistent mit der Laurent-Reihe von (b)?]

Optionale Aufgabe 4: Laurent-Reihe, Residuen [4]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[2](M); (c)[1](M); (d)[0.5](E).

Bestimmen Sie für folgende Funktionen bezüglich jedes ihrer Pole zunächst das Residuum mittels der Residuum-Formel, dann die Laurent-Reihe an jedem Pol mittels einer geeigneten Taylor-Entwicklung.

(a) $\dfrac{2z^3 - 3z^2}{(z-2)^3}$, (b) $\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$, (c) $\dfrac{\ln z}{(z-5)^2}$, (d) $\dfrac{\mathrm{e}^{\pi z}}{(z-\mathrm{i})^m}$ mit $m \geq 1$.

Hinweis: Die Laurent-Reihe einer Funktion der Form $f(z) = g(z)/(z-z_0)^m$, mit $g(z)$ analytisch in einer Umgebung von z_0, folgt aus der Taylor-Reihe von $g(z)$ bezüglich z_0.
[Ergebniskontrolle: Der konstante Term [Koeffizient von $(z-z_0)^0$] in der Laurent-Reihe lautet jeweils: (a) 2, (b) $-\frac{1}{4}$ für die Pole bei $z_0 = 1$ bzw. 3, (c) $-\frac{1}{25}$, (d) $-\pi^m/m!$. Weiterer Check: Gleicht das Residuum dem Koeffizienten von $(z-z_0)^{-1}$ der jeweiligen Laurent-Reihe?]

Optionale Aufgabe 5: Verschiedene Integrationswege, Residuensatz [4]
Punkte: (a)[2](M); (a)[0.5](M); (b)[0.5](M); (c)[0.5](M); (d)[0.5](M).

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+4)(z^2+a^2)}$, mit $a \in \mathbb{R}$, $3 \leq a < 4$.

(a) Bestimmen Sie die Residuen der Funktion f an allen ihrer Polen.

Berechnen Sie die Integrale $I_{\gamma_i}(a) = \int_{\gamma_i} \mathrm{d}z\, f(z)$ für folgende Integrationswege:

(b) γ_1: ein Kreis mit Radius $R = 1$ um den Ursprung, durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn.

(c) γ_2: ein Kreis mit Radius $R = \frac{1}{2}$ um $z = 2\mathrm{i}$, durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn.

(d) γ_3: ein Kreis mit Radius $R = 2$ um $z = 2\mathrm{i}$, durchlaufen im Uhrzeigersinn.

(e) γ_4: die reelle Achse, durchlaufen in positiver Richtung.

[Kontrollergebnisse: (c) $I_{\gamma_2}(3) = -\frac{2\pi}{5}$, (d) $I_{\gamma_3}(\frac{10}{3}) = -\frac{3\pi}{16}$, (e) $I_{\gamma_4}(\frac{7}{2}) = \frac{2\pi}{11}$.]

Optionale Aufgabe 6: Verschiedene Integrationswege, Residuensatz [5]
Punkte: (a)[2.5](A); (b)[0.5](E); (c)[0.5](E); (d)[0.5](E); (e)[0.5](M); (f)[0.5](M).

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{[z^2 - 2az + a^2 + \frac{1}{4}]^2\,(4z^2+1)}$, mit $1 < a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Residuen der Funktion f an allen ihrer Polen.

Berechnen Sie die Integrale $I_{\gamma_i}(a) = \int_{\gamma_i} \mathrm{d}z\, f(z)$ für folgende Integrationswege:

(b) γ_1: ein Kreis mit Radius $R = 1$ um $z_1 = 0$, durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn.

(c) γ_2: ein Kreis mit Radius $R = \frac{1}{\sqrt{2}}a$ um $z_2 = \frac{1}{2}a(1 - \mathrm{i})$, durchlaufen im Uhrzeigersinn.

(d) γ_3: ein Kreis mit Radius $R = a + \frac{1}{2}$ um $z_3 = \frac{1}{2}a$, durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn.

(e) γ_4: die Linie $z = x$, mit $x \in (-\infty, \infty)$, durchlaufen entlang der positiven x-Richtung.

(f) γ_5: die Linie $z = \frac{1}{3}a + \mathrm{i}y$, mit $y \in (-\infty, \infty)$, durchlaufen entlang der positiven y-Richtung.

[Kontrollergebnisse: (b) $I_{\gamma_1}(2) = \frac{\pi \mathrm{i}}{25}$, (c) $I_{\gamma_2}(2) = \frac{7\pi}{25}$, (e) $I_{\gamma_4}(3) = \frac{3\pi}{25}$, (f) $I_{\gamma_5}(3) = \frac{\pi \mathrm{i}}{150}$.]

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 22]
