



<https://moodle.lmu.de> → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 13: Integralsätze von Gauß und Stokes

Ausgabe: Mo 23.01.23 Zentralübung: Do 26.01.23 Abgabe: Do 02.02.23, 14:00

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll

Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 2, 4, 6, (7, falls Zeit reicht).

Videos existieren für Beispielaufgaben 4 (V3.7.7), 7 (V3.7.11).

Beispielaufgabe 1: Satz von Gauß – Quader (kartesische Koordinaten) [2]

Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M).

Betrachten Sie den Quader Q , definiert durch $x \in (0, a)$, $y \in (0, b)$, $z \in (0, c)$, und das Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\frac{1}{2}x^2 + x^2y, \frac{1}{2}x^2y^2, 0)^T$. Berechnen Sie dessen nach außen gerichteten Fluss, $\Phi = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$, durch die Quaderoberfläche, $S \equiv \partial Q$, auf zwei Weisen:

- (a) direkt als Fluss-Integral;
- (b) mittels dem Satz von Gauß als Volumenintegral.

[Kontrollergebnisse: falls $a = 2$, $b = 3$, $c = \frac{1}{2}$, dann gilt $\Phi = 18$.]

Beispielaufgabe 2: Berechnung des Volumens eines Fasses mittels Satz von Gauß [1]

Punkte: (a)[1](E); (b)[2](A,Bonus).

Wir betrachten einen dreidimensionalen Körper K mit Oberfläche S . Wir können sein Volumen V berechnen, indem wir es als Flussintegral über S darstellen, unter Verwendung des Satzes von Gauß für ein Vektorfeld \mathbf{u} , welches $\nabla \cdot \mathbf{u} = 1$ erfüllt:

$$V = \int_V dV = \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{u} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}.$$

Berechnen Sie mittels dieser Methode, mit $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(x, y, 0)^T$, und zylindrischen Koordinaten, das Volumen

- (a) eines Zylinders mit Höhe h und Radius R zu berechnen, und
- (b) eines zylindrischen Fasses mit Höhe H und z -abhängigem Radius, $\rho(z) = R[1+a \sin(\pi z/h)]^{1/2}$, mit $z \in (0, h)$ und $a > 0$. [Kontrollergebnis: falls $a = \pi/4$, dann $V = \frac{3}{2}\pi R^2 h$.]

Beispielaufgabe 3: Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace in Zylinderkoordinaten [5]

Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[0.5](E); (d)[1](M); (e)[0.5](M); (f)[1](M); (g)[1](E)

Wir betrachten ein krummliniges *orthogonales* Koordinatensystem mit Koordinaten $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)^T \equiv (\eta, \mu, \nu)^T$, Ortsvektor $\mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{r}(\eta, \mu, \nu)$ und Koordinatenbasisvektoren $\partial_\eta \mathbf{r} = \mathbf{e}_\eta n_\eta$, $\partial_\mu \mathbf{r} = \mathbf{e}_\mu n_\mu$, $\partial_\nu \mathbf{r} = \mathbf{e}_\nu n_\nu$, mit $\|\mathbf{e}_j\| = 1$ und Normfaktoren n_η, n_μ, n_ν (d.h. keine Summationen über η, μ und ν

hier!). Ferner sei $f(\mathbf{r})$ ein Skalarfeld und $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\eta u^\eta + \mathbf{e}_\mu u^\mu + \mathbf{e}_\nu u^\nu$ ein Vektorfeld, dargestellt in der *lokalen Basis*. Dann sind Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator gegeben durch

$$\begin{aligned}\nabla f &= \mathbf{e}_\eta \frac{1}{n_\eta} \partial_\eta f + \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \eta \quad \mu \\ \nu \end{array} + \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \eta \quad \mu \\ \nu \end{array}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{n_\eta n_\mu n_\nu} \partial_\eta (n_\mu n_\nu u^\eta) + \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \eta \quad \mu \\ \nu \end{array} + \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \eta \quad \mu \\ \nu \end{array}, \\ \nabla \times \mathbf{u} &= \mathbf{e}_\eta \frac{1}{n_\mu n_\nu} \left[\partial_\mu (n_\nu u^\nu) - \partial_\nu (n_\mu u^\mu) \right] + \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \eta \quad \mu \\ \nu \end{array} + \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \eta \quad \mu \\ \nu \end{array}, \\ \nabla^2 f &= \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{n_\eta n_\mu n_\nu} \partial_\eta \left(\frac{n_\mu n_\nu}{n_\eta} \partial_\eta f \right) + \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \eta \quad \mu \\ \nu \end{array} + \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \eta \quad \mu \\ \nu \end{array},\end{aligned}$$

wobei Kreise mit Pfeilen zyklische Indexpermutationen andeuten. Betrachten Sie nun Zylinderkoordinaten, definiert durch $\mathbf{r}(\rho, \phi, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)^T$.

(a) Wie lauten $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ und n_ρ, n_ϕ, n_z ?

Finden Sie, ausgehend von den oben angegebenen allgemeinen Formeln, explizite Formeln für

(b) ∇f , (c) $\nabla \cdot \mathbf{u}$, (d) $\nabla \times \mathbf{u}$, (e) $\nabla^2 f$.

(f) Überprüfen Sie explizit, mittels den oben angegebenen Formeln für Gradient und Rotation für allgemeine krummlinigen Koordinaten u, v, w (also nicht spezifisch für Zylinderkoordinaten), dass $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$.

(g) Nutzen Sie Zylinderkoordinaten zur Berechnung von $\nabla f, \nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{u}$ und $\nabla^2 f$ für die Felder $f(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}\|^2$ und $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (x, y, 2z)^T$. [Kontrollergebnis: bei $\mathbf{r} = (1, 1, 1)^T$ gilt $\nabla f = (2, 2, 2)^T$, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 4$, $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ und $\nabla^2 f = 6$.]

Beispielaufgabe 4: Gradient, Divergenz, Rotation (Kugelkoordinaten) [2]

Gegeben sei ein Skalarfeld $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}$ und ein Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (e^{-r/a}/r)\mathbf{r}$ mit $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Berechnen Sie $\nabla f, \nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{u}$ und $\nabla^2 f$ explizit für $r > 0$, mittels

(a) kartesischen Koordinaten; (b) Kugelkoordinaten.

Zeigen Sie, dass Ihre Ergebnisse aus (a) und (b) miteinander konsistent sind.

Beispielaufgabe 5: Satz von Gauß – Zylinder (Zylinderkoordinaten) [2]

Punkte: (a)[0.5](E); (b)[1](M); (c)[0.5](M)

Gegeben sei ein Vektorfeld, \mathbf{u} , in Zylinderkoordinaten definiert durch $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\rho z \rho$, und ein Zylindervolumen, V , definiert über $\rho \in (0, R), \phi \in (0, 2\pi), z \in (0, H)$.

(a) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes \mathbf{u} in Zylinderkoordinaten.

Berechnen Sie den Fluss, Φ , des Vektorfeldes \mathbf{u} durch die Oberfläche, S , des Zylindervolumens V , auf zwei Arten:

(b) indem Sie das Flussintegral $\Phi = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$ explizit berechnen;

- (c) indem Sie das Flussintegral mithilfe des Satz von Gauß in ein Volumenintegral über $\nabla \cdot \mathbf{u}$ umschreiben und dieses Volumenintegral explizit berechnen.

Beispielaufgabe 6: Satz von Stokes – magnetischer Dipol (Kugelkoordinaten) [2]

Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M)

Jedes Magnetfeld lässt sich als $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ darstellen, wobei das Vektorfeld \mathbf{A} das **Vektorpotential** des Feldes genannt wird. Für einen magnetischen Dipol gilt

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{m}r^2}{r^5},$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Das konstante Dipolmoment \mathbf{m} sei nun in z -Richtung orientiert, $\mathbf{m} = \mathbf{e}_z m$. H sei eine Halbkugel mit Radius R , orientiert mit Grundfläche in der xy -Ebene, Symmetrie-Achse entlang der positiven z -Achse und 'Nordpol' auf derselben.

Berechnen Sie das Flussintegral des Magnetfelds durch diese Halbkugel, $\Phi_H = \int_H d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$, auf zwei verschiedene Weisen:

- (a) direkt, mittels Kugelkoordinaten.
- (b) drücken Sie Φ mittels $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ und dem Satz von Stokes durch ein Linienintegral von \mathbf{A} über den Rand der Grundfläche von H aus, und berechnen Sie letzteres.

Beispielaufgabe 7: Satz von Stokes – Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters (Zylinderkoordinaten) [4]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[0.5](M); (d)[0.5](E); (e)[0.5](M); (f)[0.5](M)

Ein unendlich langer, unendlich dünner Leiter sei entlang der z -Achse orientiert und trage einen Strom I . Er generiert ein Magnetfeld folgender Form:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{2I}{c} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_\phi \frac{2I}{c} \frac{1}{\rho}, \quad \text{für } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0.$$

Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation von $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ explizit für $\rho > 0$

- (a) in kartesischen Koordinaten;
- (b) in Zylinderkoordinaten. [Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (a) und (b)!]
- (c) Berechnen Sie mittels Zylinderkoordinaten das Linienintegral, $\oint_\gamma d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$, des Magnetfelds entlang des Randes, γ , einer kreisförmigen, parallel zur xy -Ebene orientierten, auf der z -Achse zentrierten Scheibe, S , mit Radius $R > 0$.
- (d) Berechnen Sie mittels dem Satz von Stokes und dem Ergebnis aus (c) das Flussintegral, $\int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$, der Rotation des Magnetfelds über die in (c) beschriebene Scheibe S .
- (e) Folgern Sie aus Ihren Ergebnissen für $\nabla \times \mathbf{B}$ aus (a) und (d), dass die Rotation des Feldes proportional zu einer zwei-dimensionalen δ -Funktion ist, also die Form $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_z C \delta(x) \delta(y)$ hat, und finden Sie die Konstante C . [*Hinweis*: die zwei-dimensionale δ -Funktion ist so normiert, dass $\int_S dS \delta(x) \delta(y) = 1$ für das Flächenintegral über eine beliebige, parallel zur xy -Ebene gelegene, die z -Achse durchschneidende Fläche S .]

- (f) Schreiben Sie Ihr Ergebnis aus (e) in die Form $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r})$ und bestimmen Sie $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Diese Gleichung ist das Gesetz von Ampère (eine der Maxwell-Gleichungen), wobei $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ die Stromdichte ist. Lässt sich Ihr Ergebnis für $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ entsprechend interpretieren?

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 18]

Hausaufgabe 1: Satz von Stokes – Quader (kartesische Koordinaten) [2]

Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M).

Betrachten Sie den Quader Q , definiert durch $x \in (0, a)$, $y \in (0, b)$, $z \in (0, c)$, und das Vektorfeld $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(yz^2, -xz^2, 0)^T$. Berechnen Sie den nach außen gerichteten Fluss von dessen Rotation, $\Phi = \int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{w})$, durch die Fläche $S \equiv \partial Q \setminus \text{Deckel}$, welche aus allen Quaderflächen außer dem Deckel bei $z = c$ besteht, auf zwei Weisen:

- (a) direkt als Fluss-Integral;
 (b) via dem Satz von Stokes als Linienintegral.

[Kontrollergebnis: falls $a = 2$, $b = 3$, $c = \frac{1}{2}$, dann gilt $\Phi = \frac{3}{2}$.]

Hausaufgabe 2: Berechnung des Volumens einer geriffelten Kugel mittels Satz von Gauß [1]

Punkte: (a)[1](E); (b)[2](A,Bonus).

Das Volumen eines Körpers kann mittels eines Flächenintegrals über die Oberfläche, S , des Körpers berechnet werden, $V = \int_S d\mathbf{S} \cdot \frac{1}{3}\mathbf{r}$, (vgl. die entsprechende Beispielaufgabe). Berechnen Sie mittels dieser Methode in Kugelkoordinaten

- (a) das Volumen, V , einer Kugel mit Radius R , und
 (b) das Volumen, $V(\epsilon, n)$, eines 'geriffelten Balls', dessen ϕ -abhängiger Radius durch die Funktion $r(\phi) = R[1 + \epsilon \sin(n\phi)]^{2/3}$ beschrieben ist, wobei $1 \leq n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Riffel und $\epsilon < 1$ deren Tiefe bestimmt. [Kontrollergebnis: $V(\frac{1}{4}, 4) = \frac{33}{32}V(0, 0)$.]

Hausaufgabe 3: Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace in Kugelkoordinaten [5]

Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[0.5](E); (d)[1](M); (e)[0.5](M); (f)[1](M); (g)[1](E)

Wir betrachten ein krummliniges *orthogonales* Koordinatensystem mit Koordinaten $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)^T \equiv (\eta, \mu, \nu)^T$, Ortsvektor $\mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{r}(\eta, \mu, \nu)$ und Koordinatenbasisvektoren $\partial_\eta \mathbf{r} = \mathbf{e}_\eta n_\eta$, $\partial_\mu \mathbf{r} = \mathbf{e}_\mu n_\mu$, $\partial_\nu \mathbf{r} = \mathbf{e}_\nu n_\nu$, mit $\|\mathbf{e}_j\| = 1$. Ferner sei $f(\mathbf{r})$ ein Skalarfeld und $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\eta u^\eta + \mathbf{e}_\mu u^\mu + \mathbf{e}_\nu u^\nu$ ein Vektorfeld, dargestellt in der *lokalen Basis*. Dann sind Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator gegeben durch

$$\begin{aligned} \nabla f &= \mathbf{e}_\eta \frac{1}{n_\eta} \partial_\eta f + \begin{matrix} \curvearrowright \\ \nu \\ \mu \end{matrix} + \begin{matrix} \curvearrowright \\ \mu \\ \nu \end{matrix}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{n_\eta n_\mu n_\nu} \partial_\eta (n_\mu n_\nu u^\eta) + \begin{matrix} \curvearrowright \\ \nu \\ \mu \end{matrix} + \begin{matrix} \curvearrowright \\ \mu \\ \nu \end{matrix}, \\ \nabla \times \mathbf{u} &= \mathbf{e}_\eta \frac{1}{n_\mu n_\nu} \left[\partial_\mu (n_\nu u^\nu) - \partial_\nu (n_\mu u^\mu) \right] + \begin{matrix} \curvearrowright \\ \nu \\ \mu \end{matrix} + \begin{matrix} \curvearrowright \\ \mu \\ \nu \end{matrix}, \end{aligned}$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{n_\eta n_\mu n_\nu} \partial_\eta \left(\frac{n_\mu n_\nu}{n_\eta} \partial_\eta f \right) + \overset{\eta}{\curvearrowright} \overset{\mu}{\curvearrowright} + \overset{\eta}{\curvearrowright} \overset{\nu}{\curvearrowright}.$$

Betrachten Sie Kugelkoordinaten, $\mathbf{r}(r, \theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)^T$.

(a) Wie lauten $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ und n_r, n_θ, n_ϕ ?

Finden Sie, ausgehend von den oben angegebenen allgemeinen Formeln, explizite Formeln für

(b) ∇f , (c) $\nabla \cdot \mathbf{u}$, (d) $\nabla \times \mathbf{u}$, (e) $\nabla^2 f$.

(f) Überprüfen Sie explizit, dass $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$, mittels den oben angegebenen Formeln für Divergenz und Rotation für allgemeine krummlinigen Koordinaten η, μ, ν (also nicht spezifisch für Kugelkoordinaten).

(g) Nutzen Sie Kugelkoordinaten zur Berechnung von ∇f , $\nabla \cdot \mathbf{u}$, $\nabla \times \mathbf{u}$ und $\nabla^2 f$ für die Felder $f(\mathbf{r}) = \|\mathbf{r}\|^2$ und $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (0, 0, z)^T$. [Kontrollergebnis: bei $\mathbf{r} = (1, 1, 1)^T$ gilt $\nabla f = (2, 2, 2)^T$, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 1$, $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ und $\nabla^2 f = 6$.]

Hausaufgabe 4: Gradient, Divergenz, Rotation (Zylinderkoordinaten) [2]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M)

Gegeben sei ein Skalarfeld $f(\mathbf{r}) = z(x^2 + y^2)$ und ein Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (zx, zy, 0)^T$. Berechnen Sie ∇f , $\nabla \cdot \mathbf{u}$, $\nabla \times \mathbf{u}$ und $\nabla^2 f$ explizit, mittels

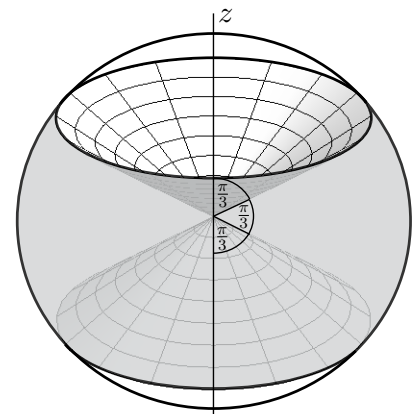
(a) kartesischen Koordinaten; (b) Zylinderkoordinaten.

Zeigen Sie, dass Ihre Ergebnisse aus (a) und (b) miteinander konsistent sind.

Hausaufgabe 5: Satz von Gauß – Keilring (Kugelkoordinaten) [4]

Punkte: (a)[1](M); (b)[2](A); (c)[1](M)

Der in der Skizze grau schattierte 'Keilring', K , wird in Kugelkoordinaten beschrieben durch $r \in (0, R)$ und $\theta \in (\pi/3, 2\pi/3)$. (Solch ein ringartiges Objekt, mit keilförmigem Innenprofil und gerundetem Außenprofil, entsteht aus einer Kugel mit Radius R durch Herausschneiden eines um die z -Achse zentrierten Doppelkegels mit Öffnungswinkel $\pi/3$.) Berechnen Sie den nach außen gerichteten Fluss Φ_K des Vektorfelds $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_r r^2$ durch die Oberfläche ∂K des Keilrings, auf zwei verschiedene Arten:



(a) Berechnen Sie das Flussintegral $\Phi_K = \int_{\partial K} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$. [Kontrollergebnis: falls $R = \frac{1}{2}$, dann $\Phi_K = \frac{\pi}{8}$.]

(b) Drücken Sie das Flussintegral mittels dem Satz von Gauß durch ein Volumenintegral über die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{u}$ aus, und berechnen Sie dieses Volumenintegral explizit.

Hinweis: In Kugelkoordinaten gilt:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u^r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta u^\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi u^\phi.$$

- (c) Berechnen Sie für das Vektorfeld $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = -e_\theta \cos \theta$ den nach außen gerichteten Fluss $\tilde{\Phi}_K = \int_{\partial K} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{w}$ durch die Oberfläche des Keilrings, entweder direkt oder mittels dem Satz von Gauß. [Kontollergesult: falls $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dann $\tilde{\Phi}_K = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$.]

Hausaufgabe 6: Satz von Stokes – Zylinder (Zylinderkoordinaten) [2]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E)

C sei ein Zylinder mit Radius R und Höhe aR^2 , zentriert auf der z -Achse, mit Basis in der xy -Ebene, und $\mathbf{u} = \frac{x^2+y^2}{z}(-y, x, 0)^T$ ein Vektorfeld. Berechnen Sie das Flussintegral von dessen Rotation, $\Phi_D = \int_D d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$, durch den Deckel, D , des Zylinders auf zwei verschiedene Weisen:

- (a) direkt, mittels Zylinderkoordinaten;
- (b) drücken Sie Φ_D mittels dem Satz von Stokes durch ein Linienintegral von \mathbf{u} über den Rand ∂D des Zylinderdeckels aus, und berechnen Sie letzteres.

Hausaufgabe 7: Satz von Gauß – elektrisches Feld einer Punktladung (Kugelkoordinaten) [4]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[0.5](M); (d)[0.5](E); (e)[0.5](M); (f)[0.5](M)

Das elektrische Feld einer Punktladung Q am Ursprung hat die Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{e}_r \frac{Q}{r^2}, \quad \text{mit } r > 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation von $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ explizit für $r > 0$, mittels

- (a) kartesischen Koordinaten; und
- (b) Kugelkoordinaten. [Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (a) und (b)!]
- (c) Berechnen sie mittels Kugelkoordinaten den Fluss, $\Phi_S = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}$, des elektrischen Feldes durch die Oberfläche S einer am Ursprung zentrierten Kugel mit Radius $R > 0$.
- (d) Berechnen Sie mittels dem Satz von Gauß und dem Ergebnis aus (c) das Volumenintegral $\int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{E})$ über das Volumen, V , der in (c) beschrieben Kugel.
- (e) Folgern Sie aus Ihren Ergebnissen für $\nabla \cdot \mathbf{E}$ aus (a) und (d), dass die Divergenz des Feldes proportional zu einer drei-dimensionalen δ -Funktion ist, also die Form $\nabla \cdot \mathbf{E} = C \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ hat, und finden Sie die Konstante C . [Hinweis: die Normierung von $\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ ist durch das Volumenintegral $\int_V dV \delta^{(3)}(\mathbf{r}) = 1$ gegeben, für ein beliebiges, den Ursprung einschließendes Volumen V .]
- (f) Schreiben Sie Ihr Ergebnis aus (e) in die Form $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho(\mathbf{r})$, und bestimmen Sie $\rho(\mathbf{r})$. Diese Gleichung ist das (physikalische) Gesetz von Gauß (eine der Maxwell-Gleichungen), wobei $\rho(\mathbf{r})$ die Ladungsdichte ist. Lässt sich Ihr Ergebnis für $\rho(\mathbf{r})$ entsprechend interpretieren?

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 20]
