Blatt 13: Integralsätze von Gauß und Stokes

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 2, 4, 6, (7, falls Zeit reicht).
Videos existieren für Beispielaufgaben 4 (V3.7.7), 7 (V3.7.11).

Optionale Aufgabe 1: Satz von Gauß – Würfel (kartesische Koordinaten) [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M).

Betrachten Sie den Würfel W, definiert durch $x \in (0, a)$, $y \in (0, a)$, $z \in (0, a)$, und das Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (x^2, y^2, z^2)^T$. Berechnen Sie dessen nach außen gerichteten Fluss, $\Phi = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$, durch die Würfeloberfläche, $S \equiv \partial W$, auf zwei Weisen:

(a) direkt als Fluss-Integral;

(b) mittels dem Satz von Gauß als Volumenintegral.

[Kontrollergebnis: falls $a = 2$, dann $\Phi = 48$.]

Optionale Aufgabe 2: Satz von Stokes – Würfel (kartesische Koordinaten) [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M).

Betrachten Sie den Würfel W, definiert durch $x \in (0, a)$, $y \in (0, a)$, $z \in (0, a)$, und das Vektorfeld $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = (-y^2, x^2, 0)^T$. Berechnen Sie den nach außen gerichteten Fluss von dessen Rotation, $\Phi = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{w})$, durch die Fläche $S \equiv \partial W \backslash$Deckel, welche aus allen Würfelflächen außer dem Deckel bei $z = a$ besteht, auf zwei Weisen:

(a) direkt als Fluss-Integral;

(b) via dem Satz von Stokes als Linienintegral.

[Kontrollergebnis: falls $a = 2$, dann $\Phi = -16$.]

Optionale Aufgabe 3: Satz von Gauß – elektrisches Dipolpotential (Kugelkoordinaten) [4]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[1](M); (d)[1](M); (e)[0.5](M); (f)[0.5](M).

Das Potential eines elektrischen Dipols mit Dipolmoment $\mathbf{p} = p\,\mathbf{e}_z$ lautet:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{pz}{r^3}\,.$$

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi(\mathbf{r})$ explizit in kartesischen Koordinaten.

(b) Stellen Sie $\Phi(\mathbf{r})$ in Kugelkoordinaten dar und berechnen Sie das elektrische Feld explizit in Kugelkoordinaten. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis aus (a).
Hinweis: $\mathbf{e}_z = \cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_\theta$.

(c) Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation des elektrischen Feldes explizit in kartesischen Koordinaten.

(d) Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation des elektrischen Feldes explizit in Kugelkoordinaten. [Vergleichen Sie die Ergebnisse von (b) und (c)!]

(e) Laut dem (physikalischen) Gesetz von Gauß gilt $\int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = 4\pi Q$, wobei Q die Gesamtladung innerhalb des von S eingeschlossenen Volumens ist. Sei nun S_K die Oberfläche einer am Ursprung zentrierten Kugel K mit Radius R. Berechnen Sie Q direkt, indem Sie das Integral über die Kugeloberfläche ausführen. Ist Ihr Ergebnis für Q sinnvoll? Erläutern Sie!

(f) Berechnen Sie nun das Flußintegral alternativ mittels (mathematischem) Satz v. Gauß als Volumenintegral über $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}$, welches Sie mittels dem Ergebnis von (d) auswerten. Kommentieren Sie das Verhalten des Integranden bei $\mathbf{r} = 0$.

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 8]
