Blatt 12.2: Fourier-Integrale, Differentialgleichungen

Ausgabe: Mo 16.01.23 Zentralübung: Fr(!) 20.01.23 Abgabe: Do 26.01.23, 14:00
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 3, 4, 5.
Videos existieren für Beispielaufgaben 2 (C6.3.3), 3 (C7.5.1).

Beispielaufgabe 1: Eigenschaften der Fourier-Transformation [1]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E).

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformation, wobei a jeweils eine beliebige reelle Konstante ist.

(a) Die Fourier-Transformierte von $f(x-a)$ ist $\mathrm{e}^{-ika}\tilde{f}(k)$.

(b) Die Fourier-Transformierte von $f(ax)$ ist $\tilde{f}(k/a)/|a|$, wobei $a \neq 0$.

Beispielaufgabe 2: Fourier-Transformation eines Gauß-Peaks [2]
Punkte: [2](E).

Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte eines normierten Gauß-Peaks mit Breite σ, $g^{[\sigma]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}$, mit $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, g^{[\sigma]}(x) = 1$, durch $\tilde{g}_k^{[\sigma]} = \mathrm{e}^{-\sigma^2k^2/2}$ gegeben ist. *Hinweis*: Das Fourier-Integral lässt sich mittels quadratischer Ergänzung im Exponenten berechnen.

Beispielaufgabe 3: Green'sche Funktion von $(\mathrm{d}_t + a)$ [4]
Punkte: (a)[1](M); (b)[0.5](E); (c)[0.5](E); (d)[1](E); (e)[1](M).

$\hat{L}(t) = (\mathrm{d}_t + a)$ sei ein Differentialoperator erster Ordnung, und a eine positive, reelle Konstante. Die entsprechende Green'sche Funktion ist definiert durch die Differentialgleichung:

$$\hat{L}(t)G(t) = \delta(t)\ . \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$G(t) = \Theta(t)x_h(t) \qquad \text{mit } \Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases},$$

die definierende Gleichung (1) erfüllt, vorausgesetzt, dass $x_h(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung $\hat{L}(t)x_h(t) = 0$ ist, mit Anfangsbedingung $x_h(0) = 1$. [Hinweis: die Anfangsbedingung gewährleistet, dass $\delta(t)x_h(t) = \delta(t)$.]

(b) Bestimmen Sie $G(t)$ explizit durch Lösen der homogenen Gleichung für $x_h(t)$. [Kontrollergebnis: $G(\frac{1}{a}\ln 2) = \frac{1}{2}$.]

(c) Berechnen Sie das Fourier-Integral $\tilde{\mathcal{G}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} G(t)$. [Kontrollergebnis: für $a = 1$ gilt $|\tilde{\mathcal{G}}(a)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.]

(d) Konsistenz-Check: Bestimmen Sie $\tilde{\mathcal{G}}(\omega)$ alternativ durch Fourier-Transformation der definierenden Gleichung (1). Stimmt das Resultat mit dem von Teilaufgabe (c) überein?

(e) Finden Sie eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, $(\mathrm{d}_t + a)x(t) = \mathrm{e}^{2at}$, mittels Faltung von $G(t)$ mit der Inhomogenität. Überprüfen Sie die gefundene Lösung explizit durch Einsetzen.

Beispielaufgabe 4: Fixpunkte einer Differentialgleichung in einer Dimension [2]
Punkte: (a)[0.5]; (b)[0.5]; [1](M).

Betrachten Sie die autonome Differentialgleichung $\dot{x} = f_\lambda(x) = (x^2 - \lambda)^2 - \lambda^2$ für die reelle Funktion $x(t)$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Finden Sie abhängig von λ die Fixpunkte dieser Differentialgleichung, (i) für $\lambda \leq 0$ und (ii) für $\lambda > 0$. [Kontrollergebnis: für $\lambda = 2$ liegen die Fixpunkte bei 0, 2, und -2.]

(b) Skizzieren Sie $f(x)$ als Funktion von x in zwei Skizzen, (i) für $\lambda = -1$ und (ii) für $\lambda = +1$, und zeichnen Sie die in (a) gefundenen Fixpunkte ein.

(c) Diskutieren Sie mittels einer graphischen Analyse die Stabilität von jedem dieser Fixpunkte, und zeichnen Sie den Fluss von $x(t)$ nahe den Fixpunkten in die Skizzen von (b) ein.

Beispielaufgabe 5: Stabilitätsanalyse in zwei Dimensionen [6]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[1](E); (d)[2](E); (e)[2](M).

Die Funktion $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, erfülle folgende Differentialgleichung, mit $0 < c \in \mathbb{R}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x^2 - xy \\ c(1-x) \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie den Fixpunkt, $\mathbf{x}^*$, der Differentialgleichung.

(b) Linearisieren Sie die DG in der Abweichung $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ vom Fixpunkt und bringen Sie sie in die Form $\dot{\boldsymbol{\eta}} = A\boldsymbol{\eta}$. Wie lautet die Matrix A?

(c) Überprüfen Sie, dass die Matrixelemente von A durch $A^i_{\ j} = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$ gegeben sind.

(d) Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

(e) Diskutieren Sie die Stabilitätseigenschaften des Fixpunkts: Für welche Auslenkungsrichtungen relativ zum Fixpunkt wächst bzw. zerfällt eine Auslenkung am schnellsten? Auf welchen Zeitskalen?

[Kontrollergebnisse: für $c = 3$ gilt (a) $\|\mathbf{x}^*\| = \sqrt{5}$, (b) $\det A = -3$, (d) Eigenwerte: $\lambda_+ = 3$, $\lambda_- = -1$; Eigenvektoren $\mathbf{v}_+ = (3, -3)^T$ und $\mathbf{v}_- = (1, 3)^T$.]

Beispielaufgabe 6: Feldlinien in zwei Dimensionen [2]
Punkte: [2](E).

Das Verhalten eines Vektorfelds $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ wird oft grafisch dargestellt, indem man seine Feldlinien skizziert. Eine Feldlinie ist eine Kurve, deren Tangentialvektor an jedem Punkt in die Richtung des Feldes zeigt. Ist $\mathbf{r}(t)$ eine Parametrisierung einer Feldlinie, wird ihre Form dementsprechend durch die Bedingung $\dot{\mathbf{r}}(t)||\mathbf{u}(\mathbf{r}(t))$ bestimmt. Diese Bedingung kann dazu genutzt werden, eine Differentialgleichung aufzustellen, deren Lösung die Form der Feldlinien beschreibt.
Um dieses Vorgehen zu verdeutlichen, betrachten wir ein zweidimensionales Vektorfeld in zwei Dimensionen, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} = (x, y)^T \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (u_x(\mathbf{r}), u_y(\mathbf{r}))^T$. Parametrisieren wir eine Feldlinie durch $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T$, dann erfüllen die Komponenten ihres Tangentialvektors die Gleichung

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{u_y(\mathbf{r}(t))}{u_x(\mathbf{r}(t))}.$$

Alternativ können wir die Feldlinie auch als $(x, y(x))^T$ parametrisieren, wobei wir y als Funktion von x betrachten. Wenn sich $x(t)$ als Funktion der Zeit ändert, tut dies auch $y(t) = y(x(t))$, und zwar so, dass die Gleichung $\dot{y}(t) = \frac{\mathrm{d}y(x(t))}{\mathrm{d}x}\dot{x}(t)$, oder $\frac{\mathrm{d}y(x(t))}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$, erfüllt ist. Setzen wir dies in obige Gleichung ein, erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{u_y(\mathbf{r})}{u_x(\mathbf{r})}.$$

Dies ist eine Differentialgleichung für $y(x)$, deren Lösung die Form der Feldlinien beschreibt. Verschiedene Anfangsbedingungen der DG ergeben verschiedene Feldlinien.

Betrachten Sie das Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (-ay, x)^T$, mit $a > 0$. Stellen Sie eine Differentialgleichung für seine Feldlinien $y(x)$ auf und lösen Sie diese. Skizzieren Sie einige repräsentative Linien für den Fall $a = \frac{1}{2}$. [Kontrollergebnis: für $a = \frac{1}{2}$ geht die Feldlinie, die durch $(x, y)^T = (3, 0)^T$ verläuft, auch durch $(1, 4)^T$.]

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 17]

Hausaufgabe 1: Eigenschaften der Fourier-Transformation [2]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[1](M).

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformation in 2 Dimensionen, wobei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und R eine Drehmatrix ist.

(a) Die Fourier-Transformierte von $f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ ist $\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}\tilde{f}(\mathbf{k})$.

(b) Die Fourier-Transformierte von $f(\alpha\mathbf{x})$ ist $\frac{1}{|\alpha|^2}\tilde{f}(\mathbf{k}/\alpha)$.

(c) Die Fourier-Transformierte von $f(R\mathbf{x})$ ist $\tilde{f}(R\mathbf{k})$.

Hausaufgabe 2: Faltung von Gauß-Peaks [6]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[1](M); (e)[1](M); (f)[1](E).

Lernziel: Illustration folgender Aussage: 'Die Feinstruktur einer Funktion (z.B. Rauschen in einem Messsignal) lässt sich glätten mittels Faltung mit einer gepeakten Funktion von geeignet gewählter Breite.'

Ein normierter Gauß-Peak mit Breite σ hat die Form $g^{[\sigma]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}$. Zeigen Sie, dass die Faltung von zwei normierten Gauß-Peaks mit Breiten σ_1 und σ_2 wieder ein normierter Gauß-Peak ist, mit Breite $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, also dass $\left(g^{[\sigma_1]} * g^{[\sigma_2]}\right)(x) = g^{[\sigma]}(x)$. Zeigen Sie das auf zwei Weisen, (a) und (b):

(a) Berechnen Sie das Faltungsintegral mittels quadratischer Ergänzung im Exponenten.

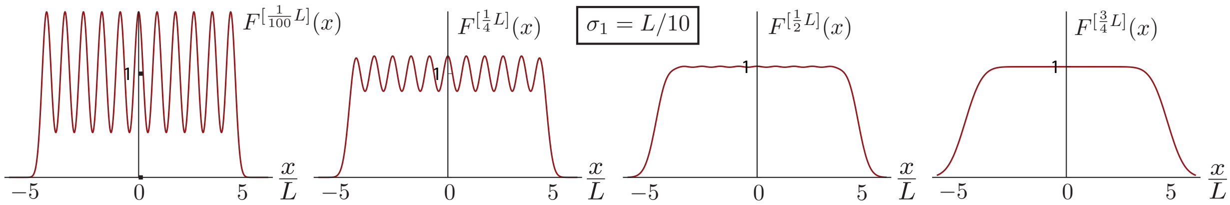
(b) Nutzen Sie das Faltungstheorem, laut dem $\widetilde{\left(g^{[\sigma_1]} * g^{[\sigma_2]}\right)}(k) = \tilde{g}^{[\sigma_1]}(k)\tilde{g}^{[\sigma_2]}(k)$, und die (aus einer Beispielaufgabe) bekannte Form der Fourier-Transformierten eines Gauß-Peaks, $\tilde{g}^{[\sigma_j]}(k)$.

(c) Machen Sie zwei qualitative Skizzen, die erste von $g^{[\sigma_1]}(x)$, $g^{[\sigma_2]}(x)$ und $g^{[\sigma]}(x)$, die zweite von deren Fourier-Spektren $\tilde{g}^{[\sigma_1]}(k)$, $\tilde{g}^{[\sigma_2]}(k)$ und $\widetilde{\left(g^{[\sigma_1]} * g^{[\sigma_2]}\right)}(k)$, und erläutern Sie anhand der Skizzen, warum die Faltung einer Funktion (hier $g^{[\sigma_1]}$) mit einer gepeakten Funktion (hier $g^{[\sigma_2]}$) zu einer verbreiterten Version der ersten Funktion führt.

$f^{[\sigma_1]}(x) = \sum_{n=-5}^{5} g_n^{[\sigma_1]}(x)$, mit $g_n^{[\sigma_1]}(x) = g^{[\sigma_1]}(x - nL)$, sei ein 'Kamm' von 11 identischen, normierten Gauß-Peaks der Breite σ_1, mit Peak-zu-Peak-Abstand L, und $F^{[\sigma_2]}(x) = \left(f * g^{[\sigma_2]}\right)(x)$ sei die Faltung dieses Kammes mit einem normierten Gauß-Peak der Breite σ_2.

(d) Finden Sie eine Formel für $F^{[\sigma_2]}(x)$, ausgedrückt als Summe über normierte Gauß-Peaks. Was ist die Breite jedes dieser Peaks?

(e) Die Skizze zeigt $F^{[\sigma_2]}(x)$ für $\sigma_1/L = \frac{1}{4}$ und vier Werte von σ_2/L: $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$. Erläutern Sie das gezeigte Verhalten anhand Ihrer Formel aus Teilaufgabe (d). Warum verschwindet die Feinstruktur in $F^{[\sigma_2]}(x)$ für $\sigma_2 \gtrsim \frac{1}{2}L$?



(f) Mit Bezugnahme auf die eingangs zitierte Aussage zur Rauschglättung mittels Faltung: erläutern Sie allgemein, wie die Breite der gepeakten Funktion gewählt werden muss, um Rauschen wegzuglätten.

Hausaufgabe 3: Green'sche Funktion des kritisch gedämpften harmonischen Oszillators [4]

Punkte: (a)[1](M); (b)[0.5](E); (c)[0.5](E); (d)[1](E); (e)[1](M).

Ein getriebener, kritisch gedämpfter harmonischer Oszillator mit Frequenz $\Omega > 0$ und Dämpfungsrate $\gamma = \Omega$ erfüllt die Gleichung $\hat{L}(t)\, q(t) = g(t)$, mit $\hat{L}(t) = (\mathrm{d}_t^2 + 2\Omega \mathrm{d}_t + \Omega^2)$. Die entsprechende Green'sche Funktion ist definiert durch die Differentialgleichung:

$$\hat{L}(t)\, G(t) = \delta(t)\ . \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$G(t) = \Theta(t) q_h(t)\ , \qquad \text{mit} \qquad \Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases},$$

die definierende Gleichung (2) erfüllt, vorausgesetzt, dass $q_h(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung $\hat{L}(t)\, q_h(t) = 0$ ist, mit Anfangsbedingung $q_h(0) = 0$ und $\mathrm{d}_t q_h(0) = 1$. [Hinweis: die Anfangsbedingung gewährleistet, dass $\delta(t) q_h(t) = \delta(t) q_h(0) = 0$ und $\delta(t) \mathrm{d}_t q_h(t) = \delta(t) \mathrm{d}_t q_h(0) = \delta(t)$.]

(b) Bestimmen Sie $G(t)$ explizit durch Lösen der homogenen Gleichung für $q_h(t)$, mittels dem Ansatz $q_h(t) = (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{-\Omega t}$ (siehe Hausaufgabe 4(b) von Blatt 10). [Kontrollergebnis: für $\Omega = 1$ gilt $G(1) = 1/\mathrm{e}$.]

(c) Berechnen Sie das Fourier-Integral $\tilde{\mathcal{G}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} G(t)$. [Kontrollergebnis: für $\Omega = 1$ gilt $|\tilde{\mathcal{G}}(\Omega)| = \frac{1}{2}$.]

(d) Konsistenz-Check: Bestimmen Sie $\tilde{\mathcal{G}}(\omega)$ alternativ durch Fourier-Transformation der definierenden Gleichung (2). Stimmt das Resultat mit dem von Teilaufgabe (c) überein?

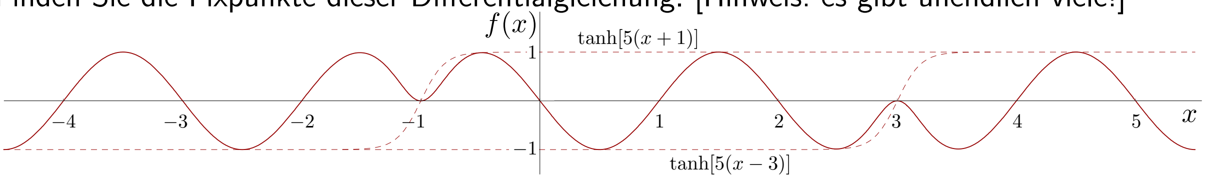
(e) Finden Sie eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $\hat{L}(t)\, q(t) = g_0 \sin(\omega_0 t)$ mittels Faltung von $G(t)$ mit der Inhomogenität. Überprüfen Sie die gefundene Lösung explizit durch Einsetzen. [Hinweis: es lohnt sich, die Sinus-Funktion als $\mathrm{Im}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\right]$ zu schreiben, die Rechnung mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$ als Inhomogenität auszuführen, und erst ganz am Ende den Imaginärteil zu bilden.]

Hausaufgabe 4: Fixpunkte einer Differentialgleichung in einer Dimension [2]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[1](M).

Betrachten Sie die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x) = \tanh[5(x-3)] \tanh[5(x+1)] \sin(\pi x)$ für die reelle Funktion $x(t)$.

(a) Finden Sie die Fixpunkte dieser Differentialgleichung. [Hinweis: es gibt unendlich viele!]

(b)



Reproduzieren Sie obige Skizze für $f(x)$ als Funktion von x, für $x \in [-4, 5]$, und zeichnen Sie die in (a) gefundenen Fixpunkte ein.

(c) Diskutieren Sie mittels einer graphischen Analyse die Stabilität von jedem dieser Fixpunkte, und zeichnen Sie den Fluss von $x(t)$ nahe den Fixpunkten in die Skizzen von (b) ein.

Hausaufgabe 5: Stabilitätsanalyse in drei Dimensionen [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](E); (c)[1](E).

Die Funktion $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, erfülle folgende autonome Differentialgleichung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{10} - y^{24} \\ 1 - x \\ -3z - 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie die Fixpunkte dieser Differentialgleichung. [Kontrollergebnis: für alle Fixpunkte gilt $\|\mathbf{x}^*\| = \sqrt{3}$.]

(b) Zeigen Sie, dass die Fixpunkte im Allgemeinen instabil sind, jedoch stabil bezüglich Abweichungen in bestimmte Richtungen. Bestimmen Sie hierfür die lineare Näherung für kleine Auslenkungen um die Fixpunkte und berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der entsprechenden Matrix, A. [Kontrollergebnis: für alle Fixpunkte gilt $|\det A| = 72$. Einige der Eigenwerte, die an den Fixpunkten auftreten, sind 6, 4, 12, -2.]

(c) Identifizieren Sie die stabilen Richtungen, und die jeweils entsprechende charakteristische Zeitskala, auf der eine Abweichung vom Fixpunkt in diese Richtung nach Null zerfällt.

Hausaufgabe 6: Elektrisches Quadrupolfeld in zwei Dimensionen [Bonus]
Punkte: [2](E,Bonus).

Betrachten Sie das elektrische Quadrupolfeld in der xz-Ebene, $\mathbf{E} = F(x, -3z)^T$. Die Konstante F bestimmt die Feldstärke. Die Form der Feldlinien kann durch Angabe von z als Funktion von x beschrieben werden. Finden Sie eine Formel für $z(x)$ durch Lösen einer entsprechenden Differentialgleichung. Skizzieren Sie einige Feldlinien in jedem Quadranten der xz-Ebene, um ihre Form zu verdeutlichen. [Kontrollergebnis: die Feldlinie, die durch $(x, z)^T = (2, 1)^T$ verläuft, verläuft auch durch $(1, 8)^T$.]

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 18]
