LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Physik
R: Rechenmethoden für Physiker, WiSe 2022/23
Dozent: Jan von Delft
Übungen: Mathias Pelz, Nepomuk Ritz

https://moodle.lmu.de → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

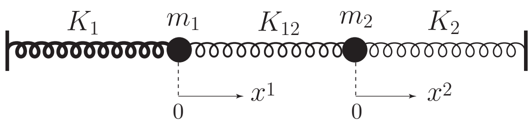
Blatt 12.2: Fourier-Integrale, Differentialgleichungen

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 3, 4, 5.
Videos existieren für Beispielaufgaben 2 (C6.3.3), 3 (C7.5.1).

Optionale Aufgabe 1: Gekoppelte Schwingungen von zwei Massenpunkten [5]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[2](E); (d)[2](M).

Betrachten Sie ein System aus zwei Massenpunkten, mit Massen m_1 und m_2, die mittels drei Federn (Federkonstanten K_1, K_{12} und K_2) miteinander bzw. mit zwei Festen Wänden gekoppelt sind (siehe Skizze). Die Bewegungsgleichungen für die beiden Massen lauten

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}^1 &= -K_1 x^1 - K_{12}(x^1 - x^2), \\ m_2\ddot{x}^2 &= -K_2 x^2 - K_{12}(x^2 - x^1). \end{aligned}$$



(a) Bringen Sie das Gleichungssystem in die Form $\ddot{\mathbf{x}}(t) = -A \cdot \mathbf{x}(t)$, mit $\mathbf{x} = (x^1, x^2)^T$. Wie lautet die Matrix A? [Kontrollergebnis: $\det A = [K_1K_2 + (K_1 + K_2)K_{12}]/(m_1m_2)$.]

(b) Mittels dem Ansatz $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}\cos(\omega t)$ kann dieses Differentialgleichungsystem in ein algebraisches Eigenwertproblem überführt werden. Wie lautet dieses?

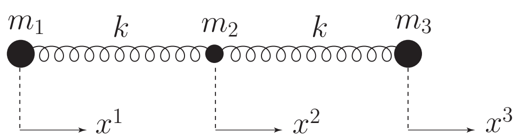
(c) Setzen Sie fortan $m_1 = m_2$, $K_2 = m_1\Omega^2$, $K_1 = 4K_2$ und $K_{12} = 2K_2$. (Ω hat die Dimension einer Frequenz.) Finden Sie die Eigenwerte λ_j und die Eigenvektoren $\mathbf{v}_j$ der Matrix $\frac{1}{\Omega^2}A$, und somit die entsprechenden **Eigenfrequenzen**, ω_j, und **Eigenmoden**, $\mathbf{x}_j(t)$, der gekoppelten Massen (mit $\mathbf{x}_j(0) = \mathbf{v}_j$). [Kontrollergebnis: $\lambda_1 + \lambda_2 = 9$.]

(d) Skizzieren Sie die beiden Eigenmoden $\mathbf{x}_j(t)$ als Funktion der Zeit: machen Sie für $j = 1$ und 2 jeweils eine Skizze, die auf demselben Achsensystem die beiden Komponenten $x_j^1(t)$ und $x_j^2(t)$ zeigt. Kommentieren Sie das gezeigte Verhalten!

Optionale Aufgabe 2: Gekoppelte Schwingungen von drei Massenpunkten [5]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[2](E); (d)[2](M).

Betrachten Sie ein System aus drei Massenpunkten, mit Massen m_1, m_2 und m_3, gekoppelt durch zwei identische Federn, mit Federkonstante k (siehe Skizze). Die Bewegungsgleichungen für die drei Massen lauten

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}^1 &= -k(x^1 - x^2), \\ m_2\ddot{x}^2 &= -k\left([x^2 - x^1] - [x^3 - x^2]\right), \\ m_3\ddot{x}^3 &= -k(x^3 - x^2), \end{aligned}$$



(a) Bringen Sie das Gleichungssystem in die Form $\ddot{\mathbf{x}}(t) = -A \cdot \mathbf{x}(t)$, mit $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)^T$. Wie lautet die Matrix A? [Kontrollergebnis: $\det A = 0$.]

(b) Mittels dem Ansatz $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}\cos(\omega t)$ kann dieses Differentialgleichungsystem in ein algebraisches Eigenwertproblem überführt werden. Wie lautet dieses?

(c) Setzen Sie fortan $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = \frac{2}{3}m$, und $k = m\Omega^2$. (Ω hat die Dimension einer Frequenz.) Finden Sie die Eigenwerte λ_j und die normierten Eigenvektoren $\mathbf{v}_j$ der Matrix $\frac{1}{\Omega^2}A$, und somit die entsprechenden Eigenfrequenzen, ω_j, und Eigenmoden, $\mathbf{x}_j(t)$, der gekoppelten Massen (mit $\mathbf{x}_j(0) = \mathbf{v}_j$). [Kontrollergebnis: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5$.]

(d) Skizzieren Sie die drei Eigenmoden $\mathbf{x}_j(t)$ als Funktion der Zeit: machen Sie für $j = 1$, 2 und 3 jeweils eine Skizze, die auf demselben Achsensystem die drei Komponenten $x_j^1(t)$, $x_j^2(t)$ und $x_j^3(t)$ zeigt. Kommentieren Sie das gezeigte Verhalten!

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 10]
