



<https://moodle.lmu.de> → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 11: Deltafunktion und Fourierreihen

Ausgabe: Mo 09.01.23 Zentralübung: Do 12.01.23 Abgabe: Do 19.01.23, 14:00

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 1, 3(a), 4, 5.
Videos existieren für Beispielaufgaben 4 (C6.2.1), 5 (C6.3.5).

Beispielaufgabe 1: Integrale mit δ -Funktion [3]

Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[0.5](M); (d)[1](M); (e)[0.1](E).

Berechnen Sie folgende Integrale (mit $a \in \mathbb{R}$):

$$(a) \quad I_1(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - \pi) \sin(ax)$$

$$(b) \quad I_2(a) = \int_{\mathbb{R}^3} dx^1 dx^2 dx^3 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \|\mathbf{x}\|^2, \quad \text{mit } \mathbf{y} = (a, 1, 2)^T$$

$$(c) \quad I_3(a) = \int_0^a dx \delta(x - \pi) \frac{1}{a + \cos^2(x/2)}$$

$$(d) \quad I_4(a) = \int_0^3 dx \delta(x^2 - 6x + 8) \sqrt{e^{ax}}$$

$$(e) \quad I_5(a) = \int_{\mathbb{R}^2} dx^1 dx^2 \delta(\mathbf{x} - a\mathbf{y}) \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad \text{mit } \mathbf{y} = (1, 3)^T. \quad \text{Anmerkung: } \delta(\mathbf{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2).$$

[Kontrollergebnisse: $I_1(\frac{1}{2}) = 1$, $I_2(1) = 6$, $I_3(\pi) = \frac{1}{2\pi}$, $I_4(\ln 2) = 1$, $I_5(1) = 10$.]

Beispielaufgabe 2: Lorentz-Darstellung der Dirac- δ -Funktion [4]

Punkte: [4](M).

Erläutern Sie, warum die untenstehende Lorentz-Peakfunktion $\delta^\epsilon(x)$ im Limes $\epsilon \rightarrow 0^+$ eine Darstellung der Dirac-delta-Funktion $\delta(x)$ liefert. Berechnen Sie dazu (i) die Höhe, (ii) die Breite x_b (definiert durch $\delta^\epsilon(x_b) = \frac{1}{2}\delta^\epsilon(0)$, $x_b > 0$) und (iii) das Gewicht des Lorentz-Peaks. Wie verhalten sich diese Größen für $\epsilon \rightarrow 0^+$? Berechnen Sie ferner die Funktionen (iv) $\Theta^\epsilon(x) = \int_{-\infty}^x dx' \delta^\epsilon(x')$ und (v) $\delta'^\epsilon(x) = \frac{d}{dx} \delta^\epsilon(x)$. Skizzieren Sie Θ^ϵ , $\epsilon\delta^\epsilon$ und $\epsilon^2\delta'^\epsilon$ als Funktionen von x/ϵ in drei getrennten Skizzen (eine unter der anderen, mit y -Achsen in einer Linie und gleich skalierten x/ϵ -Achsen).

$$\text{Lorentz-Peak: } \delta^\epsilon(x) = \frac{\epsilon/\pi}{x^2 + \epsilon^2}.$$

Hinweis: Zur Berechnung des Gewichts empfiehlt sich die Substitution $x = \epsilon \tan y$.

Anmerkung: Lorentz-Peaks kommen in der Physik oft vor. Beispiel: das Energiespektrum eines diskreten Quantenzustands, der schwach an eine Umgebung gekoppelt ist, hat die Form eines Lorentz-Peaks, dessen Breite durch die Kopplungsstärke an die Umgebung bestimmt wird. Geht die Kopplungsstärke nach Null, ergibt sich ein δ -Peak.

Beispielaufgabe 3: Reihendarstellung von hyperbolischen Funktionen [3]

Punkte: [3](E).

Berechnen Sie die folgenden Reihen für $y \in \mathbb{R}^+$, indem Sie jede als geometrische Reihe in $\omega \equiv e^{-y}$ ausdrücken.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-y(n+1/2)}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-y(n+1/2)}, \quad (c) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-y|n|}.$$

Beispielaufgabe 4: Fourier-Reihe der Sägezahnfunktion [2]

Punkte: [2](M).

$f(x)$ sei eine Sägezahnfunktion, gegeben durch $f(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$, $f(\pm\pi) = 0$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten \tilde{f}_n in der Darstellung $f(x) = \frac{1}{L} \sum_n e^{ik_n x} \tilde{f}_n$. Wie sind k_n und L zu wählen? Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$, sowie die Summe der $n = 1$ und $n = -1$ Terme der Fourier-Reihe (d.h. der erste Term der entsprechenden Sinus-Reihe). [Kontrollergebnis: $\tilde{f}_6 = \frac{1}{3}i\pi$.]

Beispielaufgabe 5: Parseval-Identität und Faltung [7]

Punkte: (a)[3](M); (b)[2](M); (c)[2](M).

$f(x)$ sei eine Sägezahnfunktion, definiert durch $f(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$, $f(\pm\pi) = 0$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$. In der Fourier-Darstellung $f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} \tilde{f}_n$ lauten die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_0 = 0$, $\tilde{f}_{n \neq 0} = 2\pi i (-1)^n / n$. (Siehe Beispielaufgabe 4.) Sei $g(x) = \sin x$.

- Überprüfen Sie an diesem konkreten Beispiel, dass die Parseval-Identität gilt, indem Sie sowohl das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} dx \overline{\tilde{f}}(x) g(x)$ als auch die Summe $(1/2\pi) \sum_n \overline{\tilde{f}}_n \tilde{g}_n$ explizit berechnen.
- Beweisen Sie die berühmte Identität $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, indem Sie das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} dx f^2(x)$ einerseits direkt berechnen und andererseits mittels der Parseval-Identität durch eine Summe über Fourier-Moden ausdrücken.
- Berechnen Sie die Faltung $(f * g)(x)$ sowohl durch direkte Berechnung des Faltungsintegrals als auch mittels des Faltungstheorems und der Summation von Fourier-Koeffizienten.

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 19]

Hausaufgabe 1: Integrale mit δ -Funktion [4]

Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[0.5](M); (d)[1](M); (e)[1](A); (f)[0.5](E).

Berechnen Sie folgende Integrale (mit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$):

- (a) $I_1(a) = \int_1^4 dx \delta(x-2) (a^x + 3)$
 (b) $I_2(a) = \int_{\mathbb{R}^2} dx^1 dx^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (x^1 + x^2)^2 e^{3-x^1}$, mit $\mathbf{y} = (3, a)^T$
 (c) $I_3(a) = \int_{-1}^1 dx \sqrt{2+2x} \delta(ax-2)$, mit $a \neq 0$
 (d) $I_4(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(3^{-x} - 9)(1 - x^a)$
 (e) $I_5(n) = \int_{-\pi/2}^{9\pi/2} dx \cos(nx) \delta(\sin x)$
 (f) $I_6(a) = \int_{\mathbb{R}^2} dx^1 dx^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) e^{\|\mathbf{x}\|^2}$, mit $\mathbf{y} = (a, -a)^T$

[Kontrollergebnisse: $I_1(3) = 12$, $I_2(-5) = 4$, $I_3(2) = \frac{1}{2}$, $I_4(3) = \frac{1}{\ln 3}$, $I_5(7) = 1$, $I_6(\frac{1}{\sqrt{2}}) = e$.]

Hausaufgabe 2: Darstellungen der Dirac- δ -Funktion [4]

Punkte: [4](M).

Erläutern Sie, warum die untenstehende Funktion $\delta^\epsilon(x)$ im Limes $\epsilon \rightarrow 0^+$ eine Darstellung der Dirac-delta-Funktion $\delta(x)$ liefert. Berechnen Sie dazu (i) die Höhe, (ii) die Breite x_b (definiert durch $\delta^\epsilon(x_b) = \frac{1}{2}\delta^\epsilon(0)$, $x_b > 0$) und (iii) das Gewicht des Peaks, und diskutieren Sie deren Verhalten im Limes $\epsilon \rightarrow 0^+$. Berechnen Sie ferner die Funktionen (iv) $\Theta^\epsilon(x) = \int_{-\infty}^x dx' \delta^\epsilon(x')$ und (v) $\delta'^\epsilon(x) = \frac{d}{dx} \delta^\epsilon(x)$. Skizzieren Sie Θ^ϵ , $\epsilon \delta^\epsilon$ und $\epsilon^2 \delta'^\epsilon$ als Funktionen von x/ϵ in drei getrennten Skizzen (eine unter der anderen, mit y -Achsen in einer Linie und gleich skalierten x/ϵ -Achsen).

Ableitung der Fermi-Funktion:
$$\delta^\epsilon(x) = \frac{1}{4\epsilon} \frac{1}{\cosh^2[x/(2\epsilon)]}.$$

Hinweis: Zur Berechnung des Gewichts empfiehlt sich die Substitution $y = \tanh[x/(2\epsilon)]$.

Anmerkung: In der Festkörperphysik und der Kernphysik spielt die Funktion $\delta^\epsilon(x)$ eine wichtige Rolle: sie erscheint als Ableitung der sogenannten **Fermi-Funktion**, $f(E) = \frac{1}{e^{E/k_B T} + 1} = \Theta^{k_B T}(-E)$, mit $-\frac{d}{dE} f(E) = \delta^{k_B T}(E)$, wobei $f(E)$ die Besetzungswahrscheinlichkeit eines fermionischer Einzelchenzustands mit Energie E als Funktion der Temperatur T des Systems angibt (k_B ist die sogenannte Boltzmann-Konstante). Im Limes Temperatur $\rightarrow 0$ entspricht die Ableitung der Fermi-Funktion somit einer δ -Funktion.

Hausaufgabe 3: Reihendarstellung der periodischen δ -Funktion [5]

Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](M); (c)[1.5](A); (d)[0.5](E); (e)[1](A); (f)[0.5](E); (g)[0.5](E)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\delta^\epsilon(x)$, definiert durch

$$\delta^\epsilon(x) = \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx - \epsilon|k|}, \quad k = 2\pi n/L, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x, \epsilon, L \in \mathbb{R}, \quad 0 < \epsilon \ll L, \quad (1)$$

folgende Eigenschaften hat:

$$(a) \quad \delta^\epsilon(x) = \delta^\epsilon(x + L). \quad (2)$$

$$(b) \quad \int_{-L/2}^{L/2} dx \delta^\epsilon(x) = 1. \quad \text{Hinweis: } k = 0 \text{ und } k \neq 0 \text{ getrennt behandeln in } \sum_k. \quad (3)$$

$$(c) \quad \delta^\epsilon(x) = \frac{1}{2L} \left[\frac{1+w}{1-w} + \frac{1+\bar{w}}{1-\bar{w}} \right] = \frac{1}{L} \frac{1 - e^{-4\pi\epsilon/L}}{1 + e^{-4\pi\epsilon/L} - 2e^{-2\pi\epsilon/L} \cos(2\pi x/L)}, \quad (4)$$

wobei $w = e^{2\pi(ix-\epsilon)/L}$ und $\bar{w} = e^{2\pi(-ix-\epsilon)/L}$.

Hinweis: Drücken Sie hierfür die Summe in Gl. (1) durch geometrische Reihen in Potenzen von w und \bar{w} aus.

$$(d) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta^\epsilon(x) = 0 \quad \text{für } x \neq mL, \text{ mit } m \in \mathbb{Z}. \quad \text{Hinweis: Gehen Sie von Gl. (4) aus.}$$

$$(e) \quad \delta^\epsilon(x) \simeq \frac{\epsilon/\pi}{\epsilon^2 + x^2} \quad \text{für } |x|/L \ll 1 \text{ und } \epsilon/L \ll 1.$$

Hinweis: Taylor-entwickeln Sie hierfür den Zähler in Gl. (4) bis zur 1. Ordnung in $\tilde{\epsilon} = 2\pi\epsilon/L$, und den Nenner bis zur 2. Ordnung in $\tilde{\epsilon}$ und $\tilde{x} = 2\pi x/L$.

(f) Skizzieren Sie die Funktion $\delta^\epsilon(x)$ qualitativ für $\epsilon/L \ll 1$ und $x \in [-\frac{7}{2}L, \frac{7}{2}L]$.

(g) Folgern Sie, dass $\delta^\epsilon(x)$ im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ eine periodische δ -Funktion darstellt, mit

$$\delta^0(x) = \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(x - mL).$$

Hausaufgabe 4: Fourier-Reihen [4]

Punkte: (a)[2](E); (b)[2](M)

Bestimmen Sie die Fourier-Reihen für folgende periodische Funktionen, d. h. berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten \tilde{f}_n in der Darstellung $f(x) = \frac{1}{L} \sum_n e^{ik_n x} \tilde{f}_n$. Wie sind k_n und L jeweils zu wählen? Skizzieren Sie zunächst die Funktionen.

$$(a) \quad f(x) = |\sin x|, \quad (b) \quad f(x) = \begin{cases} 4x & \text{für } -\pi \leq x < 0, \\ 2x & \text{für } 0 \leq x < \pi, \end{cases} \quad \text{und } f(x + 2\pi) = f(x).$$

[Kontrollergebnisse: (a) $\tilde{f}_3 = -\frac{2}{35}$, (b) $\tilde{f}_3 = \frac{2}{9}(2 - 9i\pi)$.]

Hausaufgabe 5: Berechnung einer unendlichen Reihe mittels dem Faltungstheorem [1]

Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](M); (c)[2](A,Bonus)

Diese Aufgabe illustriert, wie sich eine komplizierte Summe mittels Faltungstheorem explizit berechnen lässt.

Betrachten Sie die Funktion $f_\gamma(t) = f_\gamma(0)e^{\gamma t}$ für $t \in [0, \tau)$ und $f(t + \tau) = f(t)$ mit $f_\gamma(0) = 1/(e^{\gamma\tau} - 1)$. Dabei seien γ und τ positiv, sodass $f_{\pm\gamma}(0) \geq 0$.

(a) Betrachten Sie eine Fourier-Reihendarstellung von $f_\gamma(t)$ mit folgender Form:

$$f_\gamma(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{\omega_n} e^{-i\omega_n t} \tilde{f}_{\gamma, n}, \quad \tilde{f}_{\gamma, n} = \int_0^\tau dt e^{i\omega_n t} f_\gamma(t), \quad \text{mit } \omega_n = 2\pi n/\tau, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten durch $\tilde{f}_{\gamma,n} = 1/(i\omega_n + \gamma)$ gegeben sind.

- (b) Benutzen Sie dieses Ergebnis und das Faltungstheorem um folgende Reihe als Faltungsintegral von f_γ und $f_{-\gamma}$ auszudrücken:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega_n t}}{\omega_n^2 + \gamma^2} = -\tau \int_0^\tau dt' f_\gamma(t-t') f_{-\gamma}(t'). \quad (5)$$

- (c) Skizzieren Sie die im Faltungsintegral (5) vorkommenden Funktionen $f_\gamma(t-t')$ und $f_{-\gamma}(t')$ als Funktionen von t' , für $t' \in [-\tau, 2\tau]$. Zeigen Sie, für $0 \leq t \leq \tau$, dass das Faltungsintegral (5) durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$S(t) = \frac{\tau [\sinh(\gamma(t-\tau)) - \sinh(\gamma t)]}{2\gamma [1 - \cosh(\gamma\tau)]}.$$

Hinweis: Das Integral $\int_0^\tau dt'$ enthält einen Bereich, in dem $t-t'$ außerhalb von $[0, \tau)$ liegt. Deswegen empfiehlt es sich, das Integral in zwei Teile aufzuteilen, mit $\int_0^t dt'$ und $\int_t^\tau dt'$.

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 18]
