Blatt 11: Deltafunktion und Fourierreihen

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 1, 3(a), 4, 5.
Videos existieren für Beispielaufgaben 4 (C6.2.1), 5 (C6.3.5).

Optionale Aufgabe 1: Cosinus-Reihen [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[2](M).

Die Funktion $f : I \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$, mit $I = [-L/2, L/2]$ habe die Fourier-Reihendarstellung $f(x) = \frac{1}{L}\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\tilde{f}_k$, mit $k = \frac{2\pi n}{L}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten gegeben sind durch $\tilde{f}_k = \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)$.

(b) Sei nun f eine gerade Funktion, d.h. $f(x) = f(-x)$. Zeigen Sie, dass dann die Fourier-Koeffizienten durch $\tilde{f}_k = 2\int_0^{L/2} \mathrm{d}x\, \cos(kx) f(x)$ gegeben sind, und ferner, dass $f(x)$ durch eine Cosinus-Reihe der Form $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k>0} a_k \cos(kx)$ dargestellt werden kann, mit $k = \frac{2\pi n}{L}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Wie lautet a_k, ausgedrückt durch $\tilde{f}_k$?

(c) Betrachten Sie nun folgende Funktion: $f(x) = 1$ für $|x| < L/4$, $f(x) = -1$ für $L/4 < |x| < L/2$. Skizzieren Sie diese und berechnen Sie die Koeffizienten $\tilde{f}_k$ und a_k der entsprechenden Fourier- und Cosinus-Reihen. [Kontrollergebnis: falls $k = \frac{2\pi}{L}$, dann $a_k = \frac{4}{\pi}$ und $\tilde{f}_k = \frac{2L}{\pi}$.]

Optionale Aufgabe 2: Sinus-Reihen [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M)

Die Funktion $f : I \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$, mit $I = [-L/2, L/2]$ habe die Fourier-Reihendarstellung $f(x) = \frac{1}{L}\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\tilde{f}_k$, mit $k = \frac{2\pi n}{L}$ und $n \in \mathbb{Z}$, mit Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_k = \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)$.

(a) Sei nun f eine ungerade Funktion, d.h. $f(x) = -f(-x)$. Zeigen Sie, dass dann die Fourier-Koeffizienten durch $\tilde{f}_k = -2\mathrm{i}\int_0^{L/2} \mathrm{d}x\, \sin(kx) f(x)$ gegeben sind, und ferner, dass $f(x)$ durch eine Sinus-Reihe der Form $f(x) = \sum_{k>0} b_k \sin(kx)$ dargestellt werden kann, mit $k = \frac{2\pi n}{L}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Wie lautet b_k, ausgedrückt durch $\tilde{f}_k$?

(b) Betrachten Sie nun folgende Funktion: $f(x) = 1$ für $0 < x < L/2$, $f(x) = -1$ für $-L/2 < x < 0$. Skizzieren Sie diese und berechnen Sie die Koeffizienten $\tilde{f}_k$ und b_k der entsprechenden Fourier- und Sinus-Reihen. [Kontrollergebnis: falls $k = \frac{2\pi}{L}$, dann $b_k = \frac{4}{\pi}$ und $\tilde{f}_k = \frac{2L}{i\pi}$.]

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 7]