Blatt 10: Differentialgleichungen II. Asymptotische Entwicklungen

Ausgabe: Mo 19.12.22 Zentralübung: Do 22.12.22 Abgabe: Do 12.01.23, 14:00
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 2, 3, 4, 5.
Videos existieren für Beispielaufgaben 3 (C7.4.7), 5 (C5.4.1).

Beispielaufgabe 1: Substitution und Separation der Variablen [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E).

Oft lassen sich Differentialgleichungen durch geschickte Substitutionen lösen.

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $y' = f(y/x)$ für die Funktion $y(x)$ durch die Substitution $y = ux$ in eine Differentialgleichung für die Funktion $u(x)$ übergeht, die mittels Separation der Variablen lösbar ist.

(b) Lösen Sie mit dieser Methode die Gleichung $xy' = 2y+x$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 0$. [Kontrollergebnis: $y(2) = 2$.]

Beispielaufgabe 2: Inhomogene lineare Differentialgleichung, Variation der Konstanten [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M).

Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung $\dot{x} + 2x = t$ mit $x(0) = 0$, wie folgt:

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

(b) Finden Sie dann durch Variation der Konstanten eine spezielle (partikuläre) Lösung des inhomogenen Problems. [Kontrollergebnis: $x(-\ln 2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.]

Beispielaufgabe 3: Inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung: getriebener überdämpfter harmonischer Oszillator [7]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M); (c)[2](M); (d)[2](M).

Betrachten Sie folgenden getriebenen, überdämpften harmonischen Oszillator, mit $\gamma > \Omega$:

Differentialgleichung:
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega^2 x = f_A(t). \tag{1}$$
Anfangswerte:
$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1\ , \tag{2}$$
Antrieb:
$$f_A(t) = \begin{cases} f_A & \text{für} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{für} \quad t < 0. \end{cases}$$

Finden Sie für $t > 0$ eine Lösung dieser Gleichung in der Form $x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_p(t)$, wobei die homogene Lösung, $x_h(t)$, die homogene Differentialgleichung erfüllt, mit Anfangswerten (2), und die partikuläre Lösung, $x_p(t)$, die inhomogene Differentialgleichung erfüllt, mit Anfangswerten $x_\mathrm{p}(0) = \dot{x}_p(0) = 0$. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Rückführung auf Matrixgleichung: Schreiben Sie die DG (1) in die Matrixform

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \equiv (x, \dot{x})^T \equiv (x^1, x^2)^T \,. \tag{3}$$

Wie lauten die Matrix A, der Antriebsvektor $\mathbf{b}(t)$ und der Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$?

(b) Homogene Lösung: Finden Sie diejenige Lösung, $\mathbf{x}_h(t)$, der homogenen DG $(3)|_{\mathbf{b}(t)=0}$, welche den Anfangswert $\mathbf{x}_h(0) = \mathbf{x}_0$ hat. Nutzen Sie dazu den Ansatz $\mathbf{x}_h(t) = \sum_j c_h^j \mathbf{x}_j(t)$, mit $\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{v}_j e^{\lambda_j t}$, wobei λ_j und $\mathbf{v}_j$ $(j = 1, 2)$ die Eigenwerte und Eigenvektoren von A sind. Wie lautet die entsprechende Lösung, $x_h(t) = {x^1}_h(t)$, der homogenen DG $(1)|_{f_A(t)=0}$? [Kontrollergebnis: Für $\gamma = \sqrt{2}\ln 2$ und $\Omega = \ln 2$ gilt $x_h(1) = \frac{3}{4}\frac{2-\sqrt{2}}{\ln 2}$.]

(c) Partikuläre Lösung: Finden Sie mit dem Ansatz $\mathbf{x}_p(t) = \sum_j c_p^j(t)\mathbf{x}_j(t)$ (Variation der Konstanten) die partikuläre Lösung der inhomogenen DG (3), die den Anfangswert $\mathbf{x}_p(0) = \mathbf{0}$ hat. Wie lautet die entsprechende Lösung, $x_p(t) = {x^1}_p(t)$, der inhomogenen DG (1)? [Kontrollergebnis: Für $\gamma = 3\ln 2$, $\Omega = \sqrt{5}\ln 2$ und $f_A = 1$ gilt $x_p(1) = \frac{49}{640}\frac{1}{(\ln 2)^2}$.]

(d) Qualitative Diskussion: Die gesuchte Lösung der inhomogenen DG (1) ist gegeben durch $x(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + x_p(t)$. Skizzieren Sie Ihr Ergebnis für diese Funktion qualitativ für den Fall $f_A < 0$, und erläutern Sie das Verhalten für $t \to 0$ und $t \to \infty$.

Beispielaufgabe 4: System von linearen Differentialgleichungen mit nicht diagonalisierbarer Matrix [4]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[1](A); (d)[0.5](E); (e)[0.5](E).

Wir betrachten ein Verfahren zur Bestimmung der Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} \tag{4}$$

im Falle einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ mit $n-1$ verschiedenen Eigenwerten λ_j und zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_j$, mit $j = 1, \ldots, n-1$, wobei der Eigenwert $\lambda_{n-1} = \lambda_n$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, jedoch nur einen zugehörigen Eigenvektor hat. (Man sagt, seine 'algebraische Vielfachheit' ist zwei und seine 'geometrische Vielfachheit' ist eins.) Solch eine Matrix ist nicht diagonalisierbar. Sie kann aber auf sog. Jordan Normalform gebracht werden:

$$T^{-1}AT = J, \qquad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad T = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n)\,. \tag{5}$$

Mit $A = TJT^{-1}$, sowie $\mathbf{v}_j = T\mathbf{e}_j$ und $J\mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j + \delta_{jn}\mathbf{e}_{j-1}$ folgt, dass dies äquivalent ist zu

$$A \cdot \mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j-1}\delta_{jn}, \quad \forall j = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Für $j = 1, \ldots, n-1$ entspricht dies der üblichen Eigenwertgleichung, und die $\mathbf{v}_j$ den üblichen Eigenvektoren. $\mathbf{v}_n$ ist jedoch kein Eigenvektor, sondern durch folgende Gleichung bestimmt:

$$(A - \mathbb{1}\lambda_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n-1}. \tag{7}$$

Da $(A - \mathbb{1}\lambda_n)$ nicht invertierbar ist, legt diese Gleichung den Vektor $\mathbf{v}_n$ in der Regel nicht eindeutig fest. Verschiedene Wahlen von $\mathbf{v}_n$ führen (via Gl. (5)) zu verschiedenen Transformationsmatrizen T, liefern aber alle dieselbe Form der Jordan-Matrix J.
Die so erhaltenen λ_j und $\mathbf{v}_j$ können genutzt werden, um eine Lösung für die DG (4) mit Hilfe eines Exponentialansatzes mit 'Variation der Konstanten' zu finden:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_j \mathrm{e}^{\lambda_j t} c^j(t), \qquad \text{mit} \qquad \lambda_n \equiv \lambda_{n-1}. \tag{8}$$

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in (4) können nun die Koeffizienten $c^j(t)$ bestimmt werden:

$$0 = \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - A\right) \mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_j \mathrm{e}^{\lambda_j t} \left[\lambda_j c^j(t) + \dot{c}^j(t) - \lambda_j c^j(t)\right] - \mathbf{v}_{n-1} \mathrm{e}^{\lambda_n t} c^n(t). \tag{9}$$

Koeffizientenvergleich für $\mathbf{v}_j$ ergibt:

$$\mathbf{v}_{j\neq n-1}: \qquad \dot{c}^j(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{c^j(t) = c^j(0) = \text{konst.}}, \tag{10}$$

$$\mathbf{v}_{n-1}: \qquad \dot{c}^{n-1}(t) = c^n(t) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{c^{n-1}(t) = c^{n-1}(0) + t\, c^n(0)}. \tag{11}$$

Die Werte von $c^j(0)$ werden mittels der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0)$ festgelegt:

$$\mathbf{x}(0) = \sum_j \mathbf{v}_j c^j(0) = T\mathbf{c}(0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}(0) = T^{-1}\mathbf{x}(0)\,. \tag{12}$$

Finden Sie nun mit dieser Methode die Lösung der DG

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristischen Polynom von A eine einfache und eine doppelte Nullstelle hat, λ_1 bzw. $\lambda_2 = \lambda_3$. [Kontrolle: sind die Relationen $\sum_j \lambda_j = \mathrm{Tr}\,A$ und $\prod_j \lambda_j = \det A$ erfüllt?]

(b) Zeigen Sie, dass die Eigenräume zu λ_1 und λ_2 beide nur ein-dimensional sind (was bedeutet, dass A nicht diagonalisierbar ist), und finden Sie entsprechende normierte Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$.

(c) Finden Sie mittels Gl. (7) einen dritten, normierten Vektor $\mathbf{v}_3$, mit der Eigenschaft, dass A mittels $T = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ in eine Jordan-Normalform gebracht werden kann. Nutzen Sie hierbei die Wahlfreiheit, die für $\mathbf{v}_3$ besteht, um diesen Vektor orthonormal zu $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ zu wählen. [*Anmerkung:* Orthonormalität ist für das aktuelle Beispiel erreichbar (und nützlich, da dann $T^{-1} = T^T$ gilt), im Allgemeinen jedoch nicht.]

(d) Bestimmen Sie nun mittels einem Ansatz der Form (8) die Lösung $\mathbf{x}(t)$ der Differentialgleichung (13). [Kontrollergebnis: $\mathbf{x}(\ln 2) = (2, 4, 0)^T + \frac{4}{3}(1 + \ln 2)(2, -1, 2)^T$.]

(e) Überprüfen Sie durch explizites Einsetzen, ob Ihre gefundene Lösung die Differentialgleichung erfüllt.

Beispielaufgabe 5: Reihenentwicklung zum iterativen Lösen einer Gleichung [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M).

Lösen Sie die Gleichung $\mathrm{e}^{y-1} = 1 - \epsilon y$ nach y, bis einschließlich zweiter Ordnung in dem kleinen Parameter ϵ, mit dem Ansatz $y(\epsilon) = y_0 + y_1\epsilon + \frac{1}{2!}y_2\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$. Verwenden Sie beide der folgenden Herangehensweisen:

(a) Methode 1: **Entwicklung der Gleichung**. Setzen Sie den Ansatz für $y(\epsilon)$ in die gegebene Gleichung ein, Taylor-entwickeln Sie jeden Term bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, und fassen Sie Terme der selben Potenz in ϵ zusammen, sodass Sie eine Gleichung der Form $0 = \sum_n F_n\epsilon^n$ erhalten. Der Koeffizient jedes ϵ^n muss verschwinden, wodurch sich eine Hierarchie von Gleichungen ergibt, $F_n = 0$. Lösen Sie diese sukzessive für die y_n's, beginnend bei $n = 0$, wobei Sie in jedem Schritt die zuvor bestimmten $y_{i<n}$ verwenden. [Kontrollergebnis: $y_2 = 1$.]

(b) Methode 2: **Wiederholtes Ableiten**. Methode 1 kann auf folgende Weise betrachtet werden: Die gegebene Gleichung wird umgeschrieben als $0 = \mathcal{F}(y(\epsilon), \epsilon) \equiv F(\epsilon)$, und die rechte Seite wird in die Form $0 = \sum_n F_n\epsilon^n$ gebracht. Letzterer Schritt kann vereinfacht werden durch die Feststellung, dass $F_n = \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n_\epsilon F(\epsilon)|_{\epsilon=0}$. Daher kann die $n$te Gleichung der Hierarchie, $F_n = 0$, aufgestellt werden, indem wir einfach die gegebene Gleichung n mal ableiten und dann ϵ gleich null setzen, $0 = \mathrm{d}^n_\epsilon F(\epsilon)|_{\epsilon=0}$. Verwenden Sie diesen Ansatz, um eine Hierarchie von Gleichungen für y_0, y_1 und y_2 zu finden.

Hinweis: Da $F(\epsilon)$ sowohl direkt von ϵ abhängt als auch durch $y(\epsilon)$, muss bei der Berechnung der Ableitungen die Kettenregel beachtet werden, z.B. $\mathrm{d}_\epsilon F(\epsilon) = \partial_y\mathcal{F}(y, \epsilon)y' + \partial_\epsilon\mathcal{F}(y, \epsilon)$.

Anmerkung: Methode 2 hat den Vorteil, dass sie systematisch Ordnung für Ordnung vorgeht: Informationen über $\mathcal{O}(\epsilon^n)$ werden genau zum richtigen Zeitpunkt bestimmt, nämlich wenn man sie benötigt, um im $n$ten Schritt y_n zu berechnen. Daher ist diese Methode oft bequemer als Methode 1, insbesondere wenn $\mathcal{F}(y, \epsilon)$ nicht-trivial von y abhängt.

Beispielaufgabe 6: Taylor-Entwicklung in 2 Dimensionen [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M).

Geben Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion $g(x, y) = \mathrm{e}^x \cos(x + 2y)$ in x und y um den Punkt $(x, y) = (0, 0)$ an. Berechnen Sie explizit alle Terme bis einschließlich zweiter Ordnung,

(a) durch Ausmultiplizieren der Reihenentwicklungen der Exponential- und Cosinus-Funktionen;

(b) mittels der Formel für die Taylor-Reihe einer Funktion von zwei Variablen.

[Kontrollergebnisse: der gemischte Term zweiter Ordnung ist jeweils: (a) $-2xy$, (b) $-2xy$.]

Beispielaufgabe 7: Sich schneidende Ebenen: Minimaler Abstand zum Ursprung [2]
Punkte: [2](M).

Betrachten Sie die Schnittlinie der beiden durch die Gleichungen $x+y+z = 1$ bzw. $x-y+2z = 2$ definierten Ebenen. Verwenden Sie Lagrange-Multiplikatoren, um auf dieser Linie den Punkt zu finden, der dem Ursprung am nächsten liegt. [Kontrollergebnis: sein Abstand zum Ursprung beträgt $\sqrt{5/7}$.]

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 22]

Hausaufgabe 1: Substitution und Separation der Variablen [7]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[2](M); (d)[1](E); (e)[2](M).

Betrachten Sie Differentialgleichungen vom Typ

$$y'(x) = f(ax + by(x) + c)\,. \tag{14}$$

(a) Substituieren Sie $u(x) = ax + by(x) + c$ und finden Sie eine Differentialgleichung für $u(x)$.

(b) Finden Sie einen impliziten Ausdruck für die Lösung $u(x)$ der neuen Differentialgleichung, mittels einem Integral, das die Funktion f enthält. *Hinweis:* Separation der Variablen!

(c) Nutzen Sie die Substitutionsstrategie von (a,b) um die Differentialgleichung $y'(x) = \mathrm{e}^{x+3y(x)+5}$ zu lösen, mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$.
[Kontrollergebnis: $y(\ln(e^{-8} + 3) - 2\ln 2) = \frac{1}{3}\,(2\ln 2 - \ln(e^{-8} + 3) - 5)$.]

(d) Check: Lösen Sie die in (c) angegebene Differentialgleichung direkt (d.h. ohne Subsitution) mittels Separation der Variablen. Stimmt das Ergebnis mit dem von (c) überein?

(e) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'(x) = [a(x+y)+c]^2$, mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, mittels der in (a) angegebenen Substitution.
[Kontrollergebnis: Für $x_0 = y_0 = 0$ und $a = c = 1$ gilt $y(0) = 0$.]

Hausaufgabe 2: Inhomogene lineare Differentialgleichung, Variation der Konstanten [2]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1,Bonus](E)

Die Funktion $x(t)$ erfülle die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) + tx(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad \text{mit Anfangsbedingung} \quad x(0) = x_0. \tag{15}$$

(a) Finden Sie die Lösung, $x_h(t)$, der entsprechenden homogenen Gleichung, mit $x_h(0) = x_0$.

(b) Finden Sie die partikuläre Lösung, $x_p(t)$, der inhomogenen Gleichung (15), mit $x_p(0) = 0$, mittels Variation der Konstanten. Wie lautet die allgemeine Lösung, $x(t)$, mit $x(0) = x_0$?
[Kontrollergebnis: Für $x_0 = 0$ gilt $x(1) = e^{-1/2}$.]

(c) Für eine Differentialgleichung der Form $\dot{x}(t)+a(t)x(t) = b(t)$ (gewöhnlich, 1. Ordnung, linear, inhomogen) kann die allgemeine Lösung $x(t)$, mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$, ausgedrückt werden als

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_h(t) + c(t)x_h(t) = (1 + c(t))x_h(t) = \tilde{c}(t)x_h(t)\,,$$

wobei für $x_h(t)$ und $\tilde{c}(t)$ die Anfangsbedingungen $x_h(0) = 1$ und $\tilde{c}(0) = x_0$ gewählt werden. Konstruieren Sie auf diesem Weg eine Lösung der Differentialgleichung (15) von der Form $x(t) = \tilde{c}(t)x_h(t)$. Stimmt sie mit der in (b) erhaltenen Lösung überein? Dieses Beispiel illustriert die allgemeine Tatsache, dass dieselbe Anfangsbedingung auf mehr als eine Weise implementiert werden kann.

Hausaufgabe 3: Inhomogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M); (c)[2](M,Bonus).

Betrachten Sie folgende inhomogene lineare Differentialgleichung (DG) 3. Ordnung:

Differentialgleichung:	$\dddot{x} - 6\ddot{x} + 11\dot{x} - 6x = f_A(t),$		(16)
Anfangswerte:	$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(0) = a\,,$	mit $a \in \mathbb{R}.$	(17)
Antrieb:	$f_A(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-bt} & \text{für} \quad t \geq 0\,, \\ 0 & \text{für} \quad t < 0\,, \end{cases}$	mit $0 < b \in \mathbb{R}.$	(18)

Finden Sie für $t > 0$ eine Lösung dieser Gleichung in der Form $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, wobei $x_h(t)$ und $x_p(t)$ die homogene bzw. partikuläre Lösungen der homogenen bzw. inhomogenen DG sind, mit Anfangswerten (17) bzw. $x_p(0) = \dot{x}_p(0) = \ddot{x}_p(0) = 0$. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Schreiben Sie die DG (16) in die Matrixform

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \equiv (x, \dot{x}, \ddot{x})^T \equiv (x^1, x^2, x^3)^T, \quad \mathbf{x}_0 = (x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0))^T\,. \tag{19}$$

(b) Finden Sie die homogene Lösung $\mathbf{x}_h(t)$ von (19)$|_{\mathbf{b}(t)=0}$, mit $\mathbf{x}_h(0) = \mathbf{x}_0$; dann $x_h(t) = {x^1}_h(t)$. [Kontrollergebnis: $x_h(\ln 2) = 2 + a$.]

(c) Finden Sie die inhomogene Lösung $\mathbf{x}_p(t)$ von (19), mit $\mathbf{x}_p(0) = \mathbf{0}$; dann $x_p(t) = {x^1}_p(t)$. [Kontrollergebnis: für $a = 2$ und $b = 1$ gilt $x_p(\ln 2) = \frac{7}{48}$.]

Hinweis: Diese Aufgabe ist direkt analog zur Beispielaufgabe zum getriebenen gedämpften harmonischen Oszillator. Die Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3 von A sind ganzzahlig, mit $\lambda_1 = 1$.

Hausaufgabe 4: System von linearen Differentialgleichungen mit nicht diagonalisierbarer Matrix: kritisch gedämpfter harmonischer Oszillator [4]

Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M); (c)[1](E); (d)[2](M,Bonus).

Finden Sie die allgemeine Lösung des kritisch gedämpften, homogenen, harmonischen Oszillators,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2 x = 0\,. \tag{20}$$

Durch Einführen von Variablen $\mathbf{x} \equiv (x, v)^T$, mit $v \equiv \dot{x}$ und $\dot{v} = \ddot{x} = -\gamma^2 x - 2\gamma v$, lässt sich die Gleichung als System von zwei DG 1. Ordnung schreiben:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma^2 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Um die Matrixgleichung (21), $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, zu lösen, verwenden wie den Ansatz $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}\mathrm{e}^{\lambda t}$, der zu dem Eigenwertproblem $\lambda\mathbf{v} = A\mathbf{v}$ führt. Im Fall des gedämpften harmonischen Oszillators stellt sich heraus, dass dieses Eigenwertproblem entartete Eigenwerte hat. Gehen Sie daher wie folgt vor:

(a) Finden Sie den entarteten Eigenwert, λ, seinen Eigenvektor, $\mathbf{v}$, und die zugehörige Lösung, $\mathbf{x}(t)$, von Gl. (21). Überprüfen Sie, dass die erste Komponente, $x(t)$, eine Lösung von (20) ist. Wir werden diese Lösung im weiteren Verlauf $x_1(t)$ nennen.

(b) Finden Sie durch Variation der Konstanten eine zweite Lösung für Gl. (20), indem Sie den Ansatz $x_2(t) = c(t)x_1(t)$ in die DG (20) für x einsetzen, so eine DG für $c(t)$ aufstellen, und diese lösen.

(c) Finden Sie eine Lösung $x(t)$ als Linearkombination von $x_1(t)$ und $x_2(t)$, die die Anfangswerte $x(0) = 1$, $\dot{x}(1) = 1$ erfüllt.
[Kontrollergebnis: Für $\gamma = 2$ gilt $x(\ln 2) = \frac{1}{4}\left(1 - \ln 2(2 + \mathrm{e}^2)\right)$.]

(d) Der kritisch gedämpfte harmonische Oszillator kann als Grenzwert $\gamma \to \Omega$ von sowohl dem überdämpften (siehe Beispielaufgabe) als auch dem unterdämpften (siehe Vorlesung) harmonischen Oszillator aufgefasst werden. Deren allgemeine Lösung hat die Form $x(t) = c_+\mathrm{e}^{\gamma_+ t} + c_-\mathrm{e}^{\gamma_- t}$, wobei $\gamma_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2}$ im überdämpften und $\gamma_\pm = -\gamma \pm \mathrm{i}\sqrt{\Omega^2 - \gamma^2}$ im unterdämpften Fall. Machen Sie für beide Fälle eine Taylor-Entwicklung der allgemeinen Lösung für kleine Werte von ϵt, mit $\epsilon \equiv \sqrt{|\gamma^2 - \Omega^2|}$, und zeigen Sie, dass das Ergebnis in beiden Fällen als Linearkombination der in (a) und (b) gefundenen Lösungen des kritisch gedämpften harmonischen Oszillators geschrieben werden kann.

Hausaufgabe 5: Reihenentwicklung zum iterativen Lösen einer Gleichung [3]
Punkte: (a)[1.5](M); (b)[1.5](M).

Lösen Sie die Gleichung $\ln\left[(x+1)^2\right] + \mathrm{e}^y = 1 - y$ nach y, bis zur zweiten Ordnung in dem kleinen Parameter x, mit dem Ansatz $y(x) = y_0 + y_1 x + \frac{1}{2!}y_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3)$. Verwenden Sie beide in der entsprechenden Beispielaufgabe beschriebenen Methoden:

(a) Methode 1: Entwicklung der Gleichung; und (b) Methode 2: Wiederholtes Ableiten.

Welche finden Sie bequemer? [Kontrollergebnis: $y_2 = \frac{1}{2}$.]

Hausaufgabe 6: Taylor-Entwicklung in mehreren Dimensionen [2]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[1.5](M)

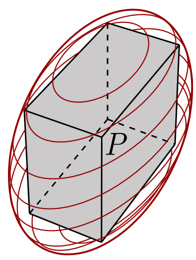
Berechnen Sie für folgende Funktionen die Taylor-Entwicklung in x und y um den Punkt $(x, y) = (0, 0)$, bis einschließlich zweiter Ordnung:

(a) $f(x, y) = e^{-(x+y)^2}$, (b) $g(x, y) = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 + xy}}$.

[Kontrollergebnisse: der gemischte Term zweiter Ordnung ist jeweils: (a) $-2xy$, (b) $-\frac{1}{2}xy$.]

Hausaufgabe 7: Maximales Volumen einer Box in einem Ellipsoid [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M)

Betrachten sie das durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ definierte Ellipsoid. Betrachten Sie außerdem eine quaderförmige Box, deren Ecken auf der Oberfläche des Ellipsoids liegen und deren Kanten parallel zu den Symmetrieachsen des Ellipsoids sind. $P = (x_p, y_p, z_p)^T$ sei diejenige Ecke der Box, die im positiven Quadranten ($x_p > 0$, $y_p > 0$, $z_p > 0$) liegt. Wie sollte diese Ecke gewählt werden, damit das Volumen der Box maximal wird? Wie groß ist das maximale Volumen?



Hinweis: Maximieren Sie das Volumen $V(x, y, z) = 8\,xyz$ einer Box mit einer Ecke am Punkt $(x, y, z)^T$, unter der Nebenbedingung, dass dieser Punkt auf dem Ellipsoid liegt.
[Kontrollergebnis: für $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$, $c = \sqrt{3}$ gilt $V_{\max} = 4$.]

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 23]
