Blatt 10: Differentialgleichungen II. Asymptotische Entwicklungen

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 2, 3, 4, 5.
Videos existieren für Beispielaufgaben 3 (C7.4.7), 5 (C5.4.1).

Optionale Aufgabe 1: Taylor-Reihe für Umkehrfunktion [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M).

Diese Aufgabe zeigt, wie die Reihenentwicklung einer Umkehrfunktion durch Entwicklung der die Umkehrfunktion definierenden Gleichung bestimmt werden kann.

Die Umkehrfunktion, $g(x)$, der Funktion $f(x)$ erfüllt die definierende Gleichung $f(g(x)) = x$. Um die Reihenentwicklung der Umkehrfunktion um einen Punkt x_0 zu bestimmen, verwenden wir den Ansatz $g(x_0 + x) \equiv y(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y_n x^n$ und bestimmen die Koeffizienten $y_n \equiv y^{(n)}(0)$ durch iteratives Lösen der Gleichung $f(y(x)) = x_0 + x$ nach $y(x)$. Berechnen Sie auf diese Weise die Reihenentwicklungen der folgenden Funktionen um $x = 0$, bis einschließlich 2. Ordnung in x:

(a) $\ln(1 + x)$, (b) 2^x.

[Kontrollergebnis: (a) $y_2 = -1$, (b) $y_2 = \ln^2(2)$.]

Optionale Aufgabe 2: Taylor-Reihe für Umkehrfunktion [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M)

Bestimmen Sie die Reihenentwicklung von $\arcsin(x)$ um $x = 0$ bis einschließlich dritter Ordnung, indem Sie beide der folgenden Methoden verwenden:

(a) Bestimmen Sie die Entwicklung von $\arcsin(x) \equiv y(x)$ durch iteratives Lösen der Gleichung $\sin[y(x)] = x$.

(b) Da die Sinus-Funktion ungerade ist, ist auch ihre Umkehrfunktion ungerade. Daher kann sie durch den Ansatz $\arcsin(x) = c_1 x^1 + \frac{1}{3!} c_3 x^3 + \mathcal{O}(x^5)$ dargestellt werden. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_1 und c_3, indem Sie die Gleichung $\arcsin(\sin(y)) = y$ in Potenzen von y entwickeln, unter Verwendung der bekannten Reihenentwicklung von $\sin(y)$. [Kontrollergebnis: $c_3 = 1$.]

Optionale Aufgabe 3: Entropiemaximierung mit Nebenbedingungen [2]

Diese Aufgabe illustriert die Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren anhand eines typischen Problems aus der Quantenstatistik. Für eine detaillierte Diskussion der unten genannten Konzepte sei auf die Vorlesungen zur Quantenmechanik sowie zur Statistischen Physik verwiesen.
Ein Quantensystem mit M möglichen Zuständen, $i = 1, \ldots, M$, befinde sich mit Wahrscheinlichkeit p_i in Zustand i, wobei die Summe der Wahrscheinlichkeiten, $P = \sum_i p_i$, auf $P = 1$ festgelegt

ist. (Hier und im Folgenden steht $\sum_i$ für $\sum_{i=1}^{M}$.) Im Quantenzustand i habe das System die Energie E_i und die Teilchenzahl N_i. Die **Entropie** S und die **mittlere Energie** E des Systems sind gegeben durch:

$$S = -\sum_i p_i \ln p_i \ , \qquad E = \sum_i E_i p_i \ . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass eine Maximierung der Entropie bezüglich der Wahrscheinlichkeiten p_i, unter Berücksichtigung der im Folgenden angegebenen Nebenbedingungen, zu Ergebnissen der folgenden Form für die p_i's führt:

(a) Wenn $P = 1$ die einzige Nebenbedingung ist, d.h. $\sum_i P_i - 1 = 0$, ist die Entropie maximal, falls alle Wahrscheinlichkeiten gleich sind, mit $p_i = 1/M$.

(b) Mit den Nebenbedingungen $P = 1$ und vorgegebener mittlerer Energie, d.h. $\sum_i E_i p_i - E = 0$, ist die Entropie maximal, falls die Wahrscheinlichkeit p_i exponentiell von E_i abhängt, und zwar auf eine Weise, die durch $p_i = Z^{-1} e^{-\beta E_i}$ (genannt Boltzmann-Verteilung) ausgedrückt werden kann, wobei $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$ und $\beta > 0$ eine reelle Konstante ist.

Anmerkungen: Z wird die **Zustandsumme** genannt. In der statistischen Physik wird gezeigt, dass β invers proportional zur Temperatur ist, $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}} T)$, wobei die **Boltzmann-Konstante** k_{B} eine universelle Konstante ist. Die mittlere Energie des Systems, gebeben durch $E = \sum_i E_i p_i = \sum_i E_i e^{-\beta E_i}/Z$, wird offensichtlich durch die Temperatur reguliert: je höher T, desto höher E; im Limes $T \gg \max(E_i)$ sind alle Zustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit besetzt, $p_i = 1/M$, wie in (a). Im Limes $T = 0$ ist p_i nur ungleich null, wenn E_i die niedrigste Energie im Spektrum ist. Wenn es nur einen einzigen Zustand niedrigster Energie gibt (einen "nicht-entarteten Grundzustand", er habe den Index $i = 1$), gilt $p_i = \delta_{i1}$, d.h. bei $T = 0$ ist das System mit Sicherheit im Grundzustand.