Blatt 09: Taylor-Reihen. Differentialgleichungen I

Ausgabe: Mo 14.12.22   Zentralübung: 15.12.22   Abgabe: Do 22.12.22, 14:00
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 2, 3, 5.
Videos existieren für Beispielaufgaben 4 (L8.3.1).

Beispielaufgabe 1: Sinus- und Cosinus-Additionstheoreme [1]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E).

Beweisen Sie die Sinus- und Cosinus-Additionstheoreme, für beliebige $a, b \in \mathbb{C}$.

(a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,   (b) $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$.

Hinweis: Nutzen Sie die Euler-Formel auf beiden Seiten von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$.

Beispielaufgabe 2: Taylor-Entwicklungen [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M,Bonus).

Taylor-entwickeln Sie folgende Funktionen. Dabei können Sie wählen, ob Sie die entsprechenden Ableitungen berechnen um die Koeffizienten der Taylorreihe zu bestimmen, oder ob Sie die bekannten Entwicklungen von $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\frac{1}{1-x}$ und $\ln(1+x)$ einsetzen.

(a) $f(x) = \frac{1}{1-\sin(x)}$ um $x = 0$, bis einschließlich 4. Ordnung.

(b) $g(x) = \sin(\ln(x))$ um $x = 1$, bis einschließlich 2. Ordnung.

(c) $h(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$ um $x = 0$, bis einschließlich 2. Ordnung.

[Kontrollergebnisse: der Term höchster erbetener Ordnung ist: (a) $\frac{2}{3}x^4$, (b) $-\frac{1}{2}(x-1)^2$, (c) $-\frac{1}{2}\mathrm{e}x^2$.]

Beispielaufgabe 3: Funktionen von Matrizen [4]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[1.5](M).

Der Zweck dieser Aufgabe ist, Erfahrung mit dem Begriff 'Funktion einer Matrix' zu sammeln. Sei f eine analytische Funktion, mit Taylor-Reihe $f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^l$, und $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n)$ eine quadratische Matrix, dann ist $f(A)$ definiert als $f(A) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l A^l$, mit $A^0 = \mathbb{1}$.

(a) Eine Matrix A heisst 'nilpotent', falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $A^l = 0$. Dann endet die Taylor-Reihe von $f(A)$ nach l Termen. Beispiel mit $n = 2$: Berechnen Sie e^A für $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Falls $A^2 \propto \mathbb{1}$, gilt $A^{2m} \propto \mathbb{1}$ und $A^{2m+1} \propto A$, und die Taylor-Reihe von $f(A)$ hat die Form $f_0\mathbb{1} + f_1 A$. Beispiel mit $n = 2$: Berechnen Sie e^A explizit für $A = \theta\tilde{\sigma}$, mit $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
[Kontrollergebnis: falls $\theta = -\frac{\pi}{6}$, dann $\mathrm{e}^A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.]

(c) Falls A diagonalisierbar ist, lässt sich $f(A)$ durch dessen Eigenwerte ausdrücken. Sei T die Ähnlichkeitstransformation die A diagonalisiert, mit Diagonalmatrix $D = T^{-1}AT$ und Diagonalelementen $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$f(A) = Tf(D)T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Anmerkung: Hier sind die beiden Gleichheitszeichen unabhängig voneinander zu zeigen.

(d) Berechnen Sie die Matrixfunktion e^A aus (b) nun mittels Diagonalisierung, wie in (c).

Beispielaufgabe 4: Exponentialdarstellung der Rotationsmatrix in 2 Dimensionen [1]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E).

Die Matrix $R_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ beschreibt eine Rotation um den Winkel θ in $\mathbb{R}^2$. Finden Sie mittels folgender 'unendlicher Produktzerlegung' eine Exponentialdarstellung dieser Matrix:

(a) Eine Rotation um den Winkel θ kann als Folge von m Rotationen, jede um den Winkel θ/m, dargestellt werden: $R_\theta = [R_{(\theta/m)}]^m$. Für $m \to \infty$ geht $\theta/m \to 0$, also kann die Matrix $R_{(\theta/m)}$ kann als $R_{(\theta/m)} = \mathbb{1} + (\theta/m)\tilde{\sigma} + \mathcal{O}\big((\theta/m)^2\big)$ geschrieben werden. Finden Sie die Matrix $\tilde{\sigma}$.

(b) Zeigen Sie nun mittels der Identität $\lim_{m\to\infty}[1 + x/m]^m = \mathrm{e}^x$, dass $R_\theta = \mathrm{e}^{\theta\tilde{\sigma}}$.

Anmerkung: Begründung dieser Identität: Es gilt $\mathrm{e}^x = [\mathrm{e}^{x/m}]^m = [1 + x/m + \mathcal{O}\big((x/m)^2\big)]^m$. Im Limes $m \to \infty$ können die Terme $\mathcal{O}\big((x/m)^2\big)$ vernachlässt werden.

[Ergebniskontrolle: Reproduziert die Taylor-Entwicklung von $\mathrm{e}^{\theta\tilde{\sigma}}$ die eingangs angegebene Matrix für R_θ?]

Anmerkung: Das hier illustrierte Verfahren, mit dem eine unendliche Folge von identischen, infinitesimal kleinen Transformationen exponentiert wird, ist ein Grundstein der Theorie der 'Lie-Gruppen', deren Elemente mit kontinuierlichen Parametern (hier der Winkel θ) assoziert sind. In diesem Zusammenhang wird obige Matrix $\tilde{\sigma}$ der 'Generator' der Rotation genannt.

Beispielaufgabe 5: Separable Differentialgleichung [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E).

Eine autonome Differentialgleichung 1. Ordnung heißt **autonom**, wenn sie die Form $\dot{x} = f(x)$ hat, also die rechte Seite zeitunabhängig ist (nicht-autonom wäre $\dot{x} = f(x,t)$). Solche Gleichungen können mit Trennung der Variablen gelöst werden.

(a) Betrachten Sie die autonome Differentialgleichung $\dot{x} = x^2$ für die Funktion $x(t)$. Finden Sie mittels Trennung der Variablen die Lösung für zwei verschiedene Anfangsbedingungen: (i) $x(0) = 1$ und (ii) $x(2) = -1$. [Kontrollergebnis: (i) $x(-2) = \frac{1}{3}$, und (ii) $x(2) = -1$.]

(b) Skizzieren Sie die gefundene Lösung qualitativ. Überzeugen Sie sich, dass Ihre Skizzen für die Funktion $x(t)$ und deren Ableitung $\dot{x}(t)$ den durch die Differentialgleichung vorgegebenen Zusammenhang erfüllt.

Beispielaufgabe 6: Separation der Variablen: barometrische Höhenformel [1]
Punkte: [1](E).

Die Standard-Atmosphärenformel für den Luftdruck $p(x)$ als Funktion der Höhe x lautet: $\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x} = -\alpha\frac{p(x)}{T(x)}$. Lösen Sie diese Gleichung, mit Anfangswert $p(x_0) = p_0$, für den Fall eines linearen Temperaturverlaufs, $T(x) = T_0 - b(x - x_0)$.
[Kontrollergebnis: Für $\alpha, b, T_0, x_0, p_0 = 1$ gilt $p(1) = 1$.]

Beispielaufgabe 7: Lineare Homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten [2]
Punkte: [2](E).

Lösen Sie folgende Differentialgleichung mittels einem Exponentialansatz:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t)\,, \qquad A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = (2,1)^T\,.$$

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 13]

Hausaufgabe 1: Sinus- und Cosinus-Potenzen [1]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E)

Beweisen Sie mittels der Euler-Formel folgende Identitäten, für ein beliebiges $a \in \mathbb{C}$:

(a) $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2a)\,, \qquad \sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2a)\,.$

(b) $\cos^3 a = \frac{3}{4}\cos a + \frac{1}{4}\cos(3a)\,, \qquad \sin^3 a = \frac{3}{4}\sin a - \frac{1}{4}\sin(3a)\,.$

Hausaufgabe 2: Taylor-Entwicklungen [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M)

Taylor-entwickeln Sie folgende Funktionen. Dabei können Sie wählen, ob Sie die entsprechenden Ableitungen berechnen um die Koeffizienten der Taylorreihe zu bestimmen, oder ob Sie die bekannten Entwicklungen von $\cos(x)$, $\frac{1}{1-x}$, e^x und $\ln(1+x)$ einsetzen.

(a) $f(x) = \frac{\cos(x)}{1-x}$ um $x = 0$ bis einschließlich dritter Ordnung.

(b) $g(x) = \mathrm{e}^{\cos(x^2+x)}$ um $x = 0$ bis einschließlich dritter Ordnung.

(c) $h(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(x)$ um $x = 1$ bis einschließlich dritter Ordnung.

[Kontrollergebnisse: der Term höchster erbetener Ordnung ist jeweils: (a) $\frac{1}{2}x^3$, (b) $-\mathrm{e}\,x^3$, (c) $\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-1}(x-1)^3$.]

Hausaufgabe 3: Funktionen von Matrizen [3]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[1](E); (c)[1.5](M); (d)[1](A,Bonus).

Drücken Sie jede der folgenden Matrixfunktionen explizit durch eine Matrix aus:

(a) e^A, mit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) e^B, mit $B = b\sigma_1$ und $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, mittels der Taylor-Reihe der Exponentialfunktion.
[Kontrollergebnis: falls $b = \ln 2$, dann $\mathrm{e}^B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.]

(c) Dieselbe Funktion wie in (b), diesmal mittels Diagonalisierung von B.

(d) e^C, mit $C = \mathrm{i}\theta\,\Omega$, wobei $\Omega = n_j S_j$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ ein Einheitsvektor ist ($\|\mathbf{n}\| = 1$), und S_j die Spin-$\frac{1}{2}$-Matrizen sind: $S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, $S_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst Ω^2 (dabei ist die Eigenschaft $S_i S_j + S_j S_i = \frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbb{1}$ der Spin-$\frac{1}{2}$-Matrizen nützlich), und nutzen Sie dann die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion.
[Kontrollergebnis: falls $\theta = -\frac{\pi}{2}$ und $n_1 = -n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dann $\mathrm{e}^C = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} & \sqrt{3}+\mathrm{i} \end{pmatrix}$.]

Anmerkung: Die Exponentialform e^C ist eine Darstellung von $\mathrm{SU}(2)$-Transformationen, die Gruppe aller speziellen, unitären Transformationen in $\mathbb{C}^2$. Ihre Elemente werden durch drei kontinuierliche reelle Parameter charakterisiert (hier θ, n_1 und n_2, mit $n_3 = \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$). Die S_j-Matrizen sind 'Generatoren' dieser Transformationen; sie erfüllen die $\mathrm{SU}(2)$-Algebra, d.h. ihre Kommutatoren liefern $[S_i, S_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}S_k$.

Hausaufgabe 4: Exponentialdarstellung der Rotationsmatrix in 3 Dimensionen [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[1](M); (d)[1](A)

In $\mathbb{R}^3$ wird eine Rotation mit Winkel θ um eine Drehachse, deren Richtung durch den Einheitsvektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ gegeben ist, durch eine 3×3-Matrix dargestellt, mit Matrixelementen:

$$(R_\theta(\mathbf{n}))_{ij} = \delta_{ij}\cos\theta + n_i n_j(1 - \cos\theta) - \epsilon_{ijk}\, n_k \sin\theta \qquad (\epsilon_{ijk} = \text{Levi-Civita-Symbol})\,. \tag{1}$$

Ziel der folgenden Schritte ist es, eine Begründung für Gleichung (1) zu liefern.

(a) Betrachten Sie zunächst die drei Matrizen $R_\theta(\mathbf{e}_i)$ für Rotationen mit Winkel θ um die drei Koordinatenachsen $\mathbf{e}_i$, mit $i = 1, 2, 3$. Einfache geometrischen Überlegungen liefern:

$$R_\theta(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_\theta(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_\theta(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie für jede dieser Matrizen mittels einer unendlichen Produktzerlegung der Form $R_\theta(\mathbf{n}) = \lim_{m\to\infty}[R_{\theta/m}(\mathbf{n})]^m$ eine Exponentialdarstellung der Form $R_\theta(\mathbf{e}_i) = \mathrm{e}^{\theta\tau_i}$. Wie lauten die drei 3×3-Matrizen τ_1, τ_2 und τ_3? [Kontrollergebnis: Die τ_i-Kommutatoren liefern $[\tau_i, \tau_j] = \epsilon_{ijk}\tau_k$. Dies ist die sogenannte $\mathrm{SO}(3)$-Algebra, die der Darstellungstheorie von 3-dimensionalen Rotationen zugrunde liegt. Ferner gilt $\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 = -2\mathbb{1}$.]

(b) Betrachten Sie nun eine Rotation mit Winkel θ um eine beliebige Achse $\mathbf{n}$. Um hier mittels einer unendlichen Produktzerlegung eine Exponentialdarstellung zu finden, wird eine Näherung für $R_{\theta/m}(\mathbf{n})$ bis zur ersten Ordnung in dem kleinen Winkel θ/m benötigt. Sie hat die Form

$$R_{\theta/m}(\mathbf{n}) = R_{n_1\theta/m}(\mathbf{e}_1)R_{n_2\theta/m}(\mathbf{e}_2)R_{n_3\theta/m}(\mathbf{e}_3) + \mathcal{O}\big((\theta/m)^2\big). \tag{2}$$

Intuitive Begründung: Wenn der Rotationswinkel θ/m genügend klein ist, kann die Rotation in drei Teilschritten gemacht werden, jeweils um die Richtung $\mathbf{e}_i$, mit 'anteiligem' Winkel $n_i\theta/m$. Die Vorfaktoren n_i gewährleisten, dass für $\mathbf{n} = \mathbf{e}_i$ (Rotation um Koordinatenachse i)

nur *ein* Faktor in (2) verschieden von $\mathbb{1}$ ist, nämlich der, welcher $R_{\theta/m}(\mathbf{e}_i)$ liefert; z.B. für $\mathbf{n} = \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T$: $R_{0\theta/m}(\mathbf{e}_1)R_{1n_2\theta/m}(\mathbf{e}_2)R_{0\theta/m}(\mathbf{e}_3) = R_{n_2\theta/m}(\mathbf{e}_2)$.

Zeigen Sie, dass so eine Produktzerlegung von $R_\theta(\mathbf{n})$ folgende Expontialdarstellung liefert:

$$R_\theta(\mathbf{n}) = \mathrm{e}^{\theta\Omega}\,, \qquad \Omega = n_i\tau_i = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad (\Omega)_{ij} = -\epsilon_{ijk}n_k\,. \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, dass Ω, der 'Generator' der Rotation, folgende Eigenschaften besitzt:

$$(\Omega^2)_{ij} = n_in_j - \delta_{ij}, \qquad \Omega^l = -\Omega^{l-2} \quad \text{für } 3 \le l \in \mathbb{N}. \qquad \text{[Cayley-Hamilton-Theorem]} \tag{4}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst Ω^2 und Ω^3. Die Form von $\Omega^{l>3}$ ist dann offensichtlich.

(d) Zeigen Sie, dass die Taylor-Entwicklung von $R_\theta(\mathbf{n}) = \mathrm{e}^{\theta\Omega}$ folgenden Ausdruck liefert,

$$R_\theta(\mathbf{n}) = \mathbb{1} + \Omega\sin\theta + \Omega^2(1-\cos\theta), \tag{5}$$

und dass dessen Matrixelemente Gleichung (1) entsprechen.

Hausaufgabe 5: Separable Differentialgleichung [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E)

(a) Betrachten Sie die Differentialgleichung $y' = -x^2/y^3$ für die Funktion $y(x)$. Finden Sie mittels Trennung der Variablen die Lösung zwei verschiedene Anfangsbedingungen: (i) $y(0) = 1$, und (ii) $y(0) = -1$. [Kontrollergebnis: (i) $y(-1) = \left(\frac{7}{3}\right)^{1/4}$, (ii) $y(-1) = -\left(\frac{7}{3}\right)^{1/4}$.]

(b) Skizzieren Sie in beiden Fällen die gefundene Lösung qualitativ. Überzeugen Sie sich, dass Ihre Skizzen für die gesuchte Funktion $y(x)$ und deren Ableitung $y'(x)$ den durch die Differentialgleichung vorgegebenen Zusammenhang erfüllt.

Hausaufgabe 6: Separation der Variablen: Bakterienpopulation mit Toxin [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[1](E); (d)[1](E)

Eine Bakterienpopulation wird der Wirkung eines Toxins ausgesetzt. Die dadurch bewirkte Todesrate ist proportional zu der Anzahl $n(t)$ der zum Zeitpunkt t noch lebenden Bakterien und der Menge $T(t)$ des zu dieser Zeit vorhandenen Toxins, also insgesamt gleich $\tau n(t)T(t)$, wobei τ eine positive Konstante ist. Andererseits erfolgt die natürliche Vermehrung der Bakterien exponentiell, also mit einer Rate $\gamma n(t)$, wobei $\gamma > 0$. Insgesamt ergibt sich für die Anzahl der Bakterien die Differentialgleichung

$$\dot{n} = \gamma n - \tau n T(t), \quad \text{für } t \ge 0.$$

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung, mit $n(0) = n_0$.

(b) Nehmen Sie nun an, dass das Toxin mit einer konstanten Rate $T(t) = at$ zugeführt wird, wobei $a > 0$. Zeigen Sie mittels einer qualitativen Analyse der Differentialgleichung (d.h. ohne diese explizit zu lösen), dass die Bakterienpopulation bis zur Zeit $t = \gamma/(a\tau)$ noch wachsen, danach aber wieder abnehmen wird. Zeigen Sie außerdem, dass für $t \to \infty$ gilt $n(t) \to 0$, also dass praktisch alle Bakterien vernichtet werden.

(c) Finden Sie nun die explizite Lösung, $n(t)$, der Differentialgleichung und skizzieren sie $n(t)$ qualitativ als Funktion von t. Vergewissern Sie sich, dass die Skizze den durch die Differentialgleichung vorgegebenen Zusammenhang zwischen $n(t)$, $\dot{n}(t)$ und t erfüllt. [Kontrollergebnis: Für $\tau = 1$, $a = 1$, $n_0 = 1$ und $\gamma = \sqrt{\ln 2}$ gilt $n(\sqrt{\ln 2}) = \sqrt{2}$.]

(d) Finden Sie die Zeit t_h, bei der die Population auf die Hälfte ihres Ausgangsbestandes geschrumpft ist. [Kontrollergebnis: Für $\tau = 4$, $a = 2/\ln 2$ und $\gamma = 3$ gilt $t_h = \ln 2$.]

Hausaufgabe 7: Lineare Homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten [2]

Punkte: [2](E).

Lösen Sie folgende Differentialgleichung mittels einem Exponentialansatz:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \cdot \mathbf{x}(t) \,, \qquad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{x}(0) = (1,3)^T \,.$$

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 19]
