Blatt 09: Taylor-Reihen. Differentialgleichungen I

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 2, 3, 5.
Videos existieren für Beispielaufgaben 4 (L8.3.1).

Optionale Aufgabe 1: Integration mittels Partialbruchzerlegung [4]
Punkte: (a)[2](M); (b)[2](M).

Eine Funktion f wird **rationale Funktion** genannt, wenn sie als Quotient $f(x) = P(x)/Q(x)$ zweier Polynome P und Q geschrieben werden kann. Integrale von rationalen Funktionen lassen sich mittels einer **Partialbruchzerlegung** bestimmen, ein Vefahren mittels dem f als Summe eines Polynoms (möglicherweise von Grad 0) und einer oder mehrerer Quotienten von Polynomen mit einfacheren Nennern ausgedrückt wird. Dazu wird der Nenner Q faktorisiert in ein Produkt von Polynomen, q_j, kleineren Grades, $Q(x) = \prod_j q_j(x)$, und die Funktion f in die Form $f(x) = \sum_j p_j(x)/q_j(x)$ gebracht. Dabei ist die Form der Polynome p_j in den Zählern eindeutig durch die Form der Polynome P und q_j festgelegt. (Da eine Partialbruchzerlegung einen Ausdruck mit einem gemeinsamen Nenner umformt in eine Summe von rationalen Funktionen, ist sie in einem gewissen Sinne invers zur Addition rationaler Funktionen durch Bestimmung eines gemeinsamen Nenners.) Wird eine vollständige Faktorisierung von Q benutzt, ergibt sich für $\int \mathrm{d}x\, f(x)$ eine Summe von elementar lösbaren Integralen. Hier wird dieses Methode Anhand von einigen einfachen Beispielen illustriert; für eine systematische Darstellung sei auf Calculus-Lehrbücher verwiesen.

Berechnen Sie folgende Integrale mittels einer Partialbruchzerlegung, für $z \in (0, 2)$:

(a) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \; \frac{3}{(x+1)(x-2)}\,, \qquad \text{(b)} \quad I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \; \frac{3x}{(x+1)^2(x-2)}\,.$$

[Kontrollergebnis: (a) $I(3) = -\ln 8$, (b) $I(3) = -\ln 4 + \frac{3}{4}$.]

Optionale Aufgabe 2: Integration mittels Partialbruchzerlegung [2]
Punkte: (a)[2](M); (b)[2](M,Bonus).

Berechnen Sie folgende Integrale mittels einer Partialbruchzerlegung, für $z \in (0, 1)$:

(a) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \frac{x+2}{x^3 - 3x^2 - x + 3}\,, \qquad \text{(b)} \quad I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \; \frac{4x-1}{(x+2)(x-1)^2}\,.$$

[Kontrollergebnis: (a) $I(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 3$, (b) $I(\frac{1}{2}) = 1 - \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.]

Optionale Aufgabe 3: Relativistische Energiedispersion [1]

Nach der speziellen Relativitätstheorie gilt für Teilchen mit Masse m die folgende Beziehung zwischen Energie E und Impuls p (Dispersionsrelation),

$$E(p) = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2},$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Berechnen Sie die ersten drei nichtverschwindenden Terme der Taylorreihe von $E(p)$ für kleine p, wobei m und c positive Konstanten sind. Welche Terme dieser Entwicklung sind aus der klassischen Mechanik bekannt?
Hinweis: Schreiben Sie $E(p)$ in der Form $E(p) = mc^2\sqrt{1+x}$, mit $x = p^2/(m^2c^2)$, und entwickeln Sie nach x. Drücken Sie x anschließend wieder durch p aus.

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 7]
