Blatt 08: Matrizen III: Unitär, Orthogonal, Diagonalisierung

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 2, 5, 6.
Videos existieren für Beispielaufgaben 2 (L7.3.1), 6 (C4.5.5).

Optionale Aufgabe 1: Trägheitstensor [2]
Punkte: [2](M).

Der Trägheitstensor eines aus Massenpunkten bestehenden starren Körpers ist definiert als

$$\widetilde{I}_{ij} = \sum_a m_a \widetilde{I}_{ij}(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_a) \, , \quad \text{mit} \quad \widetilde{I}_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \delta_{ij} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' - (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r})(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{r}') \, ,$$

wobei m_a und $\mathbf{r}_a = (r^1{}_a, r^2{}_a, r^3{}_a)^T$ die Masse bzw. Position des Massenpunkts a sind. Die Eigenwerte des Trägheitstensors werden seine *Trägheitsmomente* genannt.
Ein starrer Körper bestehe aus drei Massenpunkten mit Massen $m_1 = 4$, $m_2 = M$ und $m_3 = 1$ an den Positionen $\mathbf{r}_1 = (1,0,0)^T$, $\mathbf{r}_2 = (0,1,2)^T$ bzw. $\mathbf{r}_3 = (0,4,1)^T$. Bestimmen Sie dessen Trägheitstensor $\widetilde{I}$ und Trägheitsmomente als Funktionen von M. (Eigenvektoren werden nicht verlangt.) [Kontrollergebnis für $M = 5$: $\lambda_1 = 42$, $\lambda_2 = 39$, $\lambda_3 = 11$.]
Anmerkung: Zur Diagonalisierung des Trägheitstensors ist dieser wie eine Matrix zu behandeln.

Optionale Aufgabe 2: Trägheitstensor [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E).

Ein starrer Körper bestehe aus zwei Massenpunkten mit Massen $m_1 = \frac{2}{3}$ und $m_2 = 3$, die sich an den Punkten $\mathbf{r}_1 = (2,2,-1)^T$ und $\mathbf{r}_2 = \frac{1}{3}(2,-1,2)^T$ befinden.

(a) Zeigen Sie, dass sein Tägheitstensor die Form $\widetilde{I} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ hat.

(b) Bestimmen Sie die Trägheitsmomente (Eigenwerte). (Eigenvektoren werden nicht verlangt.) (*Hinweis:* Ein Eigenwert ist $\lambda = 3$.)

Optionale Aufgabe 3: Determinante einer Dreiecksmatrix [2]

Zeigen Sie, dass die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix das Produkt ihrer Diagonalelemente ist, also

$$\det \begin{pmatrix} a^1{}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & 0 & \dots & 0 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a^n{}_1 & a^n{}_2 & \dots & & a^n{}_n \end{pmatrix}$$

Weshalb gilt für eine obere Dreiecksmatrix dasselbe?

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 6]
