https://moodle.lmu.de → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 07: Matrizen II: Inverse, Basistransformation

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 2, 3, 4, 6.
Videos existieren für Beispielaufgaben 1 (L5.4.1), 5 (V2.5.1). Siehe auch Tutorvideos zu "Basistransformationen".

Optionale Aufgabe 1: Lineare Abbildungen und Basistransformationen in $\mathbb{R}^3$ [6]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](E); (c)[1](E); (d)[1](M); (e)[1](M); (f)[1](M)

Betrachen Sie die folgenden drei Basistransformationen in $\mathbb{R}^3$, mit Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

A : Rotation um die 3-Achse um den Winkel $\theta_3 = \frac{\pi}{4}$, in die rechtshändig positive Richtung. *Hinweis:* Benutzen Sie die Kompaktnotation $\cos\theta_3 = \sin\theta_3 = s$.

B : Streckung der 1-Achse um den Faktor $s_1 = 3$;

C : Rotation um die 2-Achse um den Winkel $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, in die rechtshändig positive Richtung.

Hinweis: 'Rechtshändig positiv' bedeutet: wenn die rechte Hand die Drehachse umklammert und der Daumen entlang ihrer positiven Richtung zeigt, dann zeigen die anderen Finger in die Richtung positiver Drehwinkel.

(a) Finden Sie die Matrixdarstellungen (bezüglich der Standardbasis) von A, B, C.

(b) Was ist das Bild, $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$, des Vektors $\mathbf{x} = (1,1,1)^T$ unter der Streckung B?

(c) Was ist das Bild, $\mathbf{z} = D\mathbf{x}$, von $\mathbf{x}$ unter der Verknüpfung aller drei Abbildungen, $D = C \cdot B \cdot A$? [Kontrollergebnis: $z^2 = \sqrt{2}$.]

(d) Betrachten Sie nun eine neue Basis $\{\mathbf{e}'_i\}$, definiert durch eine Rotation der Standardbasis mittels A, d.h. $\mathbf{e}_j \overset{A}{\mapsto} \mathbf{e}'_j$. Skizzieren Sie die alten und neuen Basisvektoren in derselben Skizze. Finden Sie die Transformationsmatrix $T = \{T^i{}_j\}$, deren Matrixelemente den Bezug zwischen der alten und der rotierten Basis angeben, mit $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}'_i T^i{}_j$.

(e) In der $\{\mathbf{e}'_i\}$-Basis lassen sich die obigen Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ darstellen als $\mathbf{x} = \mathbf{e}'_i x'^i$ und $\mathbf{y} = \mathbf{e}'_i y'^i$. Finden Sie die entsprechenden Komponenten $\mathbf{x}' = (x'^1, x'^2, x'^3)^T$ und $\mathbf{y}' = (y'^1, y'^2, y'^3)^T$. [Kontrollergebnis: $x'^1 = \sqrt{2}$, $y'^3 = 1$.]

(f) B' sei die Darstellung der Streckung B in der rotierten Basis. Finden Sie B' durch entsprechende Transformation der Matrix B, und nutzen Sie das Ergebnis, um das Bild $\mathbf{y}'$ von $\mathbf{x}'$ unter B' zu berechnen. [Stimmt das Ergebnis mit dem aus (e) überein?]

Optionale Aufgabe 2: Lineare Abbildungen und Basistransformationen in $\mathbb{R}^3$ [6]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](E); (c)[1](E); (d)[1](M); (e)[1](M); (f)[1](M)

Betrachen Sie die folgenden drei linearen Abbildungen in $\mathbb{R}^3$, mit Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$A:$ Rotation um die 1-Achse um den Winkel $\theta_1 = -\frac{\pi}{3}$ bezüglich der rechtshändigen Richtung, d.h. eine Linksdrehung. *Hinweis:* Benutzen Sie die Kompaktnotation $\cos\theta_1 = c$, $\sin\theta_1 = s$.

$B:$ Streckung der Achsen 1 und 2, mit den Faktoren $s_1 = 2$ bzw. $s_2 = 4$.

$C:$ Spiegelung in der 23-Ebene.

(a) Finden Sie die Matrixdarstellungen (bezüglich der Standardbasis) von A, B, C. Welche dieser Abbildungen kommutieren miteinander (d.h., für welche gilt $M_1 M_2 = M_2 M_1$)?

(b) Was ist das Bild $\mathbf{y} = CA\mathbf{x}$ des Vektors $\mathbf{x} = (1,1,1)^T$ unter der Abbildung CA?

(c) Finden Sie den Vektor $\mathbf{z}$, der unter der Verknüpfung aller drei Abbildungen, $D = C \cdot B \cdot A$, auf $\mathbf{y}$ abgebildet wird. [Hinweis: $D^{-1} = A^{-1}B^{-1}C^{-1}$.] [Kontrollergebnis: $z^3 = \frac{1}{16}(7 - 3\sqrt{3})$.]

(d) Betrachten Sie nun eine neue Basis $\{\mathbf{e}'_i\}$, die durch Rotation und Spiegelung mittels CA auf die Standardbasis abgebildet wird, $\mathbf{e}'_i \overset{CA}{\mapsto} \mathbf{e}_i$. [*Achtung:* in der Beispielaufgabe war es umgekehrt!] Skizzieren Sie die alten und neuen Basisvektoren in derselben Skizze. [*Achtung:* Die neuen Basisvektoren bilden ein Linkssystem! Warum?] Finden Sie die Transformationsmatrix T, deren Matrixelemente den Bezug zwischen der alten und der neuen Basis angeben, mit $\mathbf{e}_j = \mathbf{e}'_i T^i{}_j$.

(e) In der $\{\mathbf{e}'_i\}$-Basis lassen sich die obigen Vektoren $\mathbf{z}$ und $\mathbf{y}$ darstellen als $\mathbf{z} = \mathbf{e}'_i z'^i$ und $\mathbf{y} = \mathbf{e}'_i y'^i$. Finden Sie die entsprechenden Komponenten $\mathbf{z}' = (z'^1, z'^2, z'^3)^T$ und $\mathbf{y}' = (y'^1, y'^2, y'^3)^T$. [Kontrollergebnis: $z'^3 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})$, $y'^2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3})$.]

(f) D' sei die Darstellung von D in der neuen Basis. Finden Sie D' durch entsprechende Transformation der Matrix D, und nutzen Sie das Ergebnis, um das Bild $\mathbf{y}'$ von $\mathbf{z}'$ unter D' zu berechnen. [Stimmt das Ergebnis mit dem aus (e) überein?].

Optionale Aufgabe 3: Matrixinversion [Bonus]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[1](E)

Eine $n \times n$-Matrix M_n sei definiert durch $(M_n)^i{}_j = \delta^i_j m + \delta^1{}_j$ mit $i, j = 1, \ldots, n$, und $m \in \mathbb{R}$, $m \notin \{0, -1\}$.

(a) Finden Sie die inversen Matrizen M_2^{-1} und M_3^{-1}. Verifizieren Sie in beiden Fällen, dass $M_n^{-1} M_n = \mathbb{1}$ gilt.

(b) Formulieren Sie anhand der Ergebnisse von (a) einen Ansatz für die Form der inversen Matrix M_n^{-1} für ein allgemeines n. Überprüfen Sie diesen durch Berechnung von $M_n^{-1} M_n$.

(c) Geben Sie eine kompakte Formel für die Matrixelemente $(M_n^{-1})^i{}_j$ an, und zeigen Sie, dass $\sum_l (M_n^{-1})^i{}_l (M_n)^l{}_j = \delta^i{}_j$, indem Sie die l-Summe explizit ausführen.

Optionale Aufgabe 4: Matrixinversion [Bonus]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[1](E)

M_n sei eine $n \times n$-Matrix M_n mit Matrixelementen $(M_n)^i{}_j = m\,\delta^i_j + \delta^{i+1}{}_j$, mit $i, j = 1, \ldots, n$, und $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

(a) Finden Sie die inversen Matrizen M_2^{-1} und M_3^{-1}. Verifizieren Sie in beiden Fällen, dass $M_n^{-1}M_n = \mathbb{1}$ gilt.

(b) Formulieren Sie anhand der Ergebnisse von (a) eine Vermutung für die Form der inversen Matrix M_n^{-1} für ein allgemeines n. Überprüfen Sie diese durch Berechnung von $M_n^{-1}M_n$.

(c) Geben Sie eine kompakte Formel für die Matrixelemente $(M_n^{-1})^i_{\ j}$ an, und zeigen Sie, dass $\sum_l (M_n^{-1})^i_{\ l}(M_n)^l_{\ j} = \delta^i_{\ j}$, indem Sie die l-Summe explizit ausführen.

Optionale Aufgabe 5: Lorentz-Transformation [5]
Punkte: (a)[1](M); (b)[2](M); (c)[2](M)

(a) In einem zweidimensionalen euklidischen Raum ist das Intervall zwischen zwei Punkten $\mathbf{P}_1 = (x^1, y^1)$ und $\mathbf{P}_2 = (x^2, y^2)$ gegeben durch $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ mit $\Delta x = x^2 - x^1$, $\Delta y = y^2 - y^1$. Zeigen Sie, dass eine Drehung $R(\varphi)$ der folgenden Form das Intervall Δs^2 invariant (d.h. unverändert) lässt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(b) In einem zweidimensionalen Minkowski-Raum ist das Invervall zwischen zwei Ereignissen $\mathbf{P}_1 = (ct^1, x^1)$ und $\mathbf{P}_2 = (ct^2, x^2)$ gegeben durch $\Delta s^2 = \Delta(ct)^2 - \Delta x^2$. Zeigen Sie, dass eine Pseudodrehung $\Lambda(\vartheta)$ der folgenden Form das Intervall Δs^2 invariant lässt:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda(\vartheta) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\vartheta & \sinh\vartheta \\ \sinh\vartheta & \cosh\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Hinweis: $\cosh^2\vartheta - \sinh^2\vartheta = 1$.

(c) Die Lorentz-Transformationen, die Sie aus der Experimentalphysik-Vorlesung kennen, können mit $\beta = v/c$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ in folgender Matrixform geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \tilde{\Lambda}(v) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass diese Form einer Pseudodrehung entspricht, dass also die Matrix $\tilde{\Lambda}(v)$ dieselbe Form wie die Matrix $\Lambda(\vartheta)$ aus Teilaufgabe (b) hat. Was ist der Zusammenhang zwischen ϑ und v?

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 17]
