



<https://moodle.lmu.de> → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 06: Felder II. Matrizen I

Ausgabe: Mo 21.11.22 Zentralübung: Do 24.11.22 Abgabe: Do 01.12.22, 14:00

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 4, 5(bii), 1.
Videos existieren für Beispielaufgaben 1 (V3.4.1), 5 (V3.7.3).

Beispielaufgabe 1: Potential eines Vektorfeldes [5]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[1](E);(e)[1](M)

Gegeben sei ein Vektorfeld, $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2)^T$.

- Berechnen Sie das Linienintegral $I_1 = \int_{\gamma_1} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})$ von $\mathbf{0} = (0, 0, 0)^T$ bis $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$, entlang des Weges $\gamma_1 = \{\mathbf{r}(t) = (t, t, t)^T \mid 0 < t < 1\}$.
- Hängt das Linienintegral von der Form des Weges ab?
- Berechnen Sie das Potential $\varphi(\mathbf{r})$ des Vektorfeldes $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, mittels dem Linienintegral, $\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\gamma_r} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})$, entlang eines geeignet parametrisierten Weges γ_r von $\mathbf{0}$ nach $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$.
- Konsistenzcheck: Überprüfen Sie explizit, dass Ihr Ergebnis für $\varphi(\mathbf{r})$ die Gleichung $\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ erfüllt.
- Berechnen Sie jetzt das Integral I_1 aus Aufgabenteil (a) über das Vektorfeld als Differenz des Potentials $\varphi(\mathbf{r})$ (der Stammfunktion!) an den Integrationsgrenzen \mathbf{b} und $\mathbf{0}$. Konsistenzcheck: bekommen Sie dasselbe Ergebnis wie in Aufgabenteil (a)?

Beispielaufgabe 2: Divergenz [1]

Punkte: (a)[E](0,5), (b)[E](0,5).

- Berechnen Sie die Divergenz, $\nabla \cdot \mathbf{u}$, des Vektorfeldes $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (xyz, y^2, z^3)^T$.
[Kontrollergebnis: für $\mathbf{r} = (1, 1, 1)^T$ ist $\nabla \cdot \mathbf{u} = 6$.]
- $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ sei ein konstanter Vektor und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{r} \mapsto f(r)$ eine skalare Funktion von $r = \|\mathbf{r}\|$. Zeigen Sie, dass

$$\nabla \cdot [\mathbf{a}f(r)] = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r} f'(r).$$

Faustregel: ∇ angewendet auf $f(r)$ erzeugt $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ mal die Ableitung $f'(r)$.

Beispielaufgabe 3: Rotation [1]

Punkte: (a)[E](0,5), (b)[E](0,5).

(a) Berechnen Sie die Rotation, $\nabla \times \mathbf{u}$, des Vektorfelds $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (xyz, y^2, z^2)^T$.
 [Kontrollergebnis: für $\mathbf{r} = (3, 2, 1)^T$ ist $\nabla \times \mathbf{u} = (0, 6, -3)^T$.]

(b) $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ sei ein konstanter Vektor und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{r} \mapsto f(r)$ eine skalare Funktion von $r = \|\mathbf{r}\|$. Zeigen Sie, dass

$$\nabla \times [\mathbf{a}f(r)] = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{a}}{r} f'(r).$$

Faustregel: ∇ angewendet auf $f(r)$ erzeugt $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ mal die Ableitung $f'(r)$.

Beispielaufgabe 4: Rotation eines Gradientenfelds [1]

Punkte: [1](M)

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei ein glattes Skalarfeld. Zeigen Sie, dass die Rotation des Gradienten verschwindet:

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Empfehlung: Nutzen Sie kartesische Koordinaten, für die kontra- und kovariante Komponenten gleich sind, $\partial^i = \partial_i$, und schreiben Sie alle Indizes unten.

Beispielaufgabe 5: Nabla-Identitäten [7]

Punkte: (a)[2](E); (b)[2](M); (c)[3](E)

(a) Gegeben seien die Skalarfelder $f(x, y, z) = ze^{-x^2}$ und $g(x, y, z) = yz^{-1}$, sowie die Vektorfelder $\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{e}_x x^2 y$ und $\mathbf{w}(x, y, z) = (x^2 + y^3)\mathbf{e}_x$. Berechnen Sie ∇f , ∇g , $\nabla^2 f$, $\nabla^2 g$, $\nabla \cdot \mathbf{u}$, $\nabla \times \mathbf{u}$, $\nabla \cdot \mathbf{w}$, $\nabla \times \mathbf{w}$. [Kontrollergebnis: am Punkt $(x, y, z)^T = (1, 1, 1)^T$ gilt: $\nabla f = (-2e^{-1}, 0, e^{-1})^T$, $\nabla g = (0, 1, -1)^T$, $\nabla^2 f = \frac{2}{e}$, $\nabla^2 g = 2$, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 2$, $\nabla \times \mathbf{u} = -\mathbf{e}_z$, $\nabla \cdot \mathbf{w} = 2$, $\nabla \times \mathbf{w} = -3\mathbf{e}_z$.]

(b) Beweisen Sie folgende Identitäten für *allgemeine* glatte Skalar- und Vektorfelder $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ und $\mathbf{u}(x, y, z)$, $\mathbf{w}(x, y, z)$. Stellen Sie \mathbf{u} , \mathbf{w} und ∇ *nicht* als Spaltenvektoren dar; nutzen Sie stattdessen Indexnotation. *Empfehlung:* Nutzen Sie kartesische Koordinaten und schreiben Sie alle Indizes unten.

(i) $\nabla (fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(ii) $\nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}$

(iii) $\nabla \cdot (f\mathbf{u}) = f(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot (\nabla f)$

(c) Überprüfen Sie die Identitäten aus (b) explizit für die Felder aus (a).

[Kontrollergebnis: am Punkt $(x, y, z)^T = (1, -1, 1)^T$ gilt: $\nabla (fg) = e^{-1}(2, 1, 0)^T$, $\nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) = (-2, -3, 0)^T$, $\nabla \cdot (f\mathbf{u}) = 0$.]

Beispielaufgabe 6: Linienintegral: Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters [4]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[1](M); (d)[1](E)

Diese Aufgabe illustriert, dass aus $\partial_i B^j - \partial_j B^i = 0$ nicht notwendigerweise auch $\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = 0$ folgt.

Das Magnetfeld eines unendlich langen stromdurchflossenen Leiters hat die Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{c}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\partial_i B^j - \partial_j B^i = 0$ gilt, falls $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$.
- (b) Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma_K] = \int_{\gamma_K} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$ für den geschlossenen Weg entlang dem Kreis K mit Radius R um den Ursprung, $\gamma_K = \{\mathbf{r}(t) = R(\cos t, \sin t, 0)^T | t \in [0, 2\pi]\}$.
- (c) Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma_R] = \int_{\gamma_R} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$ für den geschlossenen Weg γ_R entlang den Kanten des Rechtecks mit Eckpunkten $(1, 0, 0)^T$, $(2, 0, 0)^T$, $(2, 3, 0)^T$ und $(1, 3, 0)^T$.
- (d) Inwiefern sind die Ergebnisse aus (a) bis (c) miteinander konsistent? Erläutern Sie!

Beispielaufgabe 7: Vektorfelder skizzieren [Bonus]

Punkte: (a)[1](M,Bonus); (b)[1](M,Bonus)

Skizzieren Sie folgende Vektorfelder in zwei Dimensionen, mit $\mathbf{r} = (x, y)^T$:

- (a) $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\cos y, 0)^T$.
- (b) $\mathbf{w} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{w}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, -y)^T$.

Die Skizze sollte für einige ausgewählte Punkte \mathbf{r} aus der Definitionsmenge der Vektorfeldabbildung (z.B. \mathbf{u}) die entsprechenden $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ -Vektoren aus der Bildmenge der Abbildung zeigen. Dazu wird für einen ausgewählten Punkt \mathbf{r} ein Pfeil mit Mittelpunkt bei \mathbf{r} gemalt, dessen Richtung und Länge den Vektor $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ darstellen. Für Vektoren, \mathbf{r} , aus der Definitionsmenge und Vektoren, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, aus der Bildmenge können *verschiedene* Längeneinheiten benutzt werden, um Pfeilüberlappungen zu vermeiden und somit die Übersichtlichkeit der Skizze zu verbessern (z.B. indem $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r})$ -Einheitsvektoren kürzer gezeichnet werden als $\hat{\mathbf{r}}$ -Einheitsvektoren). Für die visuelle Darstellung von Bildvektoren sind ohnehin meist nur deren Richtungen und *relativen* Längen von Interesse, nicht die absoluten Längen.

Beispielaufgabe 8: Matrixmultiplikation [2]

Punkte: [2](E)

Berechnen Sie alle möglichen Produkte von Paaren der folgenden Matrizen (inklusive deren Quadrate, wo möglich):

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

[Kontrollergebnis: die Summe aller Elemente der ersten Spalte folgender Matrixprodukte lautet: $\sum_i (PQ)^i_1 = 14$, $\sum_i (PR)^i_1 = 14$, $\sum_i (QR)^i_1 = 16$, $\sum_i (RP)^i_1 = 12$, $\sum_i (QQ)^i_1 = 16$.]

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 21]

Hausaufgabe 1: Linienintegral eines Vektorfeldes [2]

Punkte: [2](M)

Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma] = \int_{\gamma} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$ des drei-dimensionalen Vektorfeldes $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (xe^{yz}, ye^{xz}, ze^{xy})^T$ entlang der geraden Strecke γ vom Punkt $\mathbf{0} = (0, 0, 0)^T$ zum Punkt $\mathbf{b} = b(1, 2, 1)^T$, mit $b \in \mathbb{R}$. [Kontrollergebnis: für $b^2 = \ln 2$ ist $W[\gamma] = 7/2$.] Hängt das Linienintegral vom Weg ab?

Hausaufgabe 2: Divergenz [1]

Punkte: (a)[E](0,5), (b)[E](0,5).

(a) Berechnen Sie die Divergenz, $\nabla \cdot \mathbf{u}$, des Vektorfelds

$$\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (xyz, z^2y^2, z^3y)^T.$$

[Kontrollergebnis: für $\mathbf{r} = (1, 1, 1)^T$ ist $\nabla \cdot \mathbf{u} = 6$.]

(b) \mathbf{a} und \mathbf{b} seien konstante Vektoren aus \mathbb{R}^3 . Zeigen Sie, dass $\nabla \cdot [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{b}] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Faustregel: ∇ 'vernichtet' das \mathbf{r} so, dass ein sinnvolles Skalarprodukt übrig bleibt.

Hausaufgabe 3: Rotation [1]

Punkte: (a)[E](0,5), (b)[E](0,5).

(a) Berechnen Sie die Rotation, $\nabla \times \mathbf{u}$, des Vektorfelds $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = (xyz, y^2z^2, xyz^3)^T$.

[Kontrollergebnis: für $\mathbf{r} = (3, 2, 1)^T$ ist $\nabla \times \mathbf{u} = (-5, 4, -3)^T$.

(b) \mathbf{a} und \mathbf{b} seien konstante Vektoren aus \mathbb{R}^3 . Zeigen Sie, dass $\nabla \times [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Faustregel: ∇ 'vernichtet' das \mathbf{r} so, dass ein sinnvolles Kreuzprodukt übrig bleibt.

Hausaufgabe 4: Ableitungen von Wirbelfeldern [1]

Punkte: (a)[1](M), (b)[0,5](M,Bonus), (c)[0,5](E,Bonus).

$\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei ein glattes Vektorfeld. Beweisen Sie folgende Identitäten:

(a) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$. (b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$.

Empfehlung: Nutzen Sie kartesische Koordinaten und schreiben Sie alle Indizes unten.

(c) Prüfen Sie beide Identitäten für das Vektorfeld $\mathbf{u}(x, y, z) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)^T$.

Hausaufgabe 5: Nabla-Identitäten [5]

Punkte: (a)[2](E); (bi,ii)[2](M); (biii)[0,5](M,Bonus); (ci,ii)[1](E); (ciii)[0,5](E,Bonus).

(a) Gegeben seien das Skalarfeld $f(x, y, z) = y^{-1} \cos(z)$ und die Vektorfelder $\mathbf{u}(x, y, z) = (-y, x, z^2)^T$ und $\mathbf{w}(x, y, z) = (x, 0, 1)^T$. Berechnen Sie ∇f , $\nabla^2 f$, $\nabla \cdot \mathbf{u}$, $\nabla \times \mathbf{u}$, $\nabla \cdot \mathbf{w}$, $\nabla \times \mathbf{w}$. [Kontrollergebnis: am Punkt $(x, y, z)^T = (1, 1, 0)^T$ gilt: $\nabla f = -\mathbf{e}_y$, $\nabla^2 f = 1$, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, $\nabla \times \mathbf{u} = 2\mathbf{e}_z$, $\nabla \cdot \mathbf{w} = 1$, $\nabla \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$.]

(b) Beweisen Sie folgende Identitäten für *allgemeine* glatte Skalar- und Vektorfelder $f(x, y, z)$, $\mathbf{u}(x, y, z)$ und $\mathbf{w}(x, y, z)$. Stellen Sie \mathbf{u} , \mathbf{w} und ∇ *nicht* als Spaltenvektoren dar; nutzen Sie stattdessen Indexnotation. *Empfehlung*: Nutzen Sie kartesische Koordinaten und schreiben Sie alle Indizes unten.

$$(i) \quad \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{w})$$

$$(ii) \quad \nabla \times (f\mathbf{u}) = f(\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla f)$$

$$(iii) \quad \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

(c) Überprüfen Sie die Identitäten aus (b) explizit für die Felder aus (a).

[Kontrollergebnis: am Punkt $(x, y, z)^T = (1, 1, 0)^T$ gilt: $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = 2$, $\nabla \times (f\mathbf{u}) = (0, 0, 1)^T$, $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = (0, 2, 0)^T$.]

Hausaufgabe 6: Linienintegral eines Vektorfelds auf einem nicht-einfachzusammenhängenden Definitionsbereich [3]

Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M); (c)[2](A,Bonus)

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} -yx^n \\ x^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welchen Wert des Exponenten n gilt $\partial_i B^j - \partial_j B^i = 0$, falls $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$?

Benutzen Sie im Folgenden den in (a) gefundenen Wert von n .

(b) Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma_K] = \oint_{\gamma_K} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{B}$ für den geschlossenen Weg entlang dem Kreis K mit Radius R um den Ursprung, $\gamma_K = \{\mathbf{r}(t) = R(\cos t, \sin t, 0)^T | t \in [0, 2\pi]\}$.

(c) Was ist der Wert des Linienintegrals $W[\gamma_D] = \oint_{\gamma_D} \mathbf{dr} \cdot \mathbf{B}$ für den geschlossenen Weg γ_D entlang den Kanten des Dreiecks mit Eckpunkten $(-1, -1, 0)^T$, $(1, -1, 0)^T$ und $(a, 1, 0)^T$, mit $a \in \mathbb{R}$? Skizzieren Sie das Ergebnis als Funktion von $a \in [-2, 2]$. *Hinweis*: Das Ergebnis kann ohne weitere Rechnung hingeschrieben werden, sollte aber begründet werden.

Hausaufgabe 7: Vektorfelder skizzieren [Bonus]

Punkte: (a)[1](M,Bonus); (b)[1](M,Bonus)

Skizzieren Sie folgende Vektorfelder in zwei Dimensionen, mit $\mathbf{r} = (x, y)^T$:

$$(a) \quad \mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{r}) = (\cos x, 0)^T.$$

$$(b) \quad \mathbf{w} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r} \mapsto \mathbf{w}(\mathbf{r}) = (2y, -x)^T.$$

Hausaufgabe 8: Matrixmultiplikation [2]

Punkte: [2](M)

Berechnen Sie alle möglichen Produkte von Paaren der folgenden Matrizen (inklusive deren Quadrate, wo möglich):

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & 7 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

[Kontrollergebnis: die Summe aller Elemente der ersten Spalte folgender Matrixprodukte lautet: $\sum_i (PQ)_1^i = 25$, $\sum_i (PR)_1^i = -44$, $\sum_i (RQ)_1^i = -5$, $\sum_i (RR)_1^i = 8$.]

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 15]
