Blatt 05: Mehrdimensionales Integrieren II. Felder I

Ausgabe: Mo 14.11.22 Zentralübung: Do 17.11.22 Abgabe: Do 24.11.22, 14:00
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 2, 4, 7, 5.
Videos existieren für Beispielaufgaben 2 (C4.2.1).

Beispielaufgabe 1: Gauß-Integrale [3]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M); (c)[1](M)

(a) Zeigen Sie, dass das zweidimensionale Gauß-Integral $I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ den Wert $I = \pi$ hat. *Hinweis:* nutzen Sie Polarkoordinaten; das radiale Integral lässt sich mittels Substitution lösen.

(b) Berechnen Sie nun das eindimensionale Gauß-Integral

$$I_0(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ax^2} \quad (a \in \mathbb{R},\ a > 0).$$

Hinweis: $I = [I_0(1)]^2$. Erklären Sie, warum! [Ergebniskontrolle: $I_0(\pi) = 1$.]

(c) Berechnen Sie das eindimensionale Gauß-Integral mit linearem Term im Exponenten:

$$I_1(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-ax^2+bx} \quad (a, b \in \mathbb{R}, a > 0).$$

Hinweis: Schreiben Sie den Exponenten in die Form $-ax^2 + bx = -a(x - C)^2 + D$ (dies wird **quadratische Ergänzung** genannt), substituieren Sie dann $y = x - C$, und nutzen Sie das Ergebnis aus (b). [Ergebniskontrolle: $I_1(1, 2) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}$.]

Beispielaufgabe 2: Fläche einer Ellipse (verallgemeinerte Polarkoordinaten) [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](E)

(a) Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und zwei positive reelle Zahlen a, b. Betrachten Sie das zwei-dimensionale Integral von $f\big((x/a)^2 + (y/b)^2\big)$ über alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es sich schreiben lässt als

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, f\big((x/a)^2 + (y/b)^2\big) = 2\pi ab \int_0^{\infty} \mathrm{d}\mu\, \mu\, f(\mu^2)\ ,$$

mittels einer Transformation von kartesischen zu verallgemeinerten Polarkoordinaten, definiert durch:

$$x = \mu a \cos\phi, \qquad y = \mu b \sin\phi\ ,$$

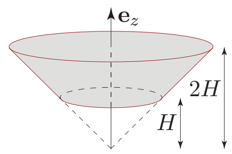
$$\mu^2 = (x/a)^2 + (y/b)^2, \qquad \phi = \arctan(ay/bx)\ .$$

Hinweis: Für $a = b = 1$ entsprechen sie Polarkoordinaten. Für $a \neq b$ ist die lokale Basis *nicht* orthogonal!

(b) Berechnen Sie, durch geeignete Wahl der Funktion f, die Fläche einer Ellipse mit Halbachsen a und b, definiert durch $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$.

Beispielaufgabe 3: Volumen und Trägheitsmoment (Zylinderkoordinaten) [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E)

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers bezüglich einer Drehachse ist definiert als $I = \int_V \mathrm{d}V\, \rho_0(\mathbf{r}) d_\perp^2(\mathbf{r})$, wobei $\rho_0(\mathbf{r})$ die Dichte am Punkt $\mathbf{r}$ ist, und $d_\perp(\mathbf{r})$ der senkrechte Abstand von $\mathbf{r}$ zur Drehachse.



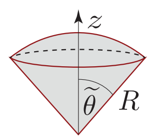
$K = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, H \leq z \leq 2H, \sqrt{x^2+y^2} \leq az\}$ sei ein homogener, auf der z-Achse zentrierten Kegelstumpf (Kegel ohne Spitze). Berechnen Sie in Zylinderkoordinaten

(a) sein Volumen, $V_K(a)$, und

(b) sein Trägheitsmoment, $I_K(a)$, bezüglich der z-Achse,

als Funktionen des dimensionslosen, positiven Skalenfaktors a, des Längenparameters H, und der Masse M des Kegelstumpfs. [Kontrollergebnisse: $V_K(3) = 21\pi H^3$, $I_K(1) = \frac{93\pi}{70} MH^2$.]

Beispielaufgabe 4: Volumen einer Boje (Kugelkoordinaten) [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M)



Betrachten Sie eine Boje, mit Spitze am Ursprung, die von oben begrenzt wird durch eine am Ursprung zentrierte Kugel, mit $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, und von unten durch einen Kegel, mit Spitze am Ursprung, mit $z \geq a\sqrt{(x^2+y^2)}$.

(a) Zeigen Sie, dass der halbe Öffnungswinkel des Kegels durch $\widetilde{\theta} = \arctan(1/a)$ gegeben ist.

(b) Berechnen Sie mittels Kugelkoordinaten das Volumen $V(R, a)$ der Boje als Funktion von R und a. [Kontrollergebnis: $V(2, \sqrt{3}) = (16\pi/3)(1 - \sqrt{3}/2)$.]

Beispielaufgabe 5: Flächenintegral: Fläche einer Sphäre [3]
Punkte: (a)[2](M); (b)[1](E)

Betrachten Sie eine Sphäre (=Kugeloberfläche) S mit Radius R. Berechnen Sie ihre Fläche, A_S, mittels (a) kartesichen Koordinaten und (b) Kugelkoordinaten, wie folgt:

(a) Wählen Sie kartesische Koordinaten, mit Ursprung im Zentrum der Sphäre. Deren Fläche ist doppelt so groß wie die der Halbsphäre S_+ oberhalb der xy-Ebene. S_+ kann durch

$$\mathbf{r} : D \to S_+, \qquad (x, y)^T \mapsto \mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})^T,$$

parametrisiert werden, wobei $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < R^2\}$ eine Scheibe mit Radius R ist. Berechnen Sie mittels dieser Parametrisierung die Fläche der Sphäre als $A_S = 2\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, \|\partial_x \mathbf{r} \times \partial_y \mathbf{r}\|$.

(b) Wählen Sie nun Kugelkoordinaten, mit folgender Parametrisierung der Sphäre,

$$\mathbf{r} : U \to S, \qquad (\theta, \phi)^T \mapsto \mathbf{r}(\theta, \phi) = R(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)^T,$$

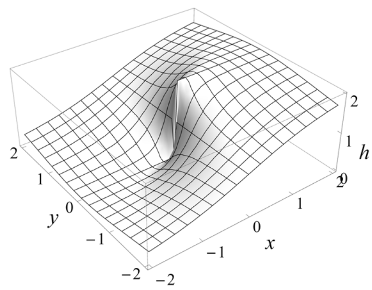
wobei $U = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Berechnen Sie ihre Fläche mittels $A_S = \int_U \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \, \|\partial_\theta \mathbf{r} \times \partial_\phi \mathbf{r}\|$.

Beispielaufgabe 6: Gradient von $\ln(1/r)$ [1]
Punkte: [1](E)

Gegeben ist das Skalarfeld $\varphi(\mathbf{r}) = \ln(r^{-1})$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. In welchen Punkten im Raum gilt $\|\boldsymbol{\nabla}\varphi\| = 1$?

Beispielaufgabe 7: Gradient einer Bergflanke [4]
Punkte: (a-h)[je 0.5](M)

Ein Wanderer trifft auf die in der Figur dargestellte Bergflanke, deren Höhe $h(\mathbf{r})$ durch $h(\mathbf{r}) = \frac{x}{r} + 1$ beschrieben wird, mit $\mathbf{r} = (x, y)^T$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Beschreiben Sie deren Topografie anhand folgender Fragen (unter Bezugnahme auf die Eigenschaften des Gradientenvektors $\boldsymbol{\nabla} h_{\mathbf{r}}$):



(a) Berechnen Sie den Gradienten, $\boldsymbol{\nabla} h_{\mathbf{r}}$, und das totale Differential, $\mathrm{d}h_{\mathbf{r}}(\mathbf{n})$, für den Vektor $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$.

(b) Der Wanderer steht am Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$. In welche Richtung steigt der Hang am steilsten an?

(c) In welche Richtung verlaufen hier die Konturlinien?

(d) Skizzieren Sie einen Konturplot der Bergflanke, auf dem zusätzlich die Gradientenvektoren $\boldsymbol{\nabla} h_{\mathbf{r}}$ an den Punkten $\mathbf{r}_1 = (-1, 1)^T$, $\mathbf{r}_2 = (0, \sqrt{2})^T$ und $\mathbf{r}_3 = (1, 1)^T$ eingezeichnet sind.

(e) Gibt es im positiven Quadranten $(x, y \geq 0)$ eine Konturlinie, für die $x = y$? Wenn ja, auf welcher Höhe liegt sie?

(f) Finden Sie eine Gleichung für die Konturlinie auf Höhe $h(\mathbf{r}) = H$ im positiven Quadranten $(x, y \geq 0)$.

(g) Wo ist die Bergflanke am wenigsten steil? Was ist ihre Höhe dort?

(h) Wo ist sie am steilsten? Beschreiben Sie detailliert, wie die Topographie in der Nähe dieses Punktes von x und y abhängt.

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 17]

Hausaufgabe 1: Gauß-Integrale [3]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M); (c)[1](M)

Berechnen Sie folgende Gauß-Integrale:

(a) $I_1(c) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-3(x+c)x}$

(b) $I_2(c) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(x^2+3x+\frac{c}{4}\right)}$

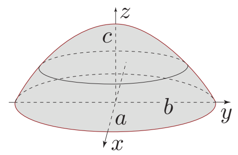
(c) $I_3(c) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-2(x+3)(x-c)}$

[Ergebniskontrolle: $I_1(2) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^3$, $I_2(1) = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}$, $I_3(-3) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.]

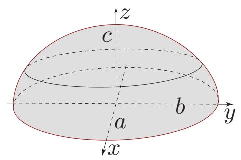
Hausaufgabe 2: Flächenintegral für Volumen (verallgemeinerte Polarkoordinaten) [2]
Punkte: (a)[2](M); (b)[2](M,Bonus); (c)[0](A,Optional)

Nutzen Sie im Folgenden verallgemeinerte Polarkoordinaten in zwei Dimensionen, definiert durch $x = \mu a \cos\phi$, $y = \mu b \sin\phi$, mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$. Berechnen Sie das Volumen $V(a, b, c)$ folgender Körper Z, E und K, als Funktion der Längenparameter a, b und c.

(a) Z ist ein Zelt mit ellipsförmigem Boden, mit Halbachsen a und b. Sein Dach wird durch die Höhenfunktion $h_Z(x, y) = c\big[1-(x/a)^2-(y/b)^2\big]$ beschrieben.



(b) E ist eine Ellipsoide mit Halbachsen a, b und c, definiert durch $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \leq 1$.



(c) K ist ein Kegel mit Höhe c und ellipsförmiger Basis, mit Halbachsen a und b. Alle Querschnitte parallel zur Basis sind ebenfalls ellipsförmig. *Hinweis:* Ergänzen Sie die verallgemeinerten Polarkoordinaten um eine weitere Koordinate, z (analog zum Übergang von Polar- zu Zylinderkoordinaten).

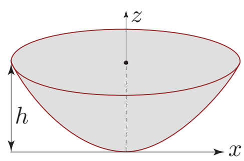
[Kontrollergebnisse für $a = 1/\pi$, $b = 2$, $c = 3$: (a) $V_Z = 3$, (b) $V_E = 8$, (c) $V_K = 2$.]

Hausaufgabe 3: Volumen und Trägheitsmoment (Zylinderkoordinaten) [4]
Punkte: (a)[0](M,Optional); (b)[4](M); (c)[3](A,Bonus)

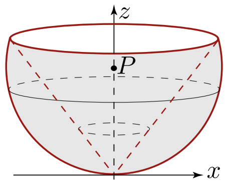
Betrachten Sie die unten beschriebenen homogenen, starren Körper Z, P und S, alle mit Dichte ρ_0. Berechnen Sie mittels Zylinderkoordinaten für jeden das Volumen, $V(a)$, und das Trägheitsmoment, $I(a) = \rho_0 \int_V \mathrm{d}V \, d_\perp^2$, bezüglich der Symmetrieachse, als Funktionen des dimensionslosen, positiven Skalenfaktors a, des Längenparameters R, und der Masse des Körpers, M.

(a) Z ist ein Hohlzylinder mit innerem Radius R, äußerem Radius aR, und Höhe $2R$. [Kontrollergebnisse: $V_Z(2) = 6\pi R^3$, $I_Z(2) = \frac{15}{6} M R^2$.]

(b) P ist ein Paraboloid mit Höhe $h = aR$ und Krümmung $1/R$, definiert durch $P = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq h, (x^2 + y^2)/R \leq z\}$. [Kontrollergebnisse: $V_P(2) = 2\pi R^3$, $I_P(2) = \frac{2}{3} M R^2$.]



(c) S ist die Schüssel, die entsteht, wenn aus der Kugel $K_1 = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + (z - aR)^2 \leq a^2R^2\}$, mit Radius aR und zentriert am Punkt $P: (0,0,aR)^T$, ein Kegel $K_2 = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 | \, (x^2+y^2) \leq (a-1)z^2, a \geq 1\}$, mit Spitze am Ursprung und symmetrisch um die z-Achse, ausgestanzt wird. [Kontrollergebnisse: $V_S\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9}\pi R^3$, $I_S\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{14}{15}MR^2$. Was erhalten Sie für $a = 1$? Warum?]



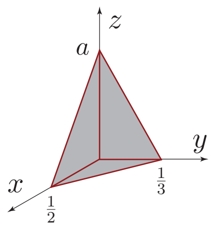
Hinweis: Finden Sie zunächst für gegebenes z die radialen Integrationsgrenzen, $\rho_1(z) \leq \rho \leq \rho_2(z)$, dann die z-Integrationsgrenzen, $0 \leq z \leq z_m$. Wie lautet der maximale z-Wert, z_m?

Hausaufgabe 4: Volumenintegral über Viertelkugel (Kugelkoordinaten) [2]
Punkte: [2](M)

Berechnen Sie mittels Kugelkoordinaten das Volumenintegral $F(R) = \int_K \mathrm{d}V f(\mathbf{r})$ der Funktion $f(\mathbf{r}) = xy$ über die Viertelkugel K, definiert durch $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ und $x, y \geq 0$. Skizzieren Sie K. [Kontrollergebnis: $F(2) = \frac{64}{15}$.]

Hausaufgabe 5: Flächenintegral: Fläche der schrägen Seite einer rechteckigen Pyramide [2]
Punkte: [2](M).

Betrachten Sie die skizzierte Pyramide. Finden Sie eine Parametrisierung ihrer schrägen Seite, $F_{\text{Schräge}}$, in der Form



$$\mathbf{r} : U \subset \mathbb{R}^2 \to F_{\text{Schräge}} \subset \mathbb{R}^3, \quad (x,y)^T \mapsto \mathbf{r}(x,y),$$

d.h. bestimmen Sie den Definitionsbereich U und den kartesischen Vektor $\mathbf{r}(x,y)$. Berechnen Sie dann den Flächeninhalt der schrägen Seite durch $A_{\text{Schräge}} = \int_U \mathrm{d}x\mathrm{d}y \, \|\partial_x \mathbf{r} \times \partial_y \mathbf{r}\|$.
[Ergebniskontrolle: für $a = 2$ ist $A_{\text{Schräge}} = \frac{\sqrt{53}}{12}$.]

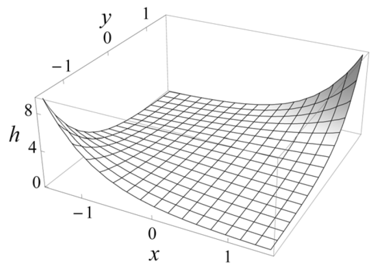
Hausaufgabe 6: Gradient für $\varphi(r)$ [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E)

(a) Für $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\mathbf{r}\|$, berechnen Sie $\boldsymbol{\nabla} r$ und $\boldsymbol{\nabla} r^2$.

(b) $\varphi(r)$ sei eine allgemeine, zweimal differenzierbare Funktion von r. Berechnen Sie $\boldsymbol{\nabla}\varphi(r)$, ausgedrückt durch $\varphi'(r)$, die erste Ableitung von φ nach r.

Hausaufgabe 7: Gradient eines Tals [4]
Punkte: (a-f)[je 0.5](M); (g)[1](M)

Ein Wanderer trifft auf das in der Figur dargestellte Tal, dessen Höhe durch $h(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{xy}$ beschrieben wird, mit $\mathbf{r} = (x,y)^T$. Beschreiben Sie die Topografie des Tals anhand folgender Fragen (unter Bezugnahme auf die Eigenschaften des Gradientenvektors $\boldsymbol{\nabla} h_{\mathbf{r}}$):



(a) Berechnen Sie den Gradienten $\boldsymbol{\nabla} h_{\mathbf{r}}$ und das totale Differential $\mathrm{d}h_{\mathbf{r}}(\mathbf{n})$ für den Vektor $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$.

(b) Sie stehen am Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$. In welche Richtung steigt der Hang am steilsten an?

(c) In welche Richtung verlaufen hier die Konturlinien?

(d) Skizzieren Sie einen Konturplot der Talflanke, auf dem zusätzlich die Gradientenvektoren $\boldsymbol{\nabla} h_{\mathbf{r}}$ an den Punkten $\mathbf{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$, $\mathbf{r}_2 = (0, 1)^T$ und $\mathbf{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$ eingezeichnet sind.

(e) Finden Sie eine Gleichung für die Konturlinie auf Höhe $h(\mathbf{r}) = H(> 0)$.

(f) Wo ist die Talflanke am flachsten? Was ist ihre Höhe dort?

(g) Wo ist sie am steilsten, für einen gegebenen Abstand $r = \|\mathbf{r}\|$ vom Ursprung?

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 19]
