Blatt 05: Mehrdimensionales Integrieren II. Felder I

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 2, 4, 7, 5.
Videos existieren für Beispielaufgaben 2 (C4.2.1).

Optionale Aufgabe 1: Bestimmte exponentielle Integrale der Form $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n e^{-ax}$ [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M)

Berechnen Sie das Integral $I_n(a) = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n e^{-ax}$ (mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$) auf zwei verschiedene Weisen: (a) durch mehrfache partielle Integration, und (b) durch mehrfaches Ableiten:

(a) Berechnen Sie I_0, I_1 und I_2, wo nötig mittels partieller Integration. Zeigen Sie dann mittels partieller Integration, dass

$$I_n(a) = \frac{n}{a} I_{n-1}(a)$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Nutzen Sie diese Beziehung iterativ, um $I_n(a)$ als Funktion von a und n zu bestimmen. $\big[$Kontrollergebnis: $I_3(2) = \frac{3}{8}$.$\big]$

(b) Zeigen Sie durch n-faches Ableiten des Integrals $I_0(a)$ nach a, dass

$$I_n(a) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n I_0(a)}{\mathrm{d}a^n}.$$

Berechnen Sie dann diese Ableitungen für einige kleine n-Werte. Folgern Sie aus dem sich ergebenen Muster eine allgemeine Formel für $I_n(a)$.

Optionale Aufgabe 2: Allgemeine Gauß-Integrale [2]
Punkte: (a)[1](M); (b)[1](M)

Bestimmen Sie den Wert des x^{2n}-Gauß-Integrals, $I_n(a) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, x^{2n}\, \mathrm{e}^{-ax^2}$ (mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$), auf zwei verschiedene Weisen: (a) durch mehrfache partielle Integration, und (b) durch mehrfaches Ableiten:

(a) Berechnen Sie, ausgehend vom Gauß-Integral $I_0(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, die Integrale I_1 und I_2, wo nötig mittels partieller Integration. Zeigen Sie dann mittels partieller Integration, dass

$$I_n(a) = \frac{2n-1}{2a} I_{n-1}(a)$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Nutzen Sie diese Beziehung iterativ, um $I_n(a)$ als Funktion von a und n zu bestimmen. $\big[$Check your result: $I_3(3) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\frac{5}{72}$.$\big]$

(b) Zeigen Sie durch n-faches Ableiten des Integrals $I_0(a)$ nach a, dass

$$I_n(a) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n I_0(a)}{\mathrm{d}a^n}.$$

Berechnen Sie dann diese Ableitungen für einige kleine n-Werte. Folgern Sie aus dem sich ergebenen Muster eine allgemeine Formel für $I_n(a)$.

Optionale Aufgabe 3: Volumen- und Flächenintegral: Rotationsparaboloid [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M).

Ein parabolische Rotationskörper, P, werde von oben durch die Ebene $z = z_{\max}$ begrenzt, und von unten durch den Rotationsparaboloid, welcher durch die Rotation der Parabel $z(x) = x^2$ um die z-Achse entsteht.

(a) Berechnen Sie das Volumen, V, des Körpers P.

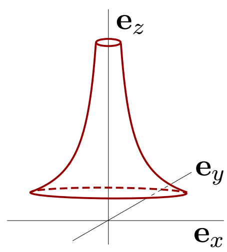
(b) Berechnen Sie die Fläche, A, des gekrümmten Anteils, K, der Oberfläche von P.

[Kontrollergebnisse: Für $z_{\mathsf{max}} = \frac{3}{4}$ gilt $V = \frac{9\pi}{32}$ und $A = \frac{7\pi}{6}$.]

Optionale Aufgabe 4: Flächenintegral: hyperbolischer Rotationskörper (Gabriel's Horn) [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](A); (c)[0.5](E); (d)[0.5](E).

Betrachten Sie einen Körper, K, erzeugt durch die Rotation der Funktion $\rho(z) = 1/z$, mit $1 \leq z \leq a$, um die z-Achse. Solch ein Körper ist als Gabriels Horn oder Torricellis Trompete bekannt.

(a) Berechnen Sie das Volumen, $V(a)$, des Körpers K.
[Kontrollergebnis: $V(2) = \frac{\pi}{2}$.]



(b) Geben Sie das Integral für die Oberfläche, $A(a)$, diese Körpers an und berechnen Sie dessen Ableitung, $A'(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} A(a)$. [Kontrollergebnis: $A'(1) = 2\sqrt{2}\pi$.]

(c) Finden Sie eine untere Schranke für den Wert des Integral $A(a)$, indem Sie die Ungleichung $\sqrt{z^{-4}+1} \geq 1$ verwenden.

(d) Wie groß sind das Volumen und (die untere Schranke für) die Oberfläche im Limes $a \to \infty$?

Optionale Aufgabe 5: Mantelfläche eines kreisrunden Kegels [2]
Punkte: [2](M)

Betrachten Sie einen kreisrunden Kegel, K, mit Radius R und Höhe h. Berechnen Sie den Flächeninhalt, $A_K(R, h)$, seiner (schrägen) Mantelfläche S_K als Funktion von R und h. [Ergebniskontrolle: $A_K(3, 4) = 15\pi$.]

Optionale Aufgabe 6: Mantelfläche eines elliptischen Kegels [2]
Punkte: [2](M)

Betrachten Sie einen elliptischen Kegel, K, mit Halbachsen a und b und Höhe h. Verwenden Sie verallgemeinerte Polarkoordinaten, um zu zeigen, dass der Flächeninhalt, A_K, seiner (schrägen) Mantelfläche S_K gegeben ist durch ein Integral der Form,

$$A_C = \int_{S_C} \mathrm{d}S = P \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \sqrt{1 + Q \sin^2 \phi}\,,$$

und bestimmen Sie $P(a, b, h)$ und $Q(a, b, h)$ als Funktionen von a, b und h. *Anmerkung*: Dieses Integral gehört zu der Klasse der sogenannten elliptischen Integrale, die sich nicht in geschlossener Form lösen lassen.
[Ergebniskontrolle: für $a = 3$, $b = 2$ und $h = 4$ ist $P = 5$ und $Q = \frac{4}{5}$.]

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 15]
