https://moodle.lmu.de → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 04: Mehrdimensionales Differenzieren und Integrieren I

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 3, 4(a,b), 7(a-c), 9.
Videos existieren für Beispielaufgaben 7 (V2.3.3), 8 (V2.3.5).

Optionale Aufgabe 1: Partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung [2]
Punkte: [2](E)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2\backslash(0,0)^T \to \mathbb{R}$, $\mathbf{r} = (x,y)^T \mapsto f(\mathbf{r}) = \frac{x}{r}+1$, mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

Optionale Aufgabe 2: Partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung [2]
Punkte: [2](E)

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{r} = (x,y,z)^T \mapsto f(\mathbf{r})$, für $f(\mathbf{r}) = x^2 \ln(y)/z$.

Optionale Aufgabe 3: Satz von Fubini [2]
Punkte: [2](M)

Verifizieren Sie den Satz von Fubini für die folgenden Integrale der Funktion $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y}$. [Ergebniskontrolle: $I(1) = \frac{2}{15}\big(2^{5/2}-2\big)$.]

(a) $I(a) = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y\ f(x,y)$, (b) $I(a) = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^a \mathrm{d}x\ f(x,y)$.

Optionale Aufgabe 4: Satz von Fubini [2]
Punkte: [2](M)

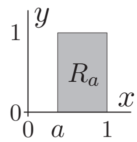
Verifizieren Sie den Satz von Fubini für die folgenden Integrale der Funktion $f(x,y) = xy^2\sin(x^2+y^3)$. [Ergebniskontrolle: $I(\sqrt{\pi/2}) = \frac{1}{3}$.]

(a) $I(a) = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{\pi^{1/3}} \mathrm{d}y\ f(x,y)$, (b) $I(a) = \int_0^{\pi^{1/3}} \mathrm{d}y \int_0^a \mathrm{d}x\ f(x,y)\,.$

Optionale Aufgabe 5: Unanwendbarkeit von Satz von Fubini [Bonus]
Punkte: (a)[1](E,Bonus); (b)[0,5](E,Bonus); (M)[1](E,Bonus); (d)[0,5](M,Bonus).

Der Satz von Fubini gilt nur, wenn der Integrand sich so verhält, dass das Integral seines *Betrags* über den Integrationsbereich existiert. Hier untersuchen wir ein Gegenbeispiel.

(a) Integrieren Sie die Funktion $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ über das Rechteck $R_a = \{a \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, mit $0 < a \in \mathbb{R}$, wobei Sie zwei verschiedene Reihenfolgen der Integration verwenden:



$$I_{\rm A}(a) = \int_a^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y\, f(x,y)\,, \qquad\qquad I_{\rm B}(a) = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_a^1 \mathrm{d}x\, f(x,y)\,.$$

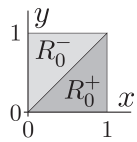
Zeigen Sie, dass $I_{\rm A}(a) = I_{\rm B}(a)$. [Kontrollergebnis: $I_{\rm A,B}(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{12}$.]

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $f(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{y}{x^2+y^2} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Wir setzen $a = 0$ für den Rest dieser Aufgabe.

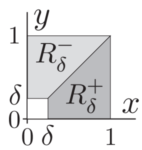
(b) Zeigen Sie, dass $I_{\rm A}(0) = -I_{\rm B}(0)$, wenn Sie diese Integrale erneut berechnen und von Anfang an $a = 0$ setzen. Welches der beiden, $I_{\rm A}(0)$ oder $I_{\rm B}(0)$, stimmt mit dem Grenzwert $a \to 0$ von Teil (a) überein?

(c) Zeigen Sie, dass das Integral $I_{\rm C} = \int_{R_0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, |f(x,y)|$ nicht existiert. Teilen Sie dafür den Integrationsbereich $R_{a=0}$ in zwei Teile, $R_0 = R_0^+ \cup R_0^-$, welche Sie so wählen, dass $f \geq 0$ auf R_0^+ und $f \leq 0$ auf R_0^- (siehe Abbildung). Dann $I_{\rm C} = \int_{R_0^+\cup R_0^-} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, |f(x,y)| = I_0^+ - I_0^-$, mit $I_0^\pm = \int_{R_0^\pm} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y)$. Berechnen Sie die Beiträge $I_0^\pm$ einzeln und zeigen Sie, dass $I_0^+ = -I_0^- = \infty$.



Wie wir in (a) und (b) gesehen haben, gilt der Satz von Fubini für $a > 0$, aber nicht für $a = 0$, da dann das Integral über den *Betrag* der Funktion nicht existiert, $I_{\rm C} = I_0^+ - I_0^- = \infty$, wie in (c) gezeigt. Dies ist der Fall, da für $a = 0$ der Integrationsbereich einen Punkt berührt, wo f divergiert — den Ursprung: wenn $(x,y)^T$ sich $(0,0)^T$ annähert, geht der Integrand gegen $+\infty$ für $x > y$ oder $-\infty$ für $x < y$. Gemäß (c) divergieren die Integrale über die positiven oder negativen 'Zweige' von f, $I_0^\pm = \pm\infty$. Folglich ist das Integral $I_0 = \int_{R_0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, f(x,y)$ *nicht definiert*: es liefert $\infty - \infty$ Beiträge, und das Ausmaß, in dem sich diese aufheben, hängt von der Reihenfolge der Integration ab, wie in (b) gesehen.

Das Integral I_0 ergibt Sinn, wenn man es **regularisiert**, d.h. wenn man den Integrationsbereich ändert, um die Singularität zu vermeiden. Betrachten wir beispielsweise den Bereich $R_\delta = R_0 \backslash Q_\delta$, den wir aus R_0 erhalten, indem wir ein infinitesimales Quadrat $Q_\delta = \{0 \leq x \leq \delta, 0 \leq y \leq \delta\}$ am Ursprung entfernen.



(d) Berechnen Sie das Integral $I_\delta = \int_{R_\delta} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, f(x,y)$ mit der Methode aus (c), indem Sie den Integrationsbereich aufteilen in $R_\delta = R_\delta^+ \cup R_\delta^-$ (siehe Abbildung). Diskutieren Sie den Grenzwert $I_{\delta\to 0}$. Warum ist er wohldefiniert?

Optionale Aufgabe 6: Unanwendbarkeit von Satz von Fubini [Bonus]

Punkte: (a)[1](E,Bonus); (b)[0,5](E,Bonus); (M)[1](E,Bonus); (d)[0,5](M,Bonus).

(a) Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ über dem Rechteck $R_a = \{a \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, mit $0 < a \in \mathbb{R}$, wobei Sie zwei verschiedene Reihenfolgen der Integration verwenden:

$$I_{\mathrm{A}}(a) = \int_a^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y\, f(x,y)\,, \qquad\qquad I_{\mathrm{B}}(a) = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_a^1 \mathrm{d}x\, f(x,y)\,.$$

Zeigen Sie, dass $I_{\mathrm{A}}(a) = I_{\mathrm{B}}(a)$. [Kontrollergebnis: $I_{\mathrm{A,B}}(\frac{1}{3}) = \frac{1}{10}$.]

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $f(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{xy^2}{2(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x^2 y}{2(x^2+y^2)^2}$.

(b) Zeigen Sie, dass $I_{\mathrm{A}}(0) = -I_{\mathrm{B}}(0)$, wenn Sie diese Integrale erneut berechnen und von Anfang an $a = 0$ setzen.

(c) Berechnen Sie $I_{\mathrm{C}} = \int_{R_0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, |f(x,y)|$ und erklären Sie, warum der Satz von Fubini in (b) nicht anwendbar ist.

(d) Berechnen Sie das regularisierte Integral $I_\delta = \int_{R_\delta} \mathrm{d}x\mathrm{d}y f(x,y)$, wobei Sie den Integrationsbereich $R_\delta = R_0 \backslash Q_\delta$ aus $R_{a=0}$ erhalten, indem Sie ein infinitesimales Quadrat $Q_\delta = \{0 \leq x \leq \delta, 0 \leq y \leq \delta\}$ am Ursprung entfernen. Diskutieren Sie den Grenzwert $I_{\delta\to 0}$. Warum ist er wohldefiniert?

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 8]
