



<https://moodle.lmu.de> → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

## Blatt 02: Vektorräume, Euklidische Geometrie

Ausgabe: Mo 24.10.22 Zentralübung: Do 27.10.22 Abgabe: Do 03.11.22, 14:00

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll  
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 5, 7, 9, 8.  
Videos existieren für Beispielaufgaben 4 (L2.4.1), 9 (L3.3.7).

### Beispielaufgabe 1: $\sqrt{1-x^2}$ -Integrale mittels trigonometrischer Substitution [3]

Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M).

Für Integrale, die  $\sqrt{1-x^2}$  enthalten, empfiehlt sich die trigonometrische Substitution  $x = \sin y$ , denn dadurch erhält man  $\sqrt{1-x^2} = \cos y$ . Berechnen Sie mittels dieser Substitution folgende Integrale  $I(z)$ ; überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Berechnung von  $\frac{dI(z)}{dz}$ .

[Kontrollergebnis: (a)  $I(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$ ; (b) für  $a = \frac{1}{2}$ ,  $I(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ .]

$$(a) I(z) = \int_0^z dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|z| < 1), \quad (b) I(z) = \int_0^z dx \sqrt{1-a^2x^2} \quad (|az| < 1).$$

*Hinweis:* Das in (b) nach der Substitution auftretende  $\cos^2 y$ -Integral lässt sich partiell integrieren.

### Beispielaufgabe 2: Vektorraumaxiome: rationale Zahlen [3]

Punkte: (a)[2,5](E); (b)[0,5](E).

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge  $\mathbb{Q}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \mid x^1, x^2 \in \mathbb{Q} \right\}$ , bestehend aus Paaren von rationalen Zahlen, über dem Körper der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  einen Vektorraum bildet.
- (b) Ist es möglich, aus der Menge aller Paare von ganzen Zahlen,  $\mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \mid x^1, x^2 \in \mathbb{Z} \right\}$ , einen Vektorraum zu bilden? Begründen Sie ihre Antwort.

### Beispielaufgabe 3: Reeller Vektorraum mit unkonventionellen Verknüpfungsregeln [Bonus]

Punkte: [2](M,Bonus)

Die Vektorraum-Axiome können im Allgemeinen auf vielerlei unterschiedliche Arten erfüllt werden, z.B. durch unkonventionelle Definitionen von Vektoraddition und skalarer Multiplikation. Wir wollen dies anhand eines Beispiels veranschaulichen:

Für alle  $a \in \mathbb{R}$ , sei  $V_a \equiv \{\mathbf{v}_x\}$  eine Menge, deren Elemente  $\mathbf{v}_x$ , indiziert durch reelle Zahlen  $x \in \mathbb{R}$ , die folgenden Rechenregeln erfüllen:

$$\begin{aligned} \text{Addition:} & \quad + : V_a \times V_a \rightarrow V_a, & (\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y) & \mapsto \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y \equiv \mathbf{v}_{x+y+a} \\ \text{Multiplikation mit einem Skalar:} & \quad \cdot : \mathbb{R} \times V_a \rightarrow V_a, & (\lambda, \mathbf{v}_x) & \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}_x \equiv \mathbf{v}_{\lambda x + a(\lambda-1)} \end{aligned}$$

Als reelle Zahlen erfüllen die Indizes  $a$  und  $x$  die üblichen Additions- und Multiplikationsregeln in  $\mathbb{R}$ ; z.B. gilt für  $V_2$ :  $\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_{3+4+2} = \mathbf{v}_9$  und  $3 \cdot \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_{3 \cdot 4 + 2(3-1)} = \mathbf{v}_{16}$ . Zeigen Sie, dass das Tripel  $(V_a, +, \cdot)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist, wobei  $\mathbf{v}_{-a}$  und 1 die neutralen Elemente bezüglich Vektoraddition und skalarer Multiplikation sind. *Hinweis*: Das Inverse von  $\mathbf{v}_x$  ist  $\mathbf{v}_{-x-2a}$ .

### Beispielaufgabe 4: Lineare Unabhängigkeit [3]

Punkte: (a)[2](M); (b)[1](M)

- (a) Sind die drei Vektoren  $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 2)^T$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1)^T$  und  $\mathbf{v}_3 = (2, -1, 4)^T$  linear unabhängig?
- (b) Je nachdem, ob Ihre Antwort ja oder nein ist, finden Sie einen neuen Vektor  $\mathbf{v}'_2$ , so dass  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}'_2$  und  $\mathbf{v}_3$  linear abhängig bzw. linear unabhängig sind, und zeigen Sie explizit, dass diese Eigenschaft gilt.

### Beispielaufgabe 5: Einsteinsche Summenkonvention [2]

Punkte: (a)[0.5](E), (b)[0.5](E), (c)[0.5](E), (d)[0.5](E).

Sei  $a_1, a_2, b^1, b^2 \in \mathbb{R}$ . Welche der folgenden Aussagen, formuliert mittels der Einsteinschen Summenkonvention, sind korrekt und welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

- (a)  $a_i b^i \stackrel{?}{=} b^j a_j$ , (b)  $a_i \delta^i_j b^j \stackrel{?}{=} a_k b^k$ ,  
(c)  $a_i b^j a_j b^k \stackrel{?}{=} a_k b^l a_l b^i$ , (d)  $a_1 a_i b^1 b^i + b^2 a_j a_2 b^j \stackrel{?}{=} (a_i b^i)^2$ .

### Beispielaufgabe 6: Winkel, orthogonale Zerlegung [2]

Punkte: (a)[0,5](E); (b)[1,5](E).

- (a) Finden Sie den Winkel zwischen den Vektoren  $\mathbf{a} = (3, 4)^T$  und  $\mathbf{b} = (7, 1)^T$ .
- (b) Gegeben sind die Vektoren  $\mathbf{c} = (3, 1)^T$  und  $\mathbf{d} = (-1, 2)^T$ . Zerlegen Sie  $\mathbf{c} = \mathbf{c}_{\parallel} + \mathbf{c}_{\perp}$  in Komponenten parallel bzw. senkrecht zu  $\mathbf{d}$ . Skizzieren Sie alle vier Vektoren.  
[Ergebniskontrolle:  $\|\mathbf{c}_{\parallel}\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\|\mathbf{c}_{\perp}\| = \frac{7}{\sqrt{5}}$ .]

### Beispielaufgabe 7: Projektion auf eine Orthonormalbasis [2]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E)

- (a) Zeigen Sie, dass die Vektoren  $\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$ ,  $\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$  eine Orthonormalbasis für  $\mathbb{R}^2$  bilden.
- (b) Stellen Sie den Vektor  $\mathbf{w} = (-2, 3)^T$  in der Form  $\mathbf{w} = \mathbf{e}'_1 w^1 + \mathbf{e}'_2 w^2$  dar, indem Sie seine Komponenten  $w^i$  bezüglich der Basis  $\{\mathbf{e}'_i\}$  mittels Projektion auf die Basisvektoren bestimmen.  
[Ergebniskontrolle:  $\sum_{i=1}^2 w^i = -2\sqrt{2}$ .]

### Beispielaufgabe 8: Gram-Schmidt-Verfahren [2]

Punkte: [2](E)

Finden Sie mittels Gram-Schmidt-Verfahren für die folgenden linear unabhängigen Vektoren  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  einen orthonormalen Satz  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  mit demselben Span und mit  $\mathbf{e}'_1 \parallel \mathbf{v}_1$ .

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (0, 1, 2)^T.$$

### Beispielaufgabe 9: Nicht-Orthogonale Basis und Metrik [4]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[1](M)

Geben sind die Vektoren  $\hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\hat{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ausgedrückt durch Spaltenvektoren in der Standardbasis von  $\mathbb{R}^2$ . (In dieser Aufgabe benutzen wir folgende Notation: Vektoren im Inneren-Produkt-Raum  $\mathbb{R}^2$  tragen einen Hut, z.B.  $\hat{\mathbf{x}}$ , und ihre Komponenten bezüglich einer gegebenen Basis tragen keinen, z.B.  $x$ .)

- (a) Drücken Sie den Standardbasisvektor  $\hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  als Linearkombination von  $\hat{\mathbf{v}}_1$  und  $\hat{\mathbf{v}}_2$  aus. Ditto für  $\hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Bilden  $\{\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2\}$  eine Basis für  $\mathbb{R}^2$ ?
- (b)  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{v}}_1 x^1 + \hat{\mathbf{v}}_2 x^2$  und  $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{v}}_1 y^1 + \hat{\mathbf{v}}_2 y^2$  seien zwei Vektoren in  $\mathbb{R}^2$ , deren Komponenten bzgl.  $\{\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2\}$  gegeben sind durch  $\mathbf{x} = (x^1, x^2)^T = (3, -4)^T$  bzw.  $\mathbf{y} = (y^1, y^2)^T = (-1, 3)^T$ . Drücken Sie  $\hat{\mathbf{x}}$  und  $\hat{\mathbf{y}}$  als Spaltenvektoren in der Standardbasis von  $\mathbb{R}^2$  aus und berechnen Sie deren Skalarprodukt  $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^2}$ .
- (c) Wird das Skalarprodukt  $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^2}$  durch die Komponenten  $x^i$  von  $\hat{\mathbf{x}}$  und  $y^j$  von  $\hat{\mathbf{y}}$  bezüglich der nicht-orthonormalen Basis  $\{\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2\}$  ausgedrückt, nimmt es die Form eines inneren Produkts mit einer Metrik an:  $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_g = x^i g_{ij} y^j$ , mit  $g_{ij} = \langle \hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{v}}_j \rangle_{\mathbb{R}^2}$ . Berechnen Sie die Komponenten der Metrik explizit (konkret: finden Sie  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{21}$  und  $g_{22}$ ).
- (d) Das innere Produkt aus (c) lässt sich in die Form  $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^2} = (x^i g_{ij}) y^j = x_j y^j$  schreiben, mit  $x_j = x^i g_{ij}$ ; dadurch wird die Metrik "versteckt", indem sie die Definition von kovarianten Komponenten (Index unten) absorbiert wird. Berechnen Sie  $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^2}$  auf diese Weise, indem Sie zunächst  $x_1$  und  $x_2$  finden. [Kontrolle: ist das Ergebnis konsistent mit dem von (b)?]

---

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 21]

---

### Hausaufgabe 1: $\sqrt{1+x^2}$ -Integrale mittels hyperbolischer Substitution [3]

Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M).

Für Integrale, die  $\sqrt{1+x^2}$  enthalten, empfiehlt sich die hyperbolische Substitution  $x = \sinh y$ , denn dadurch erhält man  $\sqrt{1+x^2} = \cosh y$ . Berechnen Sie mittels dieser Substitution folgende Integrale  $I(z)$ ; überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Berechnung von  $\frac{dI(z)}{dz}$ .

[Kontrollergebnis: (a)  $I(\frac{3}{4}) = \ln 2$ ; (b) für  $a = \frac{1}{2}$ ,  $I(\frac{3}{2}) = \ln 2 + \frac{15}{16}$ .]

$$(a) I(z) = \int_0^z dx \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (b) I(z) = \int_0^z dx \sqrt{1+a^2 x^2}.$$

### Hausaufgabe 2: Vektorraum der komplexen Zahlen [3]

Zeigen Sie, dass die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen bilden.

### Hausaufgabe 3: Reeller Vektorraum mit unkonventionellen Verknüpfungsregeln [Bonus]

Punkte: (a)[1](M,Bonus); (b)[1](M,Bonus); (c)[1](E,Bonus)

Für alle  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ , sei  $V_{\mathbf{a}} \equiv \{\mathbf{v}_{\mathbf{x}}\}$  eine Menge, deren Elemente  $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$ , indiziert durch zwei-dimensionale reelle Vektoren  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , die folgenden Rechenregeln erfüllen:

Addition:  $\mathbf{+} : V_{\mathbf{a}} \times V_{\mathbf{a}} \rightarrow V_{\mathbf{a}}, \quad (\mathbf{v}_{\mathbf{x}}, \mathbf{v}_{\mathbf{y}}) \mapsto \mathbf{v}_{\mathbf{x}} \mathbf{+} \mathbf{v}_{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{v}_{\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{a}}$

Multiplikation mit einem Skalar:  $\cdot : \mathbb{R} \times V_{\mathbf{a}} \rightarrow V_{\mathbf{a}}, \quad (\lambda, \mathbf{v}_{\mathbf{x}}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{v}_{\lambda\mathbf{x}+f(\mathbf{a},\lambda)}$

Hier ist  $f(\mathbf{a}, \lambda)$  eine Funktion von  $\mathbf{a}$  und  $\lambda$ , deren Form im Folgenden zu bestimmen ist.

- (a) Zeigen Sie, dass  $V_{\mathbf{a}}$  mit der Addition  $\mathbf{+}$  eine abelsche Gruppe ist und bestimmen Sie das neutrale Element sowie das Inverse von  $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$  bezüglich der Addition.
- (b) Finden Sie die spezielle Form von  $f$ , so dass das Tripel  $(V_{\mathbf{a}}, \mathbf{+}, \cdot)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist.
- (c) Kann Ihre Konstruktion auf  $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  (wobei  $n$  eine positive, ganze Zahl ist) anstelle von  $\mathbb{R}^2$  erweitert werden?

### Hausaufgabe 4: Lineare Unabhängigkeit [3]

Punkte: (a)[2](M); (b)[1](M)

- (a) Sind die Vektoren  $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)^T$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 6)^T$  und  $\mathbf{v}_3 = (-1, -1, 0)^T$  linear unabhängig?
- (b) Je nachdem, ob Ihre Antwort ja oder nein ist, finden Sie einen neuen Vektor  $\mathbf{v}'_2$ , so dass  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}'_2$  und  $\mathbf{v}_3$  linear abhängig bzw. linear unabhängig sind, und zeigen Sie explizit, dass diese Eigenschaft gilt.

### Hausaufgabe 5: Einsteinsche Summenkonvention [2]

Sei  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $b^1 = -1$ ,  $b^2 = x$ . Werten Sie folgende Ausdrücke, welche mittels der Einsteinschen Summenkonvention formuliert sind, als Funktionen von  $x$  aus:

- (a)  $a_i b^i$ ,                      (b)  $a_i a_j b^i b^j$ ,                      (c)  $a_1 a_j b^2 b^j$ .

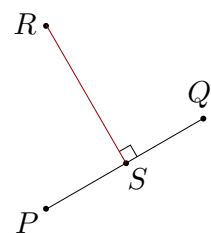
[Ergebniskontrolle für  $x = 3$ : (a) 5, (b) 25, (c) 15.]

### Hausaufgabe 6: Winkel, orthogonale Zerlegung [3]

Punkte: (a)[0,5](E); (b)[1,5](E); (c)[1](E).

- (a) Finden Sie den Winkel zwischen den Vektoren  $\mathbf{a} = (2, 0, \sqrt{2})^T$  und  $\mathbf{b} = (\sqrt{2}, 1, 1)^T$ .

In der Abbildung haben die Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  Koordinatenvektoren  $\mathbf{p} = (-1, -1)^T$ ,  $\mathbf{q} = (2, 1)^T$  und  $\mathbf{r} = (-1, -1 + 13a)^T$ , wobei  $a$  eine positive reelle Zahl ist. Die Linie  $RS$  stehe senkrecht auf der Linie  $PQ$ .



- (b) Finden Sie den Koordinatenvektor  $\mathbf{s}$  von  $S$ , ausgedrückt als Funktion von  $a$ .

*Hinweis:* Sei  $\mathbf{c}$  der Vektor von  $P$  nach  $Q$ , und  $\mathbf{d}$  der Vektor von  $P$  nach  $R$ , dann zerlegen Sie  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_{\parallel} + \mathbf{d}_{\perp}$  in Komponenten parallel und senkrecht zu  $\mathbf{c}$ .

(c) Finden Sie die Länge  $\overline{RS}$  von  $R$  nach  $S$  und die Länge  $\overline{PS}$  von  $P$  nach  $S$ .

[Ergebniskontrolle für  $a = 1$ : (b)  $\mathbf{s} = (5, 3)^T$ , (c)  $\overline{RS}^2 + \overline{PS}^2 = 169$ .]

### Hausaufgabe 7: Projektion auf eine Orthonormalbasis [2]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E)

(a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren  $\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{9}(4, -1, 8)^T$ ,  $\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{9}(-7, 4, 4)^T$  und  $\mathbf{e}'_3 = \frac{1}{9}(-4, -8, 1)^T$  eine Orthonormalbasis im Raum  $\mathbb{R}^3$  bilden.

(b)  $\mathbf{w} = \mathbf{e}'_i w^i$  sei die Zerlegung von  $\mathbf{w} = (1, 2, 3)^T$  in dieser Basis. Wie lauten die Komponenten  $w^i$ ? [Ergebniskontrolle:  $\sum_{i=1}^3 w^i = \frac{22}{9}$ .]

### Hausaufgabe 8: Gram-Schmidt Verfahren [2]

Punkte: [2](E)

Finden Sie mittels Gram-Schmidt-Verfahren für die folgenden linear unabhängigen Vektoren  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  einen orthonormalen Satz  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  mit demselben Span und mit  $\mathbf{e}'_1 \parallel \mathbf{v}_1$ .

- (a)  $\mathbf{v}_1 = (0, 3, 0)^T$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, -3, 0)^T$ ,  $\mathbf{v}_3 = (2, 4, -2)^T$ .  
(b)  $\mathbf{v}_1 = (-2, 0, 2)^T$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 0)^T$ ,  $\mathbf{v}_3 = (3, 6, 5)^T$ .

### Hausaufgabe 9: Nicht-Orthogonale Basis und Metrik [4]

Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[1](M)

Gegeben sind die Vektoren  $\hat{\mathbf{v}}_1 = (2, 1, 2)^T$ ,  $\hat{\mathbf{v}}_2 = (1, 0, 1)^T$ , und  $\hat{\mathbf{v}}_3 = (1, 1, 0)^T$  ausgedrückt durch Spaltenvektoren in der Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$ . (In dieser Aufgabe benutzen wir folgende Notation: Vektoren im Inneren-Produktraum  $\mathbb{R}^3$  tragen einen Hut, z.B.  $\hat{\mathbf{x}}$ , und ihre Komponenten bezüglich einer gegebenen Basis tragen keinen, z.B.  $\mathbf{x}$ .)

(a) Drücken Sie den Standardbasisvektor  $\hat{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, 0)^T$  als Linearkombination von  $\hat{\mathbf{v}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{v}}_2$  und  $\hat{\mathbf{v}}_3$  aus. Dito für  $\hat{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, 0)^T$  und  $\hat{\mathbf{e}}_3 = (0, 0, 1)^T$ . Bilden  $\hat{\mathbf{v}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{v}}_2$  und  $\hat{\mathbf{v}}_3$  eine Basis für  $\mathbb{R}^3$ ?

(b)  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{v}}_1 x^1 + \hat{\mathbf{v}}_2 x^2 + \hat{\mathbf{v}}_3 x^3$  und  $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{v}}_1 y^1 + \hat{\mathbf{v}}_2 y^2 + \hat{\mathbf{v}}_3 y^3$  seien zwei Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ , deren Komponenten bzgl.  $\hat{\mathbf{v}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{v}}_2$  und  $\hat{\mathbf{v}}_3$  gegeben sind durch  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) = (2, -5, 3)^T$ , bzw.  $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3) = (4, -1, -2)^T$ . Drücken Sie  $\hat{\mathbf{x}}$  und  $\hat{\mathbf{y}}$  als Spaltenvektoren in der Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$  aus und berechnen Sie deren Skalarprodukt  $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^3}$ .

(c) Berechnen Sie die Komponenten der Metrik  $g_{ij} = \langle \hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{v}}_j \rangle_{\mathbb{R}^3}$  explizit.

(d) Berechnen Sie nun das Skalarprodukt von  $\hat{\mathbf{x}}$  und  $\hat{\mathbf{y}}$  mittels der Formel  $\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_g = x^i g_{ij} y^j = x_j y^j$ , mit  $x_j = x^i g_{ij}$ , indem Sie die Summen über  $i$  und  $j$  explizit durchführen. [Kontrolle: ist das Ergebnis konsistent mit dem von (b)?]

---

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 22]

---