https://moodle.lmu.de → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

# Blatt 02: Vektorräume, Euklidische Geometrie

(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 5, 7, 9, 8.
Videos existieren für Beispielaufgaben 4 (L2.4.1), 9 (L3.3.7).

**Optionale Aufgabe 1: Vektorraum der reellen Funktionen [2]**
Punkte: [2](M)

Sei $F \equiv \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\}$ die Menge der reellen Funktionen. Beweisen Sie anhand der Vektorraumaxiome, dass $(F, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\cdot})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wobei Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar wie folgt definiert sind:

$$\boldsymbol{+} : F \times F \to F \qquad (f,g) \mapsto f \boldsymbol{+} g, \qquad \text{mit} \qquad f \boldsymbol{+} g : x \mapsto \big[f \boldsymbol{+} g\big](x) \equiv f(x) + g(x) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\cdot} : \mathbb{R} \times F \to F \qquad (\lambda, f) \mapsto \lambda \boldsymbol{\cdot} f, \qquad \text{mit} \qquad \lambda \boldsymbol{\cdot} f : x \mapsto \big[\lambda \boldsymbol{\cdot} f\big](x) \equiv \lambda f(x) \tag{2}$$

*Anmerkung zur Notation:* Es ist wichtig, den 'Namen' einer Funktion, $f$, zu unterscheiden von dem 'Funktionswert', $f(x)$, den sie liefert, wenn sie am Argument $x$ ausgewertet wird. Die Summe der Funktionen $f$ und $g$ ist eine Funktion namens $f \boldsymbol{+} g$. Laut Gl. (1) ist deren Funktionswert bei $x$, notiert als $\big[f \boldsymbol{+} g\big](x)$, per Definition gleich $f(x) + g(x)$, der Summe der Funktionswerte von $f$ und $g$ bei $x$. [Zur Betonung benutzen wir in dieser Aufgabe eckige Klammern zur Andeutung des Funktionsnamen; anderswo werden wir dafür runde Klammern benutzen.] Das Produkt der Zahl $c$ und der Funktion $f$ ist eine Funktion namens $c \boldsymbol{\cdot} f$. Laut Gl. (2) ist deren Funktionswert bei $x$, notiert als $\big[c \boldsymbol{\cdot} f\big](x)$, per Definition gleich $cf(x)$, dem Produkt von $c$ und dem Funktionswert von $f$ bei $x$.

**Optionale Aufgabe 2: Vektorraum der Polynome von Grad höchstens $n$ [3]**
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](E)

Der Vektorraum aller reeller Funktion ist unendlichdimensional. Falls jedoch nur Funktionen einer vorgeschriebenen Form betrachtet werden, kann der entsprechende Vektorraum endlichdimensional sein. Als Beispiel wird in dieser Aufgabe gezeigt, dass die Menge aller Polynome vom Grad höchstens $n$ einen $n+1$ dimensionalen Vektorraum bildet, der isomorph zu $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.
[Anmerkung zur Notation: im aktuellen Kontext von Polynomen bedeutet $x^k$ wirklich '$x$ zur Potenz $k$', und $a_k$ "der Koeffizient von $x^k$", im Gegensatz zur Notation der Vorlesung, wo $x^k$ für die $k$-Kompenente des Vektors $\mathbf{x} = \sum_k \mathbf{v}_k x^k$ bezüglich einer Basis von Vektoren $\{\mathbf{v}_k\}$ steht. Jede Notationsregel hat Ausnahmen!]

$p_{\mathbf{a}}$ bezeichne ein Polynom in der Variable $x \in \mathbb{R}$ vom Grad höchstens $n$:

$$p_{\mathbf{a}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto p_{\mathbf{a}}(x) \equiv a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots a_n x^n.$$

$p_{\mathbf{a}}$ ist eindeutig bestimmt durch die $n+1$ reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$, für welche wir die Kompaktnotation eines $(n+1)$ Tupels, $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ benutzen. $P_n = \{p_{\mathbf{a}} | \mathbf{a} \in$

$\mathbb{R}^{n+1}\}$ sei die Menge aller solcher Polynome vom Grad $n$. Die naheliegenden Definitionen der Addition von Polynomen, oder deren Multiplikation mit einem Skalar $c \in \mathbb{R}$, sind

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{a}} \boldsymbol{+} p_{\mathbf{b}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & x \mapsto p_{\mathbf{a}}(x) + p_{\mathbf{b}}(x)\,, \\ c \bullet p_{\mathbf{a}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad & x \mapsto c\, p_{\mathbf{a}}(x)\,, \end{aligned}$$

wobei auf der rechten Seite die übliche Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ gemeint ist.

(a) Zeigen Sie, dass obige Definitionen von Addition und skalarer Multiplikation zu folgenden Verknüpfungsregeln in $P_n$ führen,

$$\begin{aligned} &\text{Addition von Polynomen:} \quad \boldsymbol{+} : \quad P_n \times P_n \to P_n, \qquad (p_{\mathbf{a}}, p_{\mathbf{b}}) \mapsto p_{\mathbf{a}} \boldsymbol{+} p_{\mathbf{b}} = p_{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \\ &\text{Skalare Multiplikation:} \quad \bullet : \quad \mathbb{R} \times P_n \to P_n, \qquad (c, p_{\mathbf{x}}) \mapsto c \bullet p_{\mathbf{a}} = p_{c\mathbf{a}} \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ und $c\mathbf{a}$ die übliche Addition und skalare Multiplikation in $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnen.

(b) Zeigen Sie, dass $(P_n, \boldsymbol{+}, \bullet)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, und dass er isomorph zu $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

(c) Geben Sie eine Menge aus $n+1$ Polynomen an, $\{p_{\mathbf{a}_0}, \dots, p_{\mathbf{a}_n}\} \subset P_n$, welche eine Basis für diesen Vektorraum bildet.

**Optionale Aufgabe 3: Unkonventionelles inneres Produkt auf $\mathbb{R}^2$ [2]**
Punkte: [2](M)

Die definierenen Eigenschaften eines inneren Produktes auf $\mathbb{R}^n$ werden natürlich nicht nur durch die 'Standarddefinition', $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n (x^i)^2$, erfüllt; es gibt unendlich viele andere Bilinearformen, die dies auch tun. Die aktuelle Aufgabe illustriert dies mit einem einfachen Beispiel. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^2$ ist:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \big(\mathbf{x}, \mathbf{y}\big) \mapsto x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3 x_2 y_2\,.$$

**Optionale Aufgabe 4: Inneres Produkt und Norm für Vektorraum stetiger Funktionen [3]**
Punkte: (a)[2](M); (b)[1](M)

Diese Aufgabe illustriert ein besonders wichtiges Beispiel eines inneren Produkts: im Raum der stetigen Funktionen kann ein inneres Produkt mittels Integration definiert werden.
$V$ sei der Vektorraum der *stetigen* reellen Funktionen auf einem beschränkten Interval $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, mit den üblichen Verknüpfungsregeln der Vektoraddition und skalaren Multiplikation:

$$\begin{aligned} \forall f, g \in V : \qquad & f + g : I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (f+g)(x) \equiv f(x) + g(x), \\ \forall f \in V, \lambda \in \mathbb{R} : \qquad & \lambda \cdot f : I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (\lambda \cdot f)(x) \equiv \lambda\,(f(x))\,. \end{aligned}$$

(a) Weisen Sie nach, dass folgende Abbildung ein inneres Produkt auf $V$ darstellt:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle \equiv \int_I \mathrm{d}x\, f(x) g(x)\,.$$

(b) Sei nun $I = [-1, 1]$. Berechnen Sie $\langle f_1, f_2 \rangle$ für $f_1(x) \equiv \sin\left(\frac{x}{\pi}\right)$ und $f_2(x) \equiv \cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$.

[Gesamtpunktzahl Optionale Aufgaben: 10]