https://moodle.lmu.de → Kurse suchen: 'Rechenmethoden'

Blatt 01: Mathematische Grundlagen

Ausgabe: Mo 17.10.22 Zentralübung: Do 20.10.22 Abgabe: Do 27.10.22, 14:00
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Vorschläge für Zentralübung: Beispielaufgaben 9, 10, 4, 3.
Videos existieren für Beispielaufgaben 9 (C2.3.1), 10 (C2.3.3).

Beispielaufgabe 1: Verkettung von Abbildungen [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E).

Sei $\mathbb{N}_0$ die Menge aller natürlichen Zahlen einschließlich der Null, und $\mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen. Betrachten Sie folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned} A &: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, & n &\mapsto A(n) = n+1, \\ B &: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, & n &\mapsto B(n) = |n| \equiv n \cdot \mathrm{sign}(n). \end{aligned}$$

(a) Finden Sie die verkettete Abbildung $C = B \circ A$, d.h. bestimmen Sie ihre Definitionsmenge, Bildmenge sowie ihre Wirkung auf n.

(b) Welche der oben genannten Abbildungen A, B und C sind surjektiv? Injektiv? Bijektiv?

Beispielaufgabe 2: Die Abelsche Gruppe $\mathbb{Z}_2$ [3]
Punkte: (a)[2](E); (b)[1](E).

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_2 \equiv (\{0,1\}, \boldsymbol{+})$ eine Abelsche Gruppe ist, wobei die Addition durch nebenstehende Verknüpfungstabelle bestimmt ist:

$\boldsymbol{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

(b) Konstruieren Sie eine Gruppe, die isomorph zu $\mathbb{Z}_2$ ist. Verwenden Sie zwei ganze Zahlen als Gruppenelemente und die übliche Multiplikation als Gruppenoperation. Geben Sie die zugehörige Verknüpfungstabelle an.

Beispielaufgabe 3: Permutationsgruppen [4]
Punkte: (a)[3](E); (b)[0,5](E); (c)[0,5](E).

Eine Abbildung, die n geordnete Objekte in eine andere Reihenfolge umordnet, nennt man eine **Permutation** dieser Objekte. Zum Beispiel ist $1234 \xmapsto{[4312]} 4312$ eine Permutation der vier Zahlen der Zahlenfolge 1234, wobei wir die Abkürzung $[4312]$ für die Abbildung $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 1$ und $4 \mapsto 2$ verwenden. Wenn wir entsprechend dieselbe Permutation auf die Folge 2314 anwenden, erhalten wir $2314 \xmapsto{[4312]} 3142$. (Allgemein bezeichnet $[P(1)...P(n)]$ die Abbildung $j \mapsto P(j)$ welche j durch $P(j)$ ersetzt, für $j = 1, ..., n$.) Werden zwei Permutationen nacheinander ausgeführt, entspricht das Ergebnis ebenfalls einer Permutation. Zum Beispiel liefert $P = [4312]$ angewendet auf 1234, gefolgt von $P' = [2413]$, die Abbildung $1234 \overset{[4312]}{\longmapsto} 4312 \overset{[2413]}{\longmapsto} 3124$, resultiert also in der Permutation $P' \circ P = [3124]$.

Die Menge aller möglichen Permutationen von n Zahlen wird mit S_n bezeichnet. Sie enthält $n!$ Elemente. Betrachten wir $P' \circ P$ (führe erst P aus, dann P') als eine Gruppenoperation,

$$\circ : S_n \times S_n \to S_n, \qquad (P', P) \mapsto P' \circ P\,,$$

so erhalten wir eine Gruppe, $(S_n, \circ)$, die **Permutationsgruppe**, die üblicherweise einfach mit S_n bezeichnet wird.

(a) Ergänzen Sie die nebenstehende Verknüpfungstabelle für die Gruppe S_3, in der die Einträge $P' \circ P$ so angeordnet sind, dass diejenigen mit festem P' in derselben Zeile stehen, die mit festem P in derselben Spalte.

$P' \circ P$	[123]	[231]	[312]	[213]	[321]	[132]
[123]	[123]	[231]	[312]	[213]	[321]	[132]
[231]		[312]	[123]	[321]	[132]	[213]
[312]			[231]	[132]	[213]	[321]
[213]					[312]	[231]
[321]						[312]
[132]						

(b) Welches ist das neutrale Element von S_3? Wie können wir aus der Verknüpfungstabelle sehen, dass jedes Element ein eindeutiges Inverses hat?

(c) Ist S_3 eine Abelsche Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.

Beispielaufgabe 4: Algebraische Manipulationen mit komplexen Zahlen [4]
Punkte: (a-c)[0,5](E); (d)[0,5](M); (e)[0,5](E); (f)[0,5](E); (g)[1](M); (h)[1](M).

Schreiben Sie für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ die folgenden Ausdrücke in Standardform, d.h. in die Form (Realteil) $+\mathrm{i}$ (Imaginärteil):

(a) $z + \bar{z}$, (b) $z - \bar{z}$, (c) $z \cdot \bar{z}$, (d) $\dfrac{z}{\bar{z}}$,

(e) $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\bar{z}}$, (f) $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\bar{z}}$, (g) $z^2 + z$, (h) z^3.

[Ergebniskontrolle für $x = 2$, $y = 1$: (a) 4, (b) $\mathrm{i}2$, (c) 5, (d) $\frac{3}{5} + \mathrm{i}\frac{4}{5}$, (e) $\frac{4}{5}$, (f) $-\mathrm{i}\frac{2}{5}$, (g) $5 + \mathrm{i}5$, (h) $2 + \mathrm{i}11$.]

Beispielaufgabe 5: Multiplikation komplexer Zahlen: geometrische Deutung [4]
Punkte: (a)[2](E); (b)[2](E)

(a) z_1 und z_2 seien zwei komplexe Zahlen, je mit Polardarstellung $z_j = (\rho_j \cos\phi_j, \rho_j \sin\phi_j)$, mit $\phi_j \in [0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass die Multiplikation dieser Zahlen, $z_3 = z_1 z_2$, die Beziehungen $\rho_3 = \rho_1\rho_2$ und $\phi_3 = (\phi_1 + \phi_2)\mathrm{mod}(2\pi)$ liefert. [Das $\mathrm{mod}(2\pi)$ wird benötigt, da wir den Polarwinkel auf das Interval $[0, 2\pi)$ beschränkt haben.] Dafür sind folgende trigonometrischen Identitäten nützlich:

$$\cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2 = \cos(\phi_1 + \phi_2)\,,$$
$$\sin\phi_1 \cos\phi_2 + \cos\phi_1 \sin\phi_2 = \sin(\phi_1 + \phi_2)\,.$$

(b) Berechnen Sie für $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$ das Produkt $z_3 = z_1 z_2$, sowie $z_4 = 1/z_1$ und $z_5 = \bar{z}_1$. Finden Sie die Polardarstellung (mit $\phi \in [0, 2\pi)$) aller fünf komplexen Zahlen und skizzieren Sie diese in der komplexen Ebene (in einer Skizze). Ist Ihr Ergebnis für z_3 konsistent mit (a)?

Beispielaufgabe 6: Ableitungen von trigonometrischen Funktionen [1]
Punkte: (a)[0,5](E); (b)[0,5](E).

Zeigen Sie, dass die trigonometrischen Funktionen

$$\tan x = \tfrac{\sin x}{\cos x}, \qquad \csc x = \tfrac{1}{\sin x}, \qquad \sec x = \tfrac{1}{\cos x}, \qquad \cot x = \tfrac{\cos x}{\sin x} = \tfrac{1}{\tan x},$$

folgende Identitäten erfüllen:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan x = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$, (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cot x = -1 - \cot^2 x = -\csc^2 x$.

Beispielaufgabe 7: Ableitungen: Produktregel und Kettenregel [2]
Punkte: [3](E).

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:
[Eckige Klammern geben Kontrollergebnisse an: $[a, b]$ steht für $f'(a) = b$.]

(a) $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x}}$ $\left[2, \frac{1}{8}\right]$ (b) $f(x) = \frac{x^{1/2}}{(x+1)^{1/2}}$ $\left[3, \frac{1}{16\sqrt{3}}\right]$

(c) $f(x) = \mathrm{e}^x(2x - 3)$ $[1, \mathrm{e}]$ (d) $f(x) = 3^x$ $\left[-1, \frac{\ln 3}{3}\right]$

(e) $f(x) = x \ln x$ $[1, 1]$ (f) $f(x) = x \ln(9x^2)$ $\left[\frac{1}{3}, 2\right]$

Beispielaufgabe 8: Ableitungen von inversen trigonometrischen Funktionen [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[2](M).

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen von inversen trigonometrischen Funktionen f^{-1}. Fertigen Sie für jeden Fall eine qualitative Skizze an, die $f(x)$ und $f^{-1}(x)$ zeigt. Wenn f nicht monoton ist, untersuchen Sie Bereiche mit positiver oder negativer Steigung getrennt. [Ergebniskontrolle: $[a, b]$ steht für $(f^{-1})'(a) = b$.]

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x$ $[\frac{1}{3}, \frac{3}{\sqrt{8}}]$ (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos x$ $[\frac{1}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}]$ (c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan x$ $[1, \frac{1}{2}]$

Hinweis: Die Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist nützlich für (a,b), $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ für (c).

Beispielaufgabe 9: Partielle Integration [6]
Punkte: [6](M)

Integrale der Form $I(z) = \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}x \; u(x)v'(x)$ lassen sich mittels partieller Integration als $I(z) = [u(x)v(x)]_{z_0}^{z} - \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}x \; u'(x)v(x)$ schreiben. Diese Umformung ist nützlich, falls $u'v$ integrierbar ist – entweder direkt, oder nach weiteren partiellen Integrationen [siehe (b)], oder durch andere Manipulationen [siehe (e,f)]. Beim Durchführen einer solchen Rechnung ist es ratsam, die Faktoren u, v', v und u' klar zu kennzeichnen. Kontrollieren Sie stets, dass die Ableitung $I'(z) = \mathrm{d}I/\mathrm{d}z$ Ihres Ergebnisses den Integranden reproduziert. Falls eine einmalige partielle Integration ausreicht, um

$I(z)$ zu berechnen, werden Sie für dessen Ableitung das Kürzungsmuster $I' = u'v + uv' - u'v = uv'$ wiedererkennen [siehe (a,c,d)]; ansonsten ist das Kürzungsmuster komplizierter [siehe (b,e,f)]. Berechnen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration. [Ergebniskontrolle: $[a, b]$ steht für $I(a) = b$.]

(a) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ x\ \mathrm{e}^{2x}$ $\quad \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$

(b) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ x^2\ \mathrm{e}^{2x}$ $\quad \left[\frac{1}{2}, \frac{e}{8} - \frac{1}{4}\right]$

(c) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \ln x$ $\quad [1, -1]$

(d) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \ln x \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad [1, -4]$

(e) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \sin^2 x$ $\quad \left[\pi, \frac{\pi}{2}\right]$

(f) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \sin^4 x$ $\quad \left[\pi, \frac{3\pi}{8}\right]$

Beispielaufgabe 10: Integration mittels Substitution [4]
Punkte: [4](M)

Integrale der Form $I(z) = \int_{z_0}^z \mathrm{d}x\ y'(x) f(y(x))$ lassen sich als $I(z) = \int_{y(z_0)}^{y(z)} \mathrm{d}y f(y)$ schreiben, mittels der Substitution $y = y(x)$, $\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x$. Beim Berechnen solcher Integrale empfiehlt es sich, $y(x)$ und $\mathrm{d}y$ explizit hinzuschreiben, um den Vorfaktor von $f(y)$ richtig zu identifizieren. Kontrollieren Sie stets, dass die Ableitung $I'(z) = \mathrm{d}I/\mathrm{d}z$ ihres Ergebnisses den Integranden reproduziert. Sie werden feststellen, dass sich der Faktor $y'(z)$ über die Kettenregel zur Ableitung zusammengesetzter Funktionen ergibt.
Berechnen Sie folgende Integrale durch Substitution. [Ergebniskontrolle: $[a, b]$ steht für $I(a) = b$.]

(a) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\, x \cos(x^2 + \pi)$ $\quad \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}, -\frac{1}{2}\right]$

(b) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \sin^3 x \cos x$ $\quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{1}{16}\right]$

(c) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \sin^3 x$ $\quad \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5}{24}\right]$

(d) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \cosh^3 x$ $\quad \left[\ln 2, \frac{57}{64}\right]$

(e) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \frac{\sqrt{1 + \ln(x+1)}}{x+1}$ $\quad \left[\mathrm{e}^3 - 1, \frac{14}{3}\right]$

(f) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\, x^3 \mathrm{e}^{-x^4}$ $\quad \left[\sqrt[4]{\ln 2}, \frac{1}{8}\right]$

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 34]

Hausaufgabe 1: Verkettung von Abbildungen [2]
Punkte: (a)[0,5](E); (b)[0,5](E); (c)[0,5](E); (d)[0,5](E).

(a) Betrachten Sie die Menge $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Bestimmen Sie ihr Bild $T = A(S)$ unter der Abbildung $n \mapsto A(n) = n^2$. Ist die Abbildung $A : S \to T$ surjektiv? Injektiv? Bijektiv?

(b) Bestimmen Sie das Bild $U = B(T)$ der Menge T aus Teil (a) unter der Abbildung $n \mapsto B(n) = \sqrt{n}$.

(c) Finden Sie die verkettete Abbildung $C = B \circ A$.

(d) Welche der oben genannten Abbildungen A, B und C sind surjektiv? Injektiv? Bijektiv?

Hausaufgabe 2: Die Gruppen der Addition modulo 5 und der Rotationen um Vielfache von $72°$ [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[0,5](E); (d)[0,5](E).

(a) Betrachten Sie die Menge $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, versehen mit der Gruppenoperation

$$\boldsymbol{+} : \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5, \qquad (p, p') \mapsto p \boldsymbol{+} p' \equiv (p + p') \bmod 5.$$

Stellen Sie die Verknüpfungstabelle für die Gruppe $(\mathbb{Z}_5, \boldsymbol{+})$ auf. Welches ist das neutrale Element? Für gegebenes $n \in \mathbb{Z}$, welches Element ist das Inverse von n?

(b) Man bezeichne mit $r(\phi)$ eine Rotation um ϕ Grad um eine feste Achse, mit $r(\phi{+}360) = r(\phi)$. Betrachten Sie die Menge

$$\mathcal{R}_{72} = \{r(0), r(72), r(144), r(216), r(288)\}$$

der Rotationen um Vielfache von $72°$, und die Gruppe $(\mathcal{R}_{72}, \bullet)$, wobei die Gruppenoperation $\bullet$ zwei aufeinanderfolgende Rotationen verknüpft:

$$\bullet : \mathcal{R}_{72} \times \mathcal{R}_{72} \to \mathcal{R}_{72}, \qquad (r(\phi), r(\phi')) \mapsto r(\phi) \bullet r(\phi') \equiv r(\phi + \phi').$$

Stellen Sie die Verknüpfungstabelle für diese Gruppe auf. Welches ist das neutrale Element? Welches Element ist das Inverse von $r(\phi)$?

(c) Erklären Sie, weshalb die Gruppen $(\mathbb{Z}_5, \boldsymbol{+})$ und $(\mathcal{R}_{72}, \bullet)$ isomorph sind.

(d) Sei $(\mathbb{Z}_n, \boldsymbol{+})$ die Gruppe der ganzzahligen Addition modulo n der Elemente der Menge $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Welche Gruppe von diskreten Rotationen ist isomorph zu dieser Gruppe?

Hausaufgabe 3: Zerlegung von Permutationen in Sequenzen von Paarpermutationen [2]

Betrachten Sie die Permutationsgruppe S_n. Jede Permutation kann in eine Sequenz von **Paarpermutationen** zerlegt werden, d.h. in Permutationen, die nur zwei Objekte austauschen und alle anderen unverändert lassen. Beispiele:

$$\begin{aligned}
123 &\xmapsto{[321]} 321 \xmapsto{[132]} 231 && \Rightarrow \quad [231] = [132] \circ [321]. \\
1234 &\xmapsto{[2134]} 2134 \xmapsto{[3214]} 2314 && \Rightarrow \; [2314] = [3214] \circ [2134], \\
1234 &\xmapsto{[3214]} 3214 \xmapsto{[1324]} 2314 && \Rightarrow \; [2314] = [1324] \circ [3214], \\
1234 &\xmapsto{[4231]} 4231 \xmapsto{[1432]} 2431 \xmapsto{[1243]} 2341 \xmapsto{[4231]} 2314 && \Rightarrow \; [2314] = [4231] \circ [1243] \circ [1432] \circ [4231].
\end{aligned}$$

Die letzten drei Zeilen zeigen, dass eine Permutation auf verschiedene Weisen zerlegt werden kann, und dass diese Zerlegungen unterschiedlich viele Paarpermutationen enthalten können. Man kann sich jedoch überzeugen (versuchen Sie es!), dass alle Paarzerlegungen einer gegebenen Permutation dieselbe **Parität** haben, d.h. die Zahl der Vertauschungen ist entweder immer **gerade** oder immer **ungerade**.

Um eine minimale (kürzest mögliche) Paarzerlegung für eine gegebene Permutation, z.B. $[2413]$, zu finden, beginnen wir mit der natürlich geordneten Folge 1234 und sortieren sie in die gewünschte Form 2413 um, wobei wir jeweils Paarpermutationen durchführen, um die 2 an die erste Stelle zu bringen, dann die 4 an die zweite Stelle etc. So erhalten wir $1234 \overset{[2134]}{\longmapsto} 2134 \overset{[4231]}{\longmapsto} 2431 \overset{[3214]}{\longmapsto} 2413$, und daher $[2413] = [3214] \circ [4231] \circ [2134]$.

Finden Sie für jede der folgenden Permutationen eine minimale Paarzerlegung sowie die Parität:

(a) $[132]$, (b) $[231]$, (c) $[3412]$, (d) $[3421]$, (e) $[15234]$, (f) $[31542]$.

Hausaufgabe 4: Algebraische Manipulationen mit komplexen Zahlen [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](M); (c)[1](E).

Schreiben Sie für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ die folgenden Ausdrücke in Standardform:

(a) $(z+\mathrm{i})^2$, (b) $\dfrac{z}{z+1}$, (c) $\dfrac{\bar{z}}{z-\mathrm{i}}$.

[Ergebniskontrolle für $x=1$, $y=2$: (a) $-8+\mathrm{i}6$, (b) $\frac{3}{4}+\mathrm{i}\frac{1}{4}$, (c) $-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{3}{2}$.]

Hausaufgabe 5: Multiplikation komplexer Zahlen: geometrische Deutung [2]
Punkte: [2](E)

Berechnen Sie für $z_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}}\mathrm{i}$, $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ das Produkt $z_3 = z_1 z_2$, sowie $z_4 = 1/z_1$ und $z_5 = \bar{z}_1$. Finden Sie die Polardarstellung (mit $\phi \in [0, 2\pi)$) aller fünf komplexen Zahlen und skizzieren Sie diese in der komplexen Ebene (in einer Skizze).

Hausaufgabe 6: Ableitungen von hyperbolischen Funktionen [2]
Punkte: (a)[0,5](E); (b,c)[0,5](E); (d)[0,5](E); (e)[0,5](E).

Zeigen Sie, dass die hyperbolischen Funktionen

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}), \qquad \cosh x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}), \qquad \tanh x = \tfrac{\sinh x}{\cosh x},$$
$$\operatorname{csch} x = \tfrac{1}{\sinh x}, \qquad \operatorname{sech} x = \tfrac{1}{\cosh x}, \qquad \coth x = \tfrac{\cosh x}{\sinh x} = \tfrac{1}{\tanh x},$$

folgenden Identitäten erfüllen:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh x = \cosh x$, (c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh x = \sinh x$.

(d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tanh x = 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$, (e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \coth x = 1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$.

Hausaufgabe 7: Ableitungen: Produktregel und Kettenregel [2]
Punkte: [2](E) (Lösen Sie beliebige 4 Teilaufgaben; darüber hinaus: 0.25 Bonus pro Teilaufgabe.)

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:
[Eckige Klammern geben Kontrollergebnisse an: $[a, b]$ steht für $f'(a) = b$.]

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $\left[8, \frac{1}{3}\right]$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^{1/2}}$ $\left[1, \frac{1}{\sqrt{8}}\right]$

(c) $f(x) = -\mathrm{e}^{(1-x^2)}$ $[1, 2]$ (d) $f(x) = 2^{x^2}$ $[1, 4\ln 2]$

(e) $f(x) = 2\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$ $\left[\mathrm{e}, -\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right]$ (f) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$ $\left[1, \frac{1}{2}\right]$

Hausaufgabe 8: Ableitungen von inversen hyperbolischen Funktionen [2]

Punkte: [2](M) (Lösen Sie Teilaufgabe (b); darüber hinaus: 0.5 Bonus pro Teilaufgabe.)

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen von inversen hyperbolischen Funktionen f^{-1}. Fertigen Sie für jeden Fall eine qualitative Skizze an, die $f(x)$ und $f^{-1}(x)$ zeigt. Wenn f nicht monoton ist, untersuchen Sie Bereiche mit positiver oder negativer Steigung getrennt. [Ergebniskontrolle: $[a, b]$ steht für $(f^{-1})'(a) = b$.]

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arcsinh} x \quad [2, \frac{1}{\sqrt{5}}]$ (b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arccosh} x \quad [2, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ (c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arctanh} x \quad [\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$

Hinweis: Die Identität $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ ist nützlich für (a,b), $\operatorname{sech}^2 y = 1 - \tanh^2 y$ für (c).

Hausaufgabe 9: Partielle Integration [4]

Punkte: [4](M) (Lösen Sie beliebige 4 Teilaufgaben; darüber hinaus: 0.5 Bonus pro Teilaufgabe.)

Berechnen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration. [Ergebniskontrolle: $[a, b]$ steht für $I(a) = b$.]

(a) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ x \sin(2x) \quad \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$

(b) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ x^2 \cos(2x) \quad \left[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$

(c) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ (\ln x)\ x \quad \left[1, -\frac{1}{4}\right]$

(d) $I(z) \overset{[n>-1]}{=} \int_0^z \mathrm{d}x\ (\ln x)\ x^n \quad \left[1, \frac{-1}{(n+1)^2}\right]$

(e) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \cos^2 x \quad \left[\pi, \frac{\pi}{2}\right]$

(f) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\ \cos^4 x \quad \left[\pi, \frac{3}{8}\pi\right]$

Hausaufgabe 10: Integration mittels Substitution [3]

Punkte: [3](M) (Lösen Sie beliebige 3 Teilaufgaben; darüber hinaus: 0.5 Bonus pro Teilaufgabe.)

Berechnen Sie folgende Integrale durch Substitution. [Ergebniskontrolle: $[a, b]$ steht für $I(a) = b$.]

(a) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\, x^2 \sqrt{x^3 + 1} \quad \left[2, \frac{52}{9}\right]$

(b) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \sin x\ \mathrm{e}^{\cos x} \quad \left[\frac{\pi}{3}, \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}\right]$

(c) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \cos^3 x \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{6\sqrt{2}}\right]$

(d) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \sinh^3 x \quad \left[\ln 3, \frac{44}{81}\right]$

(e) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \frac{\sin \sqrt{\pi x}}{\sqrt{x}} \quad \left[\frac{\pi}{9}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]$

(f) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \sqrt{x}\ \mathrm{e}^{\sqrt{x^3}} \quad \left[(\ln 4)^{2/3}, 2\right]$

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 25]