

Beispiel 1: Wegverformung

Berechne: $I = \oint_{\gamma} dz f(z)$, mit $f(z) = \frac{1}{z}$ (1)

Lösung: $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ existiert für alle $z \neq 0$. (2)

[Man sagt: $\frac{1}{z}$ hat eine 'Singularität' oder 'Pol' bei $z = 0$.]

Folglich ist $\frac{1}{z}$ analytisch auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

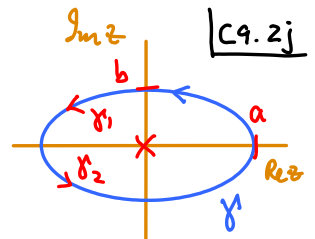
Deswegen kann Wegunabhängigkeit (3c.2) genutzt werden, um Integrationsweg zu einem Kreisweg zu "verformen", für den das Integral aus (C9.2d.5a,b) bekannt ist:

$I = \int_{\gamma_1, \gamma_2} dz f(z) \stackrel{(C9.2f.1)}{=} \int_{\gamma_1} dz f(z) + \int_{\gamma_2} dz f(z)$ (b)

Wegunabhängigkeit: $\stackrel{(C9.3c.2)}{=} \int_{\gamma_3} dz f(z) + \int_{\gamma_4} dz f(z)$ (7)

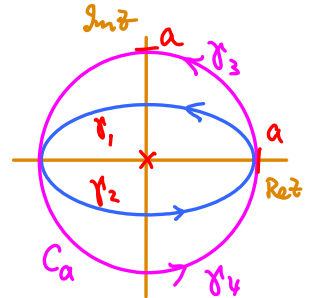
$\stackrel{(C9.2f.1), (5)}{=} \oint_{C_a} dz \frac{1}{z} \stackrel{(C9.2d.3)}{=} I_{-1} \stackrel{(C9.2d.5a)}{=} 2\pi i$ (8)

Kurzfassung: $\oint_{\gamma} dz f(z) = \oint_{C_a} dz \frac{1}{z} = 2\pi i$ (9)



$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ (4)

$C_a = (\gamma_3, \gamma_4)$ (5)



(denn γ_1 und γ_3 haben denselben Anfangs- und Endpunkt, und auf dem Gebiet dazwischen ist $f(z)$ analytisch. Ditto für γ_2 und γ_4 .

Beispiel 1: Wegverformung, Fortsetzung

Alternative Konturverformung:

$\int_{\gamma} = \int_{\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2}$ (1) $\tilde{\gamma}_1 = (\gamma_5, \gamma_6, \gamma_7)$ (2)

$\tilde{\gamma}_2 = (\gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10})$ (3)

$I = \oint_{\gamma} dz f(z) \stackrel{(1), (C9.2f.1)}{=} \int_{\tilde{\gamma}_1} dz f(z) + \int_{\tilde{\gamma}_2} dz f(z)$

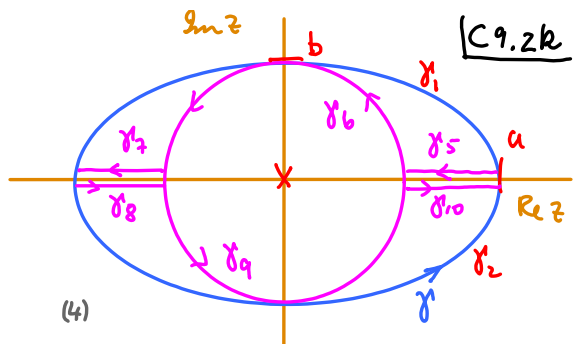
$\tilde{\gamma}_1 \rightarrow \left[\int_{\gamma_5} dz f(z) + \int_{\gamma_6} dz f(z) + \int_{\gamma_7} dz f(z) \right]$
 heben sich weg bilden Kreis heben sich weg
 $\tilde{\gamma}_2 \rightarrow \left[\int_{\gamma_{10}} dz f(z) + \int_{\gamma_9} dz f(z) + \int_{\gamma_8} dz f(z) \right]$
 $= 0 + \int_{C_b} dz f(z) + 0 \stackrel{(C9.2d.3)}{=} I_{-1} \stackrel{(C9.2d.5a)}{=} 2\pi i$ (5)

Aber:

$\int_{\gamma_5} dz f(z) = - \int_{\gamma_{10}} dz f(z)$ (6)

$\int_{\gamma_7} dz f(z) = - \int_{\gamma_8} dz f(z)$ (7)

Kurzfassung: $\oint_{\gamma} dz \frac{1}{z} = \oint_{C_b} dz \frac{1}{z} = 2\pi i$ (9)

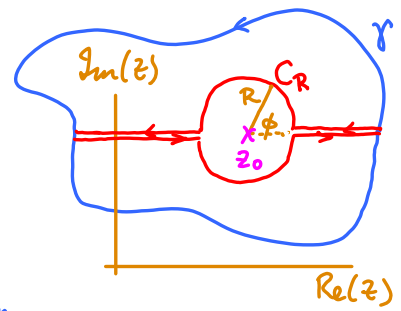


(9) gilt für jede geschlossene Kontur, die $z = 0$ umschliesst!

Beispiel 2: Geschlossener Weg γ um Pol bei $z_0 \neq 0$ ($z_0 \in \mathbb{C}$)

C9.2l

$$I_n^{(+)} \equiv \oint_{\gamma} dz (z - z_0)^n \stackrel{(4)}{=} 2\pi i \delta_{n,-1} \quad (1)$$



Verforme Weg zu Kreis mit Radius R , Mittelpunkt z_0 :

$$C_R \equiv \left\{ z(\phi) = z_0 + R e^{i\phi}, \phi \in (0, 2\pi) \right\} \quad (2)$$

$$I_n^{(+)} \stackrel{(C9.2i.2)}{=} \oint_{C_R} dz (z - z_0)^n \stackrel{(C9.2b.2)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{dz}{d\phi} (z(\phi) - z_0)^n \quad (3)$$

Wegverformung

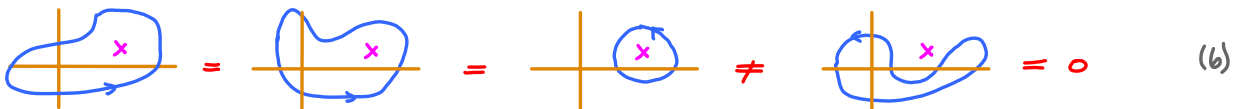
$$[\text{analog zu Seite C9.2d}] \stackrel{(2)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi i R e^{i\phi} (R e^{i\phi})^n \stackrel{(C9.2d.6)}{=} 2\pi i \delta_{n,-1} \quad (4)$$

Analog:

$$I_n^{(-)} \equiv \oint_{\gamma} dz (z - z_0)^n \stackrel{(1)}{=} -2\pi i \delta_{n,-1}$$

[extra Vorzeichen, wegen $\int_0^{-2\pi} d\phi$]
(5)

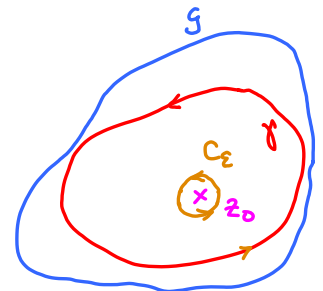
Faustregel: Geschlossener Weg darf beliebig verformt werden, solange dabei keine Singularität überkreuzt wird!



Satz: Cauchy's Integralformel (optional)

C9.2m

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $\gamma \subset G$ ein 'einfach' geschlossener (d.h. Windungszahl = 1), positiv orientierter Weg, $f(z)$ eine Funktion, die auf G analytisch ist, und z_0 ein Punkt innerhalb γ . Dann gilt:



$$f(z_0) = \int_{\gamma} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - z_0} \quad (1)$$

Bemerkenswert: Das Verhalten einer analytischen Funktion im Inneren eines Gebiets (hier das von γ eingeschlossene) ist vollständig durch ihre Werte am Rand festgelegt !!

Begründung: Verforme γ zu einem infinitesimal kleinen Kreis

mit Mittelpunkt z_0 , Radius ε : $C_{\varepsilon} \equiv \left\{ z(\phi) = z_0 + \varepsilon e^{i\phi} \mid \phi \in (0, 2\pi) \right\} \quad (2)$

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - z_0} \stackrel{(C9.2i.2)}{=} \oint_{C_{\varepsilon}} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - z_0} \quad (3)$$

Wegverformung

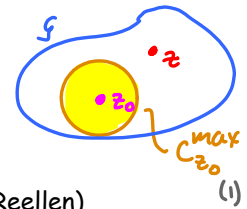
denn für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt
 $f(z) \Big|_{z \in C_{\varepsilon}} = f(z_0 + \varepsilon e^{i\phi}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(z_0) \quad (4)$

kleiner Kreis: $\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z_0)}{2\pi i} \left[\oint_{C_{\varepsilon}} dz \frac{1}{z - z_0} \right] \stackrel{(1.4)}{=} \frac{f(z_0)}{2\pi i} \cdot 2\pi i = f(z_0) \quad (5)$

C9.3 Reihenentwicklung einer analytischen Funktion

C9.3a

Sei $f(z)$ analytisch auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, dann hat die Reihen-Entwicklung v. $f(z)$ um einen Punkt $z_0 \in G$ die Form einer Taylor-Reihe:



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (\text{wie im Reellen})$$

[(1) konvergiert überall in $C_{z_0}^{\max}$ (grösste offene Kreis $\subset G$, mit Mittelpunkt z_0)]

Wichtige Potenzreihen (bereits bekannt im Reellen, gelten genauso im Komplexen):

• Exp: $e^z \stackrel{(C5.2a.4)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$, Konvergenzgebiet: $G = \mathbb{C}$ (2)

• Cos: $\cos z \stackrel{(C5.2a.6)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, $G = \mathbb{C}$ (3)

• Sin: $\sin z \stackrel{(C5.2a.5)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, $G = \mathbb{C}$ (4)

• Geometrische Reihe: $\frac{1}{1-z} \stackrel{(C5.1g.6)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $G = \{|z| < 1\}$ 

Reihenentwicklung einer analytischen Funktion mit Singularität

C9.3b

Sei $f(z)$ analytisch auf einem Gebiet $G \setminus z_0$, mit einer isolierten Singularität (2) (oder 'Pol') bei z_0 , dann hat die Reihen-Entwicklung v. $f(z)$ um z_0 die Form einer 'Laurent-Reihe', die auch negative Potenzen enthält:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (1) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \quad \text{denn } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1-n}} = a_n$$

γ umschließt z_0 (C9.2d.6) $2\pi i \delta_{n,n}$

z_0 heisst 'Pol der Ordnung p ' falls $a_n = 0$ für alle $n < -p$:

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (2)$$

Beispiele: Laurent-Reihe v.

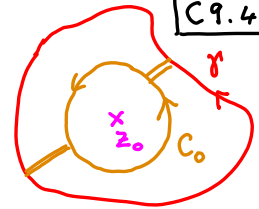
• $e^{1/z}$ bzgl. $z_0 = 0$: $e^{1/z} \stackrel{(C5.2a.4)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^n$ (4) [Taylor-Reihe um $z_0 = 0$]

• $\frac{z^2}{(z-1)^2}$ bzgl. $z_0 = 1$: $\frac{z^2}{(z-1)^2} = \frac{1 + 2(z-1) + (z-1)^2}{(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} + 1$ (5) [Taylor-Entwicklung des Zählers um $z_0 = 1$]
(Pol der Ordnung 2)

9.4 Residuensatz

C9.4a

Sei $f(z)$ analytisch auf einem Gebiet $G \setminus z_0$, mit einem isolierten Pol bei z_0 , und γ ein einfach geschlossener, positiv orientierter Weg, der z_0 umschließt. Dann gilt



$$\oint_{\gamma} dz f(z) \stackrel{(3b.1)}{=} \oint_{\gamma} dz \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \stackrel{\text{Verforme Weg zum Kreis}}{=} \oint_{C_0} dz \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (1)$$

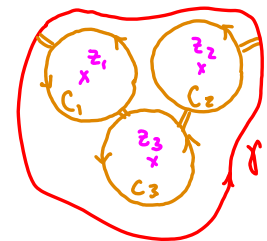
Laurent-Reihe

vertausche mutig Summe u. Integral:

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \underbrace{\oint_{C_0} dz (z-z_0)^n}_{\stackrel{(C9.2d.6)}{=} 2\pi i \delta_{n,-1}} = 2\pi i \cdot a_{-1} \stackrel{(3)}{=} 2\pi i \text{Res}(f, z_0) \quad (2)$$

Offenbar trägt nur der $n = -1$ Term bei! Der Koeffizient $a_{-1} \equiv \text{Res}(f, z_0)$ spielt somit eine wichtige Rolle, und wird 'das Residuum v. f bei z_0 ' genannt:

Verallgemeinerung: $f(z)$ habe mehrere isolierte Pole, und der Weg γ umschließe N Pole, bei z_1, z_2, \dots, z_N



Residuensatz:

$$\oint_{\gamma} dz f(z) \stackrel{(2),(3)}{=} \sum_{j=1}^N 2\pi i \text{Res}(f, z_j) \quad \text{für } \begin{cases} \text{O} \\ \text{O} \end{cases} \quad (4)$$

Residuenformel $\text{Res}(f, z_0) = ?$ (Herleitung optional; Anwendung wichtig!)

C9.4b

$f(z)$ sei (als Formel) gegeben, mit einem Pol der Ordnung P bei z_0 . Die Laurent-Entwicklung v. $f(z)$ bezüglich z_0 hat die allgemeine Form:

$$f(z) \stackrel{(3b.3)}{=} \frac{a_{-P}}{(z-z_0)^P} + \frac{a_{-P+1}}{(z-z_0)^{P-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{gesucht! } O(z-z_0)^{n \geq 0}} \quad (1)$$

$$(z-z_0)^P f(z) \stackrel{(1)}{=} a_{-P} + a_{-P+1}(z-z_0)^1 + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{P-1} + O(z-z_0)^{n \geq P} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^{P-1}}{\partial z^{P-1}} \left[(z-z_0)^P f(z) \right] \stackrel{(2)}{=} (P-1)(P-2) \dots (P-(P-1)) a_{-1} \underbrace{(z-z_0)^{P-1-1-\dots-1}}_{(z-z_0)^0 = 1} + O(z-z_0)^{n \geq 1} \quad (3)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{\partial^{P-1}}{\partial z^{P-1}} \left[(z-z_0)^P f(z) \right] \right] \stackrel{(3)}{=} (P-1)! a_{-1} + \lim_{z \rightarrow z_0} O(z-z_0)^{n \geq 1} \quad (4)$$

$$\boxed{\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{1}{(P-1)!} \frac{\partial^{P-1}}{\partial z^{P-1}} \left[(z-z_0)^P f(z) \right] \right]} \quad \text{NÜTZLICH \& WICHTIG!} \quad (5)$$

In der Praxis kommt der Fall $p = 1$ ('einfacher Pol') am häufigsten vor:

C 9.4c

$$\text{Res}(f, z_0) \stackrel{(4b.5)}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{1}{(1-1)!} \partial_z^{1-1} \left[(z-z_0)^1 f(z) \right] \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z) \quad (1)$$

(merken!)

Beispiel 1: Pole d. Ordnung 1

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} \quad (2) \text{ hat Pol d. Ordnung } p=1 \text{ bei } z_1=i, z_2=-i$$

$$\text{Res}(f, i) \stackrel{(1),(2)}{=} \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i) \frac{1}{(z-i)(z+i)} \right] = \frac{1}{2i} \quad (3)$$

$$\text{Res}(f, -i) \stackrel{(1),(2)}{=} \lim_{z \rightarrow -i} \left[(z+i) \frac{1}{(z-i)(z+i)} \right] = \frac{1}{-2i} \quad (4)$$

Faustregel: kürze Pol weg, setze $z = z_0$ im übrigen Faktor.

Beispiel 2: Pol d. Ordnung 2

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2} \quad (4) \text{ hat Pol d. Ordnung } p=2 \text{ bei } z_0=1$$

$$\text{Res}(f, 1) \stackrel{(4b.5)}{=} \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{(2-1)!} \partial_z^{2-1} \left[(z-1)^2 f(z) \right] \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\partial_z (z-1) \frac{z^2}{(z-1)^2} \right] \quad (5)$$

$$= z \Big|_{z=1} = 2 \quad (6) \quad [\text{konsistent mit (3b.5)}]$$

Beispiel 3: Gewicht eines Lorentz-Peaks

C 9.4d

$$\pi \stackrel{?!?}{=} I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2+1} \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} I_{\Gamma_0} \quad (1)$$

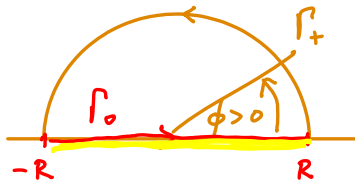


$$I_{\Gamma_0} \equiv \int_{-R}^R dx \frac{1}{x^2+1} = \int_{\Gamma_0} dz \frac{1}{z^2+1} \equiv f(z) \leftarrow \text{'analytische Fortsetzung von } f(x) \text{ nach } f(z)'$$

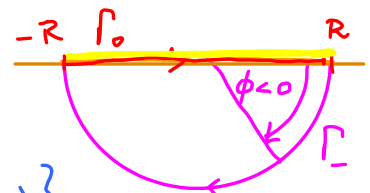
$$\Gamma_0 = \{z(x) = x, x \in (-R, R)\}$$

'Schließe' den Integrationsweg, um geschlossene Kontur zu erhalten (und Residuensatz zu nutzen):

Option 1:
in oberer
Halbebene:



Option 2:
in unterer
Halbebene:



Parametrisierung der
Halbkreise mit Radius R:

$$\Gamma_{\pm} = \{z(\phi) = R e^{i\phi}, \phi \in (0, \pm\pi)\} \quad (3)$$

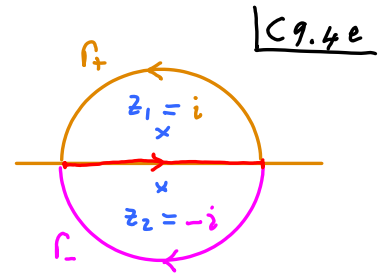
Für beide Optionen ist das Linienintegral entlang Halbkreis gleich Null im Limes $R \rightarrow \infty$:

$$I_{\Gamma_{\pm}} \equiv \int_{\Gamma_{\pm}} dz f(z) \stackrel{(C9.2b.2)}{=} \int_0^{\pm\pi} d\phi \frac{dz}{d\phi} f(z(\phi)) = \int_0^{\pm\pi} d\phi \frac{iR e^{i\phi}}{(R e^{i\phi})^2 + 1} \xrightarrow{R \gg 1} \sim \frac{1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (4)$$

Also können wir die 'Kontur schließen':

$$I \stackrel{(5d.4)}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[I_{\Gamma_0} + I_{\Gamma_{\pm}} \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(\Gamma_0, \Gamma_{\pm})} dz f(z) \quad (1)$$

oder: $(\Gamma_0, \Gamma_{\pm}) = \curvearrowright$



Finde Pole und Residuen von $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} \quad \text{hat zwei Pole d. Ordnung } 1, \quad (2)$$

(siehe 4c.3): bei $z_1 = i$ mit $\text{Res}(f, z_1) \stackrel{(4c.1)}{=} \frac{1}{(z_1 - z_2)} = \frac{1}{i - (-i)} = \frac{1}{2i}$ (3)

(siehe 4c.d): und $z_2 = -i$ mit $\text{Res}(f, z_2) \stackrel{(4c.1)}{=} \frac{1}{(z_2 - z_1)} = \frac{1}{-i - i} = \frac{1}{-2i}$ (4)

Laut Residuensatz liefert nur der von der Kontur eingeschlossene Pol einen Beitrag:

Option 1: $I \stackrel{(1)}{=} I_{\curvearrowright} = + 2\pi i \text{Res}(f, z_1) = + 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$ (5)

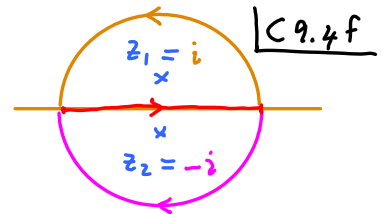
Option 2: $I \stackrel{(1)}{=} I_{\curvearrowleft} = - 2\pi i \text{Res}(f, z_2) = - 2\pi i \cdot \frac{1}{-2i} = \pi$ (6)

wegen positiver/negativer Integrationsrichtung, siehe (C9.3f.1 & 5)

konsistent! 😊

Kurzfassung für Erfahrene

$$I \stackrel{(C5.11.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{\curvearrowright} dz f(z) = \int_{\curvearrowleft} dz f(z) \quad (1)$$



$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} \quad \text{hat zwei Pole d. Ordnung } 1 \quad \text{bei } z = \pm i \quad (2)$$

$$\text{Res}(f, i) \stackrel{(5c.1)}{=} \frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i}, \quad \text{Res}(f, -i) \stackrel{(5c.1)}{=} \frac{1}{-i-i} = -\frac{1}{2i} \quad (3)$$

$$I \stackrel{(1)}{=} I_{\curvearrowright} = + 2\pi i \text{Res}(f, \pm i) = \pm 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{\pm 2i}\right) = \pi \quad (4)$$

Allgemeine Faustregel: schließen der Kontur entlang Halbkreis funktioniert, falls

$$I_{\Gamma_{\pm}} \stackrel{(5d.4)}{=} \int_{\Gamma_{\pm}} dz f(z) \stackrel{(C9.2b.2)}{=} \int_0^{\pm\pi} \frac{dz}{d\phi} f(z(\phi)) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (5)$$

$iR e^{i\phi} = iz$

also, falls:

$$z f(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für } \phi \in (0, \pm\pi) \quad (6)$$

Beispiel 4: Fourier-Transformation v. Lorenz-Peak

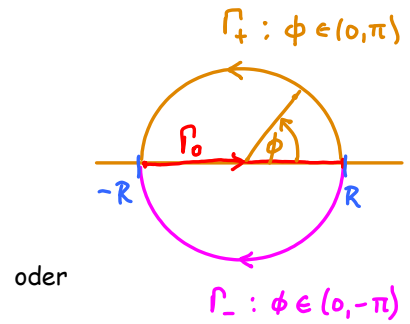
C9.4g

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} e^{-\gamma|t|} \stackrel{(C6.3c.6)}{=} \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \quad (1) \iff I(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \stackrel{?}{=} e^{-\gamma|t|} \quad (2)$$

Berechne (2) mittels Wegintegral; unterscheide $\begin{cases} -|t| = t < 0 \\ +|t| = t > 0 \end{cases}$

$$I_{\pm}(t \leq 0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i(\mp|t|)\omega} \frac{\gamma/\pi}{\omega^2 + \gamma^2} \stackrel{(3)}{=} f_{\pm}(\omega)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} dz f_{\pm}(z), \quad f_{\pm}(z) = \frac{e^{\pm i|t|z} \gamma/\pi}{z^2 + \gamma^2} \quad (4) \quad (5)$$



Füge Halbkreis hinzu, um geschlossene Kontur zu erhalten:

Es gibt zwei Optionen: $\Gamma_{\pm} = \{z(\phi) = R e^{i\phi} = x(\phi) + iy(\phi), \phi \in (0, \pm\pi)\}$ (6)

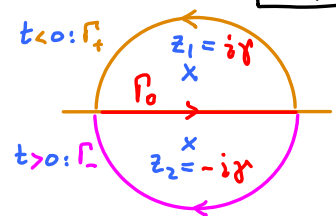
$$\int_{\Gamma_{\pm}} dz \frac{e^{\pm i|t|z}}{z^2 + \gamma^2} \stackrel{(C9.2b.2)}{=} \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\pm\pi} d\phi \frac{i R e^{i\phi}}{(R e^{i\phi})^2 + \gamma^2} \stackrel{(4d.4)}{=} \frac{e^{\pm i|t|x(\phi)} e^{\pm i|t|y(\phi)}}{(R e^{i\phi})^2 + \gamma^2} \xrightarrow{R \gg 1} \sim \frac{e^{\mp|t|y(\phi)}}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (7)$$

oder $\begin{cases} \eta = +, y > 0 \\ \eta = -, y < 0 \end{cases}$ Für $t \leq 0$ brauchen wir $\mp y(\phi) < 0$, also $y(\phi) \geq 0$, also Γ_{\pm} (8)

Fazit: schlieÙe Weg in oberen Halbebene für $-|t| = t < 0$
in unteren Halbebene für $|t| = t > 0$

C9.4h

$$I_{\pm}(t \leq 0) \stackrel{(i.4, i.6)}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(\Gamma_0, \Gamma_{\pm})} dz f_{\pm}(z) \quad (2)$$



$$f_{\pm}(z) \stackrel{(i.5)}{=} \frac{\gamma/\pi e^{\pm i|t|z}}{(z - i\gamma)(z + i\gamma)} \equiv \frac{\gamma/\pi e^{\pm i|t|z}}{(z - z_1)(z - z_2)} \quad (3) \quad \text{hat zwei Pole d. Ordnung 1 bei } \begin{cases} z_1 = i\gamma \\ z_2 = -i\gamma \end{cases}$$

Residuensatz: nur eingeschlossener Pol trägt bei, also brauchen wir nur:

$$\text{Res}(f_{+}, z_1) \stackrel{(e.1)}{=} \frac{\gamma/\pi e^{+i|t|z_1}}{(z_1 - z_2)} = \frac{\gamma/\pi e^{+i|t|i\gamma}}{i\gamma - (-i\gamma)} = \frac{e^{-\gamma|t|}}{2\pi i} \quad (4)$$

$$\text{Res}(f_{-}, z_2) \stackrel{(e.1)}{=} \frac{\gamma/\pi e^{-i|t|z_2}}{(z_2 - z_1)} = \frac{\gamma/\pi e^{-i|t|(-i\gamma)}}{-i\gamma - i\gamma} = \frac{e^{-\gamma|t|}}{-2\pi i} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} I_{+} &\stackrel{(2)}{=} +2\pi i \text{Res}(f_{+}, z_1) \stackrel{(4)}{=} \frac{2\pi i}{2\pi i} e^{-\gamma|t|} \quad (6) \\ I_{-} &\stackrel{(2)}{=} -2\pi i \text{Res}(f_{-}, z_2) \stackrel{(5)}{=} \frac{-2\pi i}{-2\pi i} e^{-\gamma|t|} \quad (7) \end{aligned} \right\} = e^{-\gamma|t|} \stackrel{(i.2)}{=} \quad (8)$$

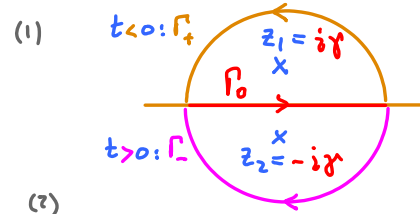
wegen Integrationsrichtung, siehe (C9.21.1 & 5)



Kurzfassung für Erfahrene

C9.4i

$$I(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \stackrel{?}{=} e^{-\gamma|t|} \quad (1)$$



$$I_{\pm}(t \leq 0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i(\pm|t|)z} \frac{\gamma/\pi}{z^2 + \gamma^2} = \int_{\Gamma_{\pm}} dz f_{\pm}(z) \quad (2)$$

$$\equiv f_{\pm}(z)$$

denn $\frac{e^{\pm i|t|z}}{R} \sim \frac{e^{\pm|t|\text{Im}(z)}}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ für $\text{Im}(z) \rightarrow \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$, also entlang Γ_{\pm} ✓ (3)

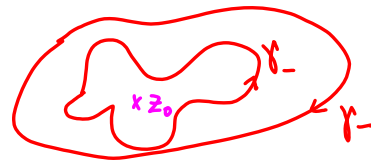
$$f_{\pm}(z) = \frac{\gamma/\pi e^{\pm i|t|z}}{(z-i\gamma)(z+i\gamma)} \quad \text{hat zwei Pole d. Ordnung 1 bei } \pm i\gamma \quad (4)$$

$$I_{\pm}(t \leq 0) = I_{\Gamma_{\pm}} = \pm 2\pi i \text{Res}(f_{\pm}, \pm i\gamma) = \pm 2\pi i \frac{\gamma/\pi e^{\pm i|t|(\pm i\gamma)}}{\pm 2i\gamma} = e^{-\gamma|t|} \quad (5)$$

Zusammenfassung: C9.3-4 Analytische Funktionen II

ZC 9.3-4a

$$I_n^{(\pm)} \equiv \oint_{\gamma_{\pm}} dz (z-z_0)^n = \pm 2\pi i \delta_{n,-1}$$



Reihenentwicklungen:
- wenn f analytisch ist:

$$f(z) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

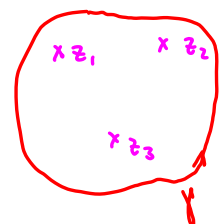
- wenn f einen Pol der Ordnung p bei $z = z_0$ hat:

$$f(z) \stackrel{\text{Laurent}}{=} \sum_{n=-p}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$\equiv \text{Res}(f, z_0)$

$f(z)$ habe mehrere isolierte Pole,

und der Weg γ umschlieÙe N Pole, bei z_1, z_2, \dots, z_N



Residuensatz: $\oint_{\gamma} dz f(z) \stackrel{(2),(3)}{=} \sum_{j=1}^N 2\pi i \text{Res}(f, z_j)$

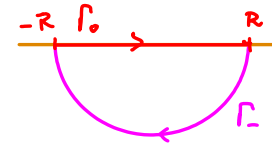
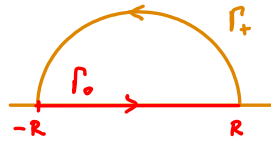
Residuenformel: $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{1}{(p-1)!} \partial_z^{p-1} \left[(z-z_0)^p f(z) \right] \right]$

Kontur schließen:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_0} dz f(z) \quad (1)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(\Gamma_0, \Gamma_{\pm})} dz f(z) \quad (2)$$

$$= \pm 2\pi i \sum_j \text{Res}(f, z_j^{\pm}), \quad (3)$$



ZC 9.3-46

falls $\lim_{|z| \rightarrow \infty} [z f(z)] = 0$

$\left. \begin{matrix} z_j^+ \\ z_j^- \end{matrix} \right\}$ Pole innerhalb

Diese Strategie funktioniert insbesondere für Integrale folgender Form:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{mit} \quad P(x) = \sum_{j=0}^n p_j x^j, \quad Q(x) = \sum_{j=0}^m q_j x^j \quad \text{falls: } m \geq n+2 \quad (4)$$

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{Q(\omega)} d\omega = \begin{cases} \oint_{\Gamma_+} dz \frac{e^{+iz|t|}}{Q(z)} & \text{falls } t < 0 \quad (5) \end{cases}$$

$$Q(\omega) = \sum_{j=2}^m q_j \omega^j \quad \begin{cases} \oint_{\Gamma_-} dz \frac{e^{-iz|t|}}{Q(z)} & \text{falls } t > 0 \quad (6) \end{cases}$$