

C9: Komplexe Analysis (KA)

Saff & Snyder, Fundamentals of Complex Analysis, Prentice Hall, 1976.

C9.1a



Cauchy

Motivation: Differenzieren und Integrieren in der komplexen Ebene


Vorschau: Eine komplexe Funktion $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sei nur von der Kombination

$$z = x + iy \text{ abhängig, } (x, y) \mapsto f(z) = f(x + iy) \equiv \underbrace{u(x, y)}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{v(x, y)}_{\text{Imaginärteil}} \quad (1)$$

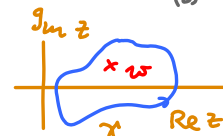
und 'komplex differenzierbar' ($\frac{df}{dz}$ existiert) in U . Dann gelten (u.a.):

- Cauchy-Riemann-Gleichungen: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$

- Geschlossene Linienintegrale in \mathbb{C} liefern 0: $\oint_{\gamma} dz f(z) = 0 \quad (3)$



- Integralsatz von Cauchy: $f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dz \frac{f(z)}{z - w} \quad (4)$



- 'Residuen-Satz': Sei $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-w)^n \quad (5)$ (verallgemeinerte Taylor-Reihe, mit Divergenz bei w)

dann: $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dz g(z) = a_{-1} \quad (6)$

Wichtige Anwendung der KA in der Physik: als Hilfsmittel beim Berechnen von Integralen. Besonders wichtig für 'konforme Feldtheorie' & Stringtheorie

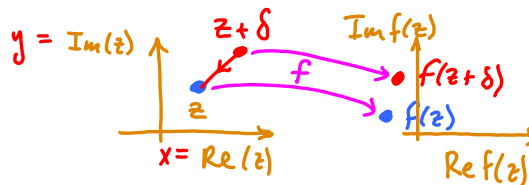
C9.1 Komplexe Differenzierbarkeit

C9.1b

Definition: Eine komplexwertige Funktion $f(z)$ einer komplexen Variable $z \equiv x + iy$,

$$f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad [U \text{ offen}]$$

$$z \mapsto f(z) \quad \text{(wichtig!)} \quad (1)$$



heißt 'komplex differenzierbar' an der Stelle $z \in U$

falls folgender Limes existiert:

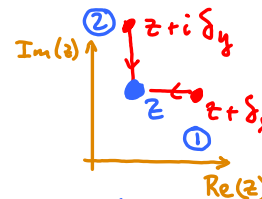
$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta) - f(z)}{\delta} \equiv f'(z) \equiv \frac{df(z)}{dz} \quad (2)$$

(beachte Notation: totale Ableitung nach z)

Anmerkung: Der Limes (2) muss unabhängig von der Richtung sein,

entlang der δ nach Null strebt. Das ist gewährleistet, wenn

f von x und y nur in der Kombination $x + iy$ abhängt.



①: $\delta = \delta_x$: $\lim_{\delta_x \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta_x) - f(z)}{\delta_x} = \frac{\partial f(z(x+iy))}{\partial x} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \quad (3)$

②: $\delta = i \delta_y$: $\lim_{i \delta_y \rightarrow 0} \frac{f(z + i \delta_y) - f(z)}{i \delta_y} = \frac{1}{i} \frac{\partial f(z(x+iy))}{\partial y} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{i} f'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = f'(z) \quad (4)$

Definition: Jeder Punkt z bei dem $f'(z)$ nicht existiert, ist eine 'Singularität' von $f(z)$

Definition: f heisst 'analytisch' auf U , falls f in ganz U komplex differenzierbar ist. | C9.1c
(1)

Anmerkung zur Nomenklatur: Manche Autoren nennen eine Funktion 'holomorph' in U falls sie (1) erfüllt, und 'analytisch' in U falls ihre Taylor-Entwicklung überall in U konvergiert. Man kann zeigen, dass eine komplexe Funktion genau dann holomorph ist, wenn sie analytisch ist. Deswegen verzichten wir hier auf eine Unterscheidung.

Beispiele für analytische Funktionen:

• $z^n, e^z, \sin z, \cos z$ sind analytisch auf $U = \mathbb{C}$ (2)

• $\frac{1}{z-z_0}$ ist analytisch auf $U = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ [das ganze \mathbb{C} , ausser z_0] (3)

Beispiele für nicht-analytische Funktionen:

• $|z|^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)$ hängt nicht nur von $x+iy$ ab, sondern auch von $x-iy$ (4)

• $\bar{z} = x-iy$ ist nicht eine analytische Funktion von $z = x+iy$ (5)

denn Limes ist nicht eindeutig: $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\overline{z+\delta} - \bar{z}}{\delta} = \frac{\bar{\delta}}{\delta} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \delta = \delta_x = \bar{\delta} \\ -1 & \text{falls } \delta = i\delta_y = -\bar{\delta} \end{cases}$ (6)

Ableitungsregeln für analytische Funktionen (wie im Reellen): | C9.1d

(i) Linearität: $\frac{d}{dz} [\lambda f(z) + \mu g(z)] = \lambda f'(z) + \mu g'(z)$ (1)

(ii) Produktregel: $\frac{d}{dz} [f(z) g(z)] = f'(z) g(z) + f(z) g'(z)$ (2)

Folgerung: $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$ [Abl. v. Polynomen wie im Reellen] (3)

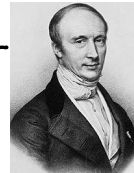
(iii) Quotientenregel: $\frac{d}{dz} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{f'(z) g(z) - f(z) g'(z)}{g^2(z)}$ falls $g(z) \neq 0$ (4)

(iii) Kettenregel: $\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z)) g'(z)$ (5)

Komplexe Differenzierbarkeit ist viel stärkere Bedingung als reelle Differenzierbarkeit. Wir diskutieren nur einige ihrer weitreichenden Folgen für analytische Funktionen.

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

C9.1e



Cauchy

Riemann

Schreibe $z \equiv x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$ (1)

$f(z) = f(x + iy) \equiv u(x, y) + i v(x, y) \quad (u, v \in \mathbb{R})$ (2)

Also: $u \equiv \operatorname{Re} f(z), \quad v \equiv \operatorname{Im} f(z)$ (3)

$f(z)$ sei komplex differenzierbar, dann gilt: $f'(z) = \frac{d}{dz} f(z) \stackrel{(b.3)}{=} \partial_x f(z) \stackrel{(b.4)}{=} \frac{1}{i} \partial_y f(z)$ (4)

Aber aus (2) folgt: $f'(z) \stackrel{(4)}{=} \partial_x f(z) \stackrel{(2)}{=} \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y)$ (5)

und auch: $f'(z) \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{i} \partial_y f(z) \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{i} \partial_y u(x, y) + i \frac{1}{i} \partial_y v(x, y)$ (6)

Laut (4) ist (5) = (6): $\partial_x u + i \partial_x v \stackrel{(5)}{=} f'(z) \stackrel{(6)}{=} -i \partial_y u + \partial_y v$ (7)

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$\partial_x u = \partial_y v$ (8)

$\partial_x v = -\partial_y u$ (9)

Folgerung: komplexe Differenzierbarkeit \Rightarrow Cauchy-Riemann-Gleichungen (CRG)

Beispiel:

C9.1e1

$f(z) = (1 + iz)^2 = 1 + 2iz - z^2$ (1)

$= 1 + 2i(x + iy) - (x + iy)^2$ (2)

$= \underbrace{1 + 2(-y) - (x^2 - y^2)}_{u(x, y)} + i \underbrace{(2x - 2xy)}_{v(x, y)}$ (3)

$= u(x, y) + i v(x, y)$ (4)

$u(x, y) = 1 - 2y - x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 2x - 2xy$ (5)

Gelten CRG?

$\partial_x u = -2x, \quad \partial_x v = 2 - 2y = -\partial_y u$ ✓ [also gilt (e.9)] (6)

$\partial_y u = -2 + 2y, \quad \partial_y v = -2x = \partial_x u$ ✓ [also gilt (e.8)] (7)

Umkehrschluss gilt auch: Cauchy-Riemann-Gl. \Rightarrow komplexe Differenzierbarkeit: C9.1f

Satz: Sei $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Abbildung, mit $f = u + iv$ d.h. (1)

$$u(x,y) \equiv \operatorname{Re} f(x+iy), \quad v(x,y) \equiv \operatorname{Im} f(x+iy) \quad (2)$$

Falls u, v stetig differenzierbar sind für $z \in U$ und die Cauchy-Riemann-Gl. erfüllen, ist f komplex differenzierbar an der Stelle z .

Begründung: (Optional) Schreibe $\delta = \delta_x + i\delta_y$, mit $\delta_x, \delta_y \in \mathbb{R}$ (3)

Taylor für u :
$$u(x + \delta_x, y + \delta_y) \stackrel{(C5.5b.1)}{=} u(x,y) + \delta_x \partial_x u(x,y) + \delta_y \partial_y u(x,y) + \mathcal{O}(|\delta|^2) \quad (4)$$

Taylor für v :
$$v(x + \delta_x, y + \delta_y) \stackrel{(C5.5b.1)}{=} v(x,y) + \delta_x \partial_x v(x,y) + \delta_y \partial_y v(x,y) + \mathcal{O}(|\delta|^2) \quad (5)$$

(4+5)
$$f(z + \delta) - f(z) = \delta_x \partial_x u + i \delta_x \partial_x v + \delta_y \partial_y u + \delta_y i \partial_y v + \mathcal{O}(|\delta|^2) \quad (6)$$

$$\Big|_{\delta \rightarrow 0}$$

Nutze CRG, um ∂_y durch ∂_x zu ersetzen: C9.1g

(f.6):
$$f(z + \delta) - f(z) = \delta_x \overset{(1)}{\partial_x} u + i \delta_x \overset{(2)}{\partial_x} v + \delta_y \overset{(3)}{\partial_y} u + \delta_y i \overset{(4)}{\partial_y} v + \mathcal{O}(|\delta|^2) \quad (1)$$

 CRG: (e.9) $-\partial_x v$ (e.8) $\partial_x u$

$$= \underbrace{(\overset{(1)}{\delta_x} + i \overset{(4)}{\delta_y})}_{\delta} \partial_x u + \underbrace{(\overset{(2)}{\delta_x} + i \overset{(3)}{\delta_y})}_{\delta} i \partial_x v + \mathcal{O}(|\delta|^2) \quad (2)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(z + \delta) - f(z)] = \partial_x (u + iv) = \boxed{\partial_x f(z)} \stackrel{(b.3)}{=} \frac{d}{dz} f(z) \quad (3)$$

Es geht auch anders herum: nutze CRG, um ∂_x durch ∂_y zu ersetzen:

(f.6):
$$f(z + \delta) - f(z) = \delta_x \overset{(1)}{\partial_x} u + i \delta_x \overset{(2)}{\partial_x} v + \delta_y \overset{(3)}{\partial_y} u + \delta_y i \overset{(4)}{\partial_y} v + \mathcal{O}(|\delta|^2) \quad (4)$$

 CRG: (e.8) $\partial_y v$ (e.9) $-\partial_y u$

$$= -i \underbrace{(\overset{(2)}{\delta_x} + i \overset{(3)}{\delta_y})}_{\delta} \partial_y u + -i \underbrace{(\overset{(1)}{\delta_x} + i \overset{(4)}{\delta_y})}_{\delta} i \partial_y v + \mathcal{O}(|\delta|^2) \quad (5)$$

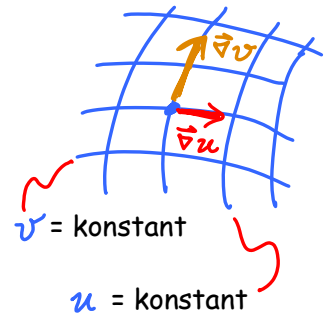
$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} [f(z + \delta) - f(z)] = \frac{1}{i} \partial_y (u + iv) = \boxed{\frac{1}{i} \partial_y f(z)} \stackrel{(b.3)}{=} \frac{d}{dz} f(z) \quad (6)$$

Fazit: f ist komplex differenzierbar in z !! □

Anmerkung: $(x, y) \mapsto u(x, y) \equiv \operatorname{Re} f(x+iy)$
 $(x, y) \mapsto v(x, y) \equiv \operatorname{Im} f(x+iy)$ } sind beide Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ | C9.1h
(1)

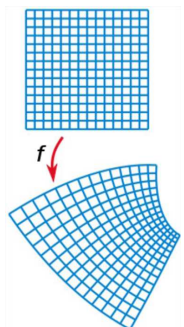
Folgerung aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen:
 Die Höhenlinien dieser Abbildungen (1) sind orthogonal zu einander: (2)

Begründung: (V3.2f.7)
 Höhenlinien von u sind $\perp \vec{\nabla} u = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix}$ (3)
 $(u(x, y) = \text{konstant})$:
 Höhenlinien von v sind $\perp \vec{\nabla} v = \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$ (4)
 $(v(x, y) = \text{konstant})$:



$$\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = (\partial_x u)(\partial_x v) + (\partial_y u)(\partial_y v) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} u \perp \vec{\nabla} v \quad (5)$$

CRG: (e.9) $-\partial_y u$ (e.8) $\partial_x u$ □



Weitere Folgerung: eine analytische Funktion f definiert [via (1)]
 eine 'konforme' ('winkeltreue') Abbildung zwischen den
 Koordinatensystemen (x, y) und $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ (6)

C9.2 Integration im Komplexen

| C9.2a

Hauptsatz der Analysis für komplexe Funktionen einer reellen Variable:

Sei $f(t) : (t_0, t_1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexwertige, stetige Funktion einer reellen Variable t , mit Stammfunktion $F(t)$, d.h. $F'(t) = f(t) \quad \forall t \in (t_0, t_1)$, dann

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt = F(t_1) - F(t_0) \quad \text{[genau wie im Reellen]} \quad (1)$$

Triviales Beispiel: $\int_{t_0}^{t_1} [\sin t + i \cos t] dt = [-\cos t + i \sin t]_{t_0}^{t_1} \quad (2)$

Integration einer Funktion $f(z)$ einer komplexen Variablen, $z = x + iy$, entspricht einem Linienintegral in der komplexen Ebene. Dafür benötigen wir folgende Begriffe:

Definition: Eine Menge $G \subset \mathbb{C}$ (oder auch $G \subset \mathbb{R}^n$) heißt 'Gebiet' falls (3)

$G \neq \emptyset$ (nicht leer) und 'zusammenhängend' ist (d.h. je zwei Punkte können durch eine stetige Kurve verbunden werden, welche das Gebiet nicht verläßt).



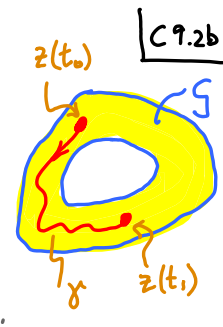
Definition: ein Gebiet ist 'einfach zusammenhängend', falls sich jeder geschlossene Weg zu einem Punkt zusammenziehen lässt.



Definition: Komplexes Wegintegral (oder 'Kontur-Integral')

Sei γ eine glatte, gerichtete Kurve in einem zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, parametrisiert durch die reelle Variable $t \in (t_0, t_1) \subset \mathbb{R}$.

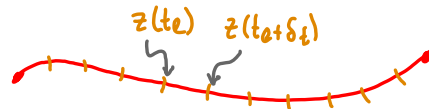
$$\gamma: (t_0, t_1) \subset \mathbb{R} \rightarrow G \subset \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t) \quad (1)$$



Ferner sei $f: G \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z)$ eine stetige Funktion auf dem Gebiet G .

Das 'komplexe Wegintegral ('Konturintegral') von $f(z)$ entlang γ ist wie folgt definiert:

$$\int_{\gamma} dz f(z) \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dz(t)}{dt} f(z(t)) \quad (2)$$



Interpretation als

$$\text{Riemann-Summe: } = \lim_{\delta_t \rightarrow 0} \sum_{\ell} \frac{dz(t_{\ell})}{dt} f(z(t_{\ell})) = \lim_{\delta_t \rightarrow 0} \sum_{\ell} \underbrace{(z(t_{\ell} + \delta_t) - z(t_{\ell}))}_{\text{green}} f(z(t_{\ell})) \quad (3)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Analog zu Linienintegral eines 2d-Vektorfeldes, } u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \bar{r} \mapsto \vec{u}(\bar{r}) \quad (4) \\ \int_{\gamma} d\bar{r} \cdot \vec{u}(\bar{r}) \stackrel{(V1m.6)}{=} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \vec{u}(\bar{r}(t)) \stackrel{(V1m.2)}{=} \lim_{\delta_t \rightarrow 0} \sum_{\ell} (\bar{r}(t_{\ell} + \delta_t) - \bar{r}(t_{\ell})) \cdot \vec{u}(\bar{r}(t_{\ell})) \quad (5) \end{array} \right.$$

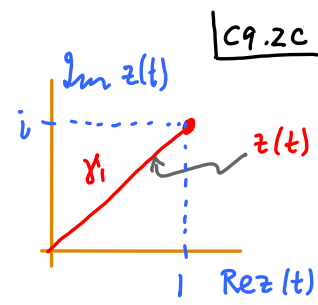
Kann gezeigt werden: Wegintegral ist unabhängig von der Parametrisierung (d.h. eine andere Parametrisierung des selben Weges liefert dasselbe Ergebnis).

Einfaches Beispiel 1

$$f(z) = z, \quad \gamma_1 = \{ z(t) = (1+i)t, \quad t \in (0,1) \} \quad (1)$$

$$\int_{\gamma_1} dz f(z) \stackrel{(2b.2)}{=} \int_0^1 dt \frac{dz}{dt} \overbrace{((1+i)t)}^{f(z(t))=z(t)} \quad (2)$$

$$= (1+i)^2 \int_0^1 dt t = \frac{1}{2} (1+i)^2 = \frac{1}{2} (1+2i-1) = i \quad (3)$$

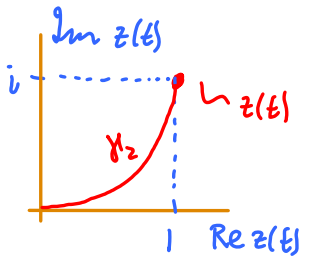


Einfaches Beispiel 2

$$f(z) = z, \quad \gamma_2 = \{ z(t) = t + it^2, \quad t \in (0,1) \} \quad (4)$$

$$\int_{\gamma_2} dz z \stackrel{(2b.2)}{=} \int_0^1 dt \frac{dz}{dt} \overbrace{(t + it^2)}^{f(z(t))=z(t)} \quad (5)$$

$$= \int_0^1 dt [t + (2i+i)t^2 - 2t^3] = \frac{1}{2} + 3i \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{4} = i \stackrel{!!}{=} (3)$$



Schnellster Rechenweg, mittels Gl. (C9.2e.5):

$$\int_{\gamma} dz z = \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z(0)}^{z(1)} = \frac{1}{2} (1+i)^2 - 0 = (3) \checkmark$$

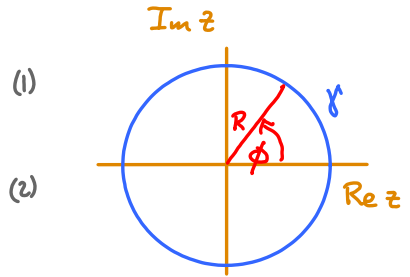
kein Zufall, siehe Seite C9.2e!

Wichtiges Beispiel: Kreisintegral v. z^n ($n \in \mathbb{Z}$) um den Ursprung herum

C9.2d

γ sei Kreis in \mathbb{C} , mit Radius R , Mittelpunkt bei $z = 0$:

$$\gamma: \{ z(\phi) = R e^{i\phi}, \phi \in (0, 2\pi) \}$$



Substitution: $\gamma: z(\phi) = R e^{i\phi}$

$$I_n \equiv \oint_{\gamma} dz z^n \stackrel{(b.2)}{=} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{dz}{d\phi} (z(\phi))^n \quad (1)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \underbrace{i R e^{i\phi}}_{(2)} (R e^{i\phi})^n \quad (2)$$

$$= i R^{n+1} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\phi(1+n)} = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } n = -1 \\ \frac{i R^{n+1}}{i(n+1)} \left[e^{i(n+1)\phi} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{falls } n \neq -1 \end{cases} \quad (3)$$

$$= \boxed{2\pi i \delta_{n,-1}} \quad (4)$$

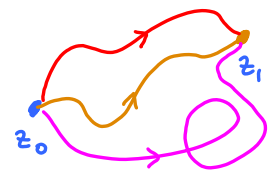
Wegunabhängigkeit

C9.2e

Satz: $f(z) : G \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig und dessen Stammfunktion $F(z)$ existiere überall in G , d.h. $F'(z) = f(z) \quad \forall z \in G$.

Dann gilt für jede glatte Kontur $\gamma \subset G$, mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1 :

$$\int_{\gamma} dz f(z) = F(z_1) - F(z_0) \quad (1)$$



⇒ Ergebnis hängt nur von den Anfangs- und Endpunkten ab, nicht vom Weg dazwischen! [Beispiel: (C9.2c.4) = (C9.2c.8)]

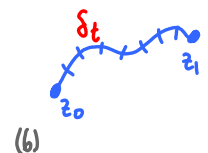
Begründung: Parametrisiere Weg mit $\gamma: \{ (t_0, t_1) \rightarrow z(t) \subset G, \begin{matrix} z(t_0) = z_0 \\ z(t_1) = z_1 \end{matrix} \}$ (2)

$$\text{Dann } \int_{\gamma} dz f(z) \stackrel{(b.2)}{=} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dz}{dt} F'(z(t)) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} [F(z(t))] \quad (3)$$

$$\stackrel{(a.1)}{=} F(z(t_1)) - F(z(t_0)) \stackrel{(3)}{=} F(z_1) - F(z_0) \quad \square \quad (4)$$

(4) ermöglicht Interpretation für Wegintegral als Summe:

$$\int_{\gamma} dz f(z) \stackrel{(4)}{=} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{\ell} \delta z_{\ell} \left(\frac{dF}{dt} \right)_{\ell} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{\ell} \delta F_{\ell} \quad (5)$$



Definition: Eine 'zusammengesetzte Kontur'

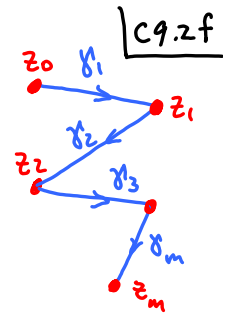
$$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$$

bestehe aus glatten, gerichteten Teilstücken

γ_i . Das Wegintegral

einer auf Γ stetigen Funktion $f(z)$ ist definiert durch:

$$\int_{\Gamma} dz f(z) \equiv \int_{\gamma_1} dz f(z) + \int_{\gamma_2} dz f(z) + \dots + \int_{\gamma_m} dz f(z) \quad (1)$$



Satz (e.2) gilt für jedes Teilstück, also auch für zusammengesetzte Kontur:

$$\int_{\gamma} dz f(z) = [F(z_1) - F(z_0)] + [F(z_2) - F(z_1)] + [F(z_3) - F(z_2)] + \dots + [F(z_m) - F(z_{m-1})] = F(z_m) - F(z_0) \quad (2)$$

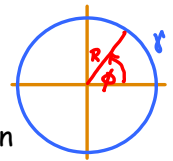
Korollar [mit denselben Voraussetzungen wie (e.2)]:

Für einen geschlossenen Weg ist Anfangspunkt = Endpunkt:

$$\Rightarrow z_0 = z_m$$

$$\oint dz f(z) \stackrel{(2e.2)}{=} 0 \quad (3)$$

Beispiel: (2d.5b) für $n \neq -1$; $f(z) = z^n$, $F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$



[Für $n = -1$, (2d.5a), sind Voraussetzungen v. (e.2) nicht erfüllt, da die Stammfunktion von $1/z$ nämlich $\ln(z)$, nicht überall auf einem geschlossenem Weg um 0 herum existiert.]

Falls $f(z)$ analytisch ist, läßt sich (3) zeigen auch ohne Verweis auf die $F(z)$, und zwar mittels Satz. von Cauchy:

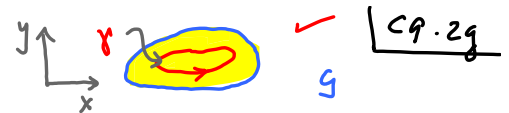
Satz v. Cauchy

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet,

(C9.1e.2)

$f: G \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) \equiv u(x,y) + i v(x,y)$ (1) eine analytische Funktion auf G

$\gamma: (0,1) \rightarrow G$, $t \mapsto z(t) \equiv x(t) + iy(t)$ (2) eine stetige, geschlossene Kurve in G .



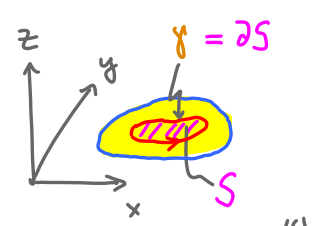
Dann gilt:

$$\oint_{\gamma} dz f(z) = 0 \quad (3)$$

Begründung:

$$I \equiv \oint_{\gamma} dz f(z) \stackrel{(2b.2)}{=} \int_0^1 dt \frac{dz(t)}{dt} \cdot f(z(t)) \quad (4)$$

$$= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} (x(t) + iy(t)) \cdot \underbrace{(u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t)))}_{\equiv u(\vec{r}(t)) + i v(\vec{r}(t))} \quad (5)$$



Interpretiere (5) als reelles Wegintegral in der x-y-Ebene,

entlang dem Weg $\gamma: \vec{r}: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ (6)

Realteil v. (5):

$$\operatorname{Re}(I) = \int_0^1 dt \left[\dot{x}(t) u(\vec{r}(t)) - \dot{y}(t) v(\vec{r}(t)) \right] \quad (7a)$$

Imaginärteil v. (5):

$$\operatorname{Im}(I) = \int_0^1 dt \left[\dot{x}(t) v(\vec{r}(t)) + \dot{y}(t) u(\vec{r}(t)) \right] \quad (7b)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Re}(I) &= \int_0^1 dt \underbrace{(\dot{x}, \dot{y}, 0)^T}_{\equiv \dot{\vec{r}}(t)} \cdot \underbrace{(u, -v, 0)^T}_{\equiv \vec{P}(\vec{r}(t))} & (1a) & \quad \text{Im}(I) = \int_0^1 dt \underbrace{(\dot{x}, \dot{y}, 0)^T}_{\equiv \dot{\vec{r}}(t)} \cdot \underbrace{(v, u, 0)^T}_{\equiv \vec{Q}(\vec{r}(t))} & (1b) \\
 & \stackrel{(V1m.6)}{=} \int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{P}, \quad \vec{P} \equiv \begin{pmatrix} u(\vec{r}) \\ -v(\vec{r}) \\ 0 \end{pmatrix} & (2a) & \quad \stackrel{(V1m.6)}{=} \int_{\gamma} d\vec{r} \cdot \vec{Q}, \quad \vec{Q} \equiv \begin{pmatrix} v(\vec{r}) \\ u(\vec{r}) \\ 0 \end{pmatrix} & (2b)
 \end{aligned}$$

Schreibe diese Wegintegrale mittels Stokes als Flussintegrale, über die von γ eingeschlossene Fläche (nenne sie S) in der x-y-Ebene, mit $\delta \vec{S} = \vec{e}_z \delta x \delta y$

$$\begin{aligned}
 \text{Re}(I) &= \int_S d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{P}(\vec{r})) & (3a) & \quad \text{Im}(I) = \int_S d\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{Q}(\vec{r})) & (3b) \\
 & \stackrel{(4)}{=} \int_S dx dy (\vec{\nabla} \times \vec{P}(\vec{r}))_z & (4a) & \quad \stackrel{(4)}{=} \int_S dx dy (\vec{\nabla} \times \vec{Q}(\vec{r}))_z & (4b) \\
 & = \int_S dx dy (\underbrace{\partial_x(-v)}_{\text{CRG (C9.1e.9)}} - \partial_y u) & (5a) & \quad = \int_S dx dy (\underbrace{\partial_x u}_{\text{CRG (C9.1e.8)}} - \partial_y v) & (5b) \\
 & = 0 & (6a) & \quad = 0 & (6b)
 \end{aligned}$$

Wir durften Cauchy-Riemann-Gleichungen (C9.1e.8-9) nutzen, da $f(z)$ auf S analytisch ist! \square

Beispiel

$$\oint_{\gamma: |z|=2} dz \frac{e^z}{z^2 - 9} = 0 \quad (1) \quad \text{C9.2i}$$


denn der Integrand ist überall analytisch ausser bei $z = \pm 3$, d.h. überall analytisch in einem Gebiet, das γ enthält, also gilt der Satz v. Cauchy, (2g.3).

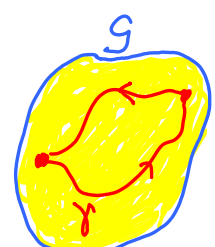
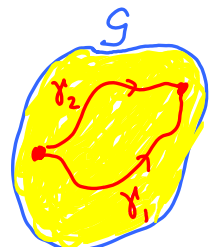
Faustregel: geschlossenes Wegintegral verschwindet, falls $f(z)$ analytisch ist 'innerhalb des Wegs' (= 'im vom Weg eingeschlossenen Gebiet')!

Korollar aus Satz v. Cauchy (mit denselben Voraussetzungen): Verschiedene Wegintegrale mit demselben Start- und Endpunkt sind gleich:

$$\int_{\gamma_1} dz f(z) = \int_{\gamma_2} dz f(z) \quad (2)$$

Begründung $\gamma = (\gamma_1, -\gamma_2)$ (2) bildet geschlossenen Weg,

$$\text{also: } \int_{\gamma_1} dz f(z) - \int_{\gamma_2} dz f(z) = \oint_{\gamma} dz f(z) \stackrel{(2g.3)}{=} 0 \quad (4) \quad \square$$



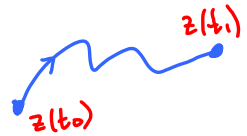
Zusammenfassung: C9.1-2 Analytische Funktionen I

ZC9.1-2

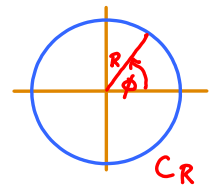
Def: Komplexe Funktion $f(z) = \begin{cases} U \subset \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z = x+iy & \longmapsto f(z) = u(x,y) + i v(x,y) \end{cases}$
 ist analytisch in U , falls $f'(z)$ überall in U existiert.

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (CRG): $\partial_x u = \partial_y v$ (2) $\partial_x v = -\partial_y u$

Def: Komplexes Wegintegral: $\int_{\gamma} dz f(z) \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dz(t)}{dt} f(z(t))$
 Weg-Parametrisierung: $z = z(t)$



Wichtiges Beispiel: $I_n \equiv \oint_{C_R} dz z^n = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } n = -1 \\ 0 & \text{falls } n \neq -1 \end{cases} = 2\pi i \delta_{n,-1}$



Satz v. Cauchy: falls $f(z)$ analytisch ist auf einfach zusammenhängendem Gebiet, gilt:

Geschlossener Weg liefert 0: $\oint_{\gamma} f(z) = 0$ \iff $\int_{\gamma_1} dz f(z) = \int_{\gamma_2} dz f(z) = F(z_1) - F(z_0)$, mit $F'(z) = f(z)$
 Wegunabhängigkeit:

