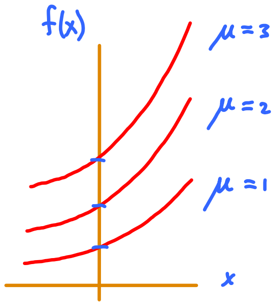
C7 Differentialgleichungen (DG) (enthalten Ableitungen der gesuchten Funktionen)



Eine DG ist eine Gleichung, die Ableitungen der gesuchten Funktion enthält.

Beispiel: $\frac{df(x)}{dx} = c\, f(x), \quad c \in \mathbb{R}$ (1)

Lösung: $f(x) = \mu\, e^{cx}, \quad \mu \in \mathbb{R}$ (2)

Check: $\frac{df(x)}{dx} = \mu c e^{x} = c\, f(x)$ ✓ (3)

Jeder Wert von μ liefert eine andere Lösung, also wird (2) die 'allgemeine Lösung' genannt.
Wird eine 'Anfangsbedingung' oder 'Randbedingung' vorgegeben, z.B. $f(0) = 1$
legt diese eine eindeutige, 'partikuläre Lösung' fest, hier $\mu \overset{(2)}{=} 1$.

In der Physik treten DG immer dann auf, wenn die Änderungen von physikalischen Größe bezüglich Ort und/oder Zeit (also ihre Ableitungen) von anderen physikalischen Größen abhängen.

z.B. Newton: $m\dot{\vec{v}}(t) = \vec{F}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t+\delta) - \vec{v}(t) \simeq \delta\, \vec{F}(t)/m$

Eine DG zu 'lösen' bedeutet, eine Funktion zu finden, die die DG erfüllt.
Dafür gibt es viele verschiedene Strategien, je nach Form der DG.

Gelingt es, die DG zu 'lösen', ist das Verhalten der entsprechenden physikalischen Größen als Funktion von Ort und/oder Zeit vollständig bekannt, und auch das physikalische Problem 'gelöst'.

L7.1 Typologie verschiedener Differentialgleichungen:

Beispiele:

Gewöhnliche DG: nur eine Variable — $d_t f(t) = f^2(t)$ (1)

Partielle DG: mehrere Variablen — $(\partial_x - \partial_t) f(x,t) = 0$ (2)

DG 1. Ordnung: nur Ableitungen 1. Ordnung — $d_t f(t) = g(t, f(t))$ (3)

DG 2. Ordnung: Ableitungen bis zu 2. Ordnung — $d_t^2 f(t) + d_t f(t) = g(t, f(t))$ (4)

System von DG: m > 1 gekoppelte Gleichungen:
$d_t x(t) = v(t)$ (5) (m=2)
$d_t v(t) = f(x(t))$ (6)

Lineare DG: linear in gesuchter Funktion — $(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2)\, x(t) = 0$ (7)

Nicht-lineare DG: nicht-linear in gesuchter Funktion — $d_t^2 x(t) = c \sin(x(t))$ (8)

Beispiele: wichtige Differentialgleichungen in der Physik

Mechanik: Newton 2 (gewöhnliche DG 2. Ordnung):

(gesuchte Funktion hängt nur von einer Variable ab, hier t) (Ableitungen 2. Ordnung kommen vor)

in 1. Dimension:

$$\underbrace{m}_{\text{Masse}} \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{x(t)}_{\text{Ort}} = \underbrace{F(x,t)}_{\text{Kraft}} \qquad (1)$$

in 3. Dimensionen:
(ein 'System' von DG)

$$m \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\vec{x}(t)}_{\text{Ortsvektor}} = \vec{F}(\vec{x},t) \qquad (2)$$

Elektrodynamik: Maxwell-Gleichungen (System v. gekoppelten linearen partiellen DG 1. Ordnung)

(gesuchte Funktion hängt von mehreren Variablen ab, hier x,y,z,t) (nur Abl. 1. Ordnung kommen vor)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\rho(\vec{x},t)}_{\text{Ladungsdichte}} \qquad (3a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\vec{B}(\vec{x},t)}_{\text{Magnetfeld}} \qquad (3b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x},t) = 0 \qquad (3c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x},t) = \mu_0 \underbrace{\vec{j}(\vec{x},t)}_{\text{Stromdichte}} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\vec{E}(\vec{x},t)}_{\text{Elektrisches Feld}} \qquad (3d)$$

Quantenmechanik: Schrödinger-Gleichung (lineare partielle DG 2. Ordnung)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\underbrace{m}_{\text{Masse}}} \vec{\nabla}^2 + \underbrace{V(\vec{x})}_{\text{Potential}}\right] \psi(\vec{x},t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\psi(\vec{x},t)}_{\text{'Wellenfunktion'}} \qquad (1)$$

Hydrodynamik: Navier-Stokes-Gleichung (nicht-lineare partielle DG 2. Ordnung)

(gesuchte Funktion kommt nicht nur linear vor)

$$\underbrace{\rho}_{\text{Dichte}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla} p + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + \vec{f} \qquad (2)$$

Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x},t)$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen einer DG in der Physik immer gewährleistet, falls Problem physikalisch sinnvoll gestellt ist. ☺

Im Folgenden diskutieren wir ausschließlich gewöhnliche Differentialgleichungen.
(Partielle DG: siehe Mathevorlesungen, oder fortgeschrittene Physikvorlesungen.)

Lösung einer Differentialgleichung beinhaltet i.d.R. Integration

C7.1e

Trivialstes Beispiel einer DG: $d_t f(t) = g(t)$ (1)

'trivial', da rechte Seite unabhängig von f ist

[gegeben: g(t); gesucht: f(t)]

Anfangsbedingung: $f(t_0) = f_0$ (2)

(1) besagt, dass $f(t)$ ist die Stammfunktion von $g(t)$ ist.

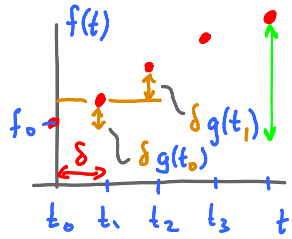
Integraldarstellung der Stammfunktion (nützlich, falls diese nicht explizit bekannt ist):

$$\boxed{f(t) = \underbrace{\int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; g(\tilde{t}) + f_0}} \qquad (3)$$

Allgemein: <u>immer</u> kontrollieren, ob gefundene Lösung die DG und Anfangsbedingung erfüllt!

Check DG: $d_t f(t) = d_t \left(\quad \right) = g(t) \overset{\checkmark}{=} (1)$ (4)

Check Anfangsbedingung: $f(t_0) = f_0 \overset{\checkmark}{=} (2)$ (5)



Interpretation der Integraldarstellung (3): Summe von Änderungen:

Änderung von f in Zeitschritt δ: $f(t_\ell + \delta) - f(t_\ell) \overset{(1)}{=} \delta\, g(t_\ell)$ (6)

Summe über viele Zeitschritte liefert Gesamtänderung von f: $f(t) - f(t_0) = \delta \sum_\ell g(t_\ell) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; g(\tilde{t}) \overset{\checkmark}{=} (3)$ (7)

7.2 Separable Differentialgleichungen - Separation der Variablen

WICHTIG!

C7.2a

'Separable DG' hat die Form $\boxed{d_t f(t) = h(f(t))\, g(t)}$ (1)

[gegeben: g(t), h(f); gesucht: f(t)]

f- und t-Abhängigkeit auf rechter Seite <u>faktorisiert</u>

f-Abhängigkeit nach links: $\frac{df(t)}{dt} \frac{1}{h(f(t))} = g(t)$ (2)

Integration: $\int_{t_0}^{t} \cancel{d\tilde{t}}\, \frac{df(\tilde{t})}{\cancel{d\tilde{t}}} \frac{1}{h(f(\tilde{t}))} = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; g(\tilde{t})$ (3)

Substitution:

$$\begin{bmatrix} f(\tilde{t}) \equiv \tilde{f} \\ f(t) \equiv f \\ f(t_0) \equiv f_0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Anfangsbedingung

$\int_{f_0}^{f} d\tilde{f}\, \frac{1}{h(\tilde{f})} = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; g(\tilde{t})$ (4)

Eselsbrücke als Abkürzung der Substitution:

'$df\, \frac{1}{h(f)} = dt\; g(t)$' (4')

f links t rechts

'Trennung der Variablen'

'Separation der Variablen'

Ausgedrückt durch Stammfunktionen: $H(f) - H(f_0) = G(t) - G(t_0)$ (6)

gemeint ist: $f(t)$, $f(t_0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} H'(f) = \frac{1}{h(f)} \\ G'(t) = g(t) \end{array} \right.$$

Gelöst nach f: (mittels Umkehrfunktion v. H)

$$\boxed{f(t) = H^{-1}\big(G(t) - G(t_0) + H(f_0)\big)} \qquad (7)$$

Alternative $\int^{f} d\tilde{f}\, \frac{1}{h(\tilde{f})} \overset{(4)}{=} \int^{t} d\tilde{t}\; g(\tilde{t}) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} H(f) = G(t) + c & (8) \\ H(f_0) = G(t_0) + c & (9) \end{array} \right.$

(8)-(9) liefert (6).

C7.2b

Beispiel 1: $\frac{df}{dt} = \dot{f} = f^2\, e^t$ (1)

Anfangsbedingung: $f_0 \equiv f(0) = 3$ (2)

Trennung der Variablen: $\int_{f_0}^{f} \frac{d\tilde{f}}{\tilde{f}^2} \overset{(2a.3)}{=} \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; e^{\tilde{t}}$ (3)

Integration: $-\frac{1}{\tilde{f}}\Big|_{f_0=3}^{f} = e^{\tilde{t}}\Big|_{t_0=0}^{t}$ (4)

Anfangsbedingung (2): $-\frac{1}{f} + \frac{1}{3} = e^t - 1$ (5)

Umkehrfunktion = gesuchte Lösung: $\boxed{f(t) = \left[\frac{4}{3} - e^t\right]^{-1}}$ (6)

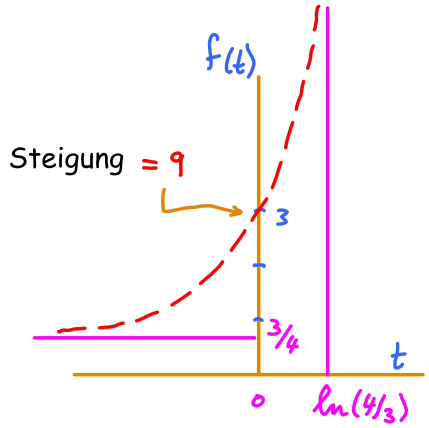
Check: $\dot{f}(t) = -\left[\frac{4}{3} - e^t\right]^{-2}(-e^t) = f^2(t)\,e^t$ (7)

Für $t > \ln(4/3)$ würde (6) die Lösung f(t) < 0 liefern, was nicht erlaubt ist, da $f(t) > f(0) = 3$.

Fazit: Lösung existiert nur für: $t \in (-\infty, \ln(4/3))$ (8)

Grafische Analyse

Bereich:	Steigung $d_t f$
$\forall t$	> 0
$t = 0$:	$f^2(0) = 3^2 = 9$
t groß positiv:	divergiert wie $e^t \to \infty$
t groß negativ:	verschwindet wie $e^{-\lvert t\rvert} \to 0$



C7.3a

C7.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Allgemeine Form:
[gegeben: g(t), h(t); gesucht: f(t)]
Anfangsbedingung:

$$\boxed{\begin{aligned} d_t f(t) &= g(t)\, f(t) + h(t) \quad (1) \\ f(t_0) &= f_0 \quad (2) \end{aligned}}$$

'Homogene' Version von (1): (Spezialfall mit $h(t) = 0$)

$$[d_t - g(t)]\, f(t) = 0 \quad (3)$$

Lösungsansatz für $f(t)$:

$$\boxed{f(t) = f_0\, e^{\Phi(t)}} \quad (4)$$

$$d_t f(t) \overset{(4)}{=} (d_t \Phi)\, f_0\, e^{\Phi(t)} \overset{(4)}{=} (d_t \Phi)\, f(t) \quad (5)$$

(4) eingesetzt in (3): $0 \overset{(3)}{=} [d_t - g(t)]\, f(t) \overset{(5)}{=} [d_t \Phi(t) - g(t)]\, f(t)$ (6)

(6) liefert DG für $\Phi(t)$: $d_t \Phi(t) \overset{(6)}{=} g(t)$ (7)

Anfangsbedingung für Φ: $f(t_0) \overset{(4)}{=} f_0\, e^{\Phi(t_0)} \overset{(2)}{=} f_0 \Rightarrow \Phi(t_0) = 0$ (8)

Lösung v. (7) per Integration: $\boxed{\Phi(t) \overset{(C7.1e.4)}{=} \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\; g(\tilde{t})}$ (9)

Check: $d_t \Phi(t) = g(t)$ erfüllt (7) ✓
$\Phi(t_0) = 0$ erfüllt (8) ✓

Alternativ: bestimme homogene Lösung mittels separation d. Variablen: C7.3b

(3a.6): $$d_t f(t) = g(t)\, f(t) \,, \quad f(0) = f_0 \tag{1}$$

$$\frac{df(t)}{dt} \frac{1}{f(t)} = g(t) \,, \tag{2}$$

Trennung der Variablen: $$\int_{f_0}^{f} \frac{d\tilde f}{\tilde f} = \int_{t_0}^{t} d\tilde t \; g(\tilde t) \tag{3}$$

Integration: $$\ln(f/f_0) = \ln(f) - \ln(f_0) = \int_{t_0}^{t} d\tilde t \; g(\tilde t) \equiv \Phi(t) \tag{4}$$

Umkehrfunktion liefert gesuchte Lösung: $$\boxed{f(t) = f_0 \, e^{\Phi(t)}} \quad \checkmark \tag{5}$$

Beispiel 2: $$d_t f(t) = 2t\, f(t) \quad \text{mit} \quad f(0) = f_0 \tag{6}$$

$$g(t) \overset{(1,5)}{=} 2t \quad \Rightarrow \quad \Phi(t) \overset{(4)}{=} \int_0^t d\tilde t \; 2\tilde t = t^2 \tag{7}$$

Lösung: $$f(t) \overset{(5)}{=} f_0 \, e^{\Phi(t)} = f_0 \, e^{t^2} \tag{8}$$

Inhomogene lineare DG 1. Ordnung: 'Variation der Konstanten' C7.3c

'Inhomogene' lineare DG 1. Ordnung: $[h(t) \neq 0]$ $$d_t f(t) = g(t)\, f(t) + h(t) \tag{1}$$

Bereits bekannt: Lösung der homogenen DG: $$d_t f_h(t) = g(t)\, f_h(t) \tag{2}$$

Gesucht: 'partikuläre' Lösung der inhomogenen DGL: $$[d_t - g(t)]\, f_p(t) \overset{(1)}{=} h(t) \tag{3}$$

Ansatz für Form der partikulären Lösung: $$\boxed{f_p(t) = c(t)\, e^{\Phi(t)}} \tag{4}$$

zeitabhängiger Vorfaktor (historisch: 'variable Konstante')

(4) eingesetzt in die inhomogene DGL (3): $$h(t) \overset{(3)}{=} [d_t - g(t)]\, c(t)\, e^{\Phi(t)} \tag{5}$$

Produktregel: $$= \Big[d_t c(t) + c(t) \cancel{\overbrace{d_t \Phi(t)}^{(3a.7) = g(t)}} - \cancel{g(t)\, c(t)} \Big] e^{\Phi(t)} \tag{6}$$

DGL für $c(t)$: $$d_t c(t) = h(t)\, e^{-\Phi(t)} \tag{7}$$

Integration: $$\boxed{c(t) \overset{(C7.1e.4)}{=} \int_{t_0}^{t} d\tilde t \; h(\tilde t)\, e^{-\Phi(\tilde t)} + c(t_0)} \tag{8}$$

Anfangsbedingung legt $c(t_0)$ fest: $$f_p(t_0) \overset{(4)}{=} c(t_0)\, e^{\overbrace{\Phi(t_0)}^{(3a.9) = 0}} = c(t_0) \tag{9}$$

Beispiel 3 (aufbauend auf Beispiel 2 von Seite 3b)

Betrachte die inhomogene DG: $$d_t f = \underbrace{2t}_{g(t)}\, f + \underbrace{t\, e^{t^2}}_{h(t)} \,, \quad f(0) = f_0 \qquad (1)$$

Homogene Lösung, bereits bekannt: $$f_h(t) \overset{(3b.8)}{=} f_0\, e^{\Phi(t)} \quad \text{mit} \quad \Phi(t) = t^2 \qquad (2)$$

Ansatz für partikuläre Lösung, mittels Variation der Konstanten: $$f_p(t) \overset{(3c.4)}{=} c(t)\, e^{\Phi(t)} \qquad (3)$$

Bestimmung v. c(t): $$c(t) \overset{(3c.8)}{=} \int_{t_0=0}^{t} d\tilde{t}\; \underbrace{h(\tilde{t})}_{\tilde{t}\,\cancel{e^{\tilde{t}^2}}}\; \underbrace{e^{-\Phi(\tilde{t})}}_{\cancel{e^{-\tilde{t}^2}}} + \underbrace{c(t_0)}_{\overset{(3c.9)}{=} f_0} \qquad (4)$$

$$= \int_0^t d\tilde{t} \cdot \tilde{t} + f_0 = \tfrac{1}{2} t^2 + f_0 \qquad (5)$$

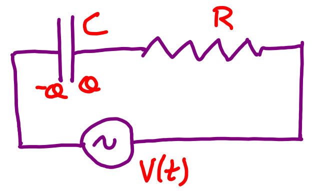
Gesuchte partikuläre Lösung: $$\boxed{f_p(t) \overset{(3,5)}{=} \left(f_0 + \tfrac{1}{2} t^2\right) e^{t^2}} \qquad (6)$$

durch Anfangsbedingung festgelegt

Check: $$\frac{d}{dt}\left[\left(f_0 + \tfrac{1}{2}t^2\right) e^{t^2}\right] = 2t\left(f_0 + \tfrac{1}{2}t^2\right)e^{t^2} + t e^{t^2} = 2t\, f(t) + t e^{t^2} \overset{\checkmark}{=} (1) \qquad (7)$$

Beispiel 3: RC Schaltkreis

[Selbsstudium: AD-Buch, Seite 307]



Spannung am Kondensator: $$V_c(t) = \frac{Q(t)}{C} \qquad (1)$$

Spannung am Widerstand: $$V_R(t) = R\, I(t) = R\, \dot{Q}(t) \qquad (2)$$

Spannungsquelle: $$V(t) \overset{\text{Kirchhoff}}{=} V_c(t) + V_R(t) \overset{(1),(2)}{=} \frac{Q(t)}{C} + R\, \dot{Q}(t) \qquad (3)$$

Lineare DGL: $\frac{(3)}{R}$: $$\boxed{\dot{Q}(t) = -\frac{1}{\tau} Q(t) + \frac{1}{R} V(t)} \quad \text{mit} \quad \tau = RC \qquad (4)$$

(hat Dimension einer Zeit, heißt "RC-Zeitkonstante")

Anfangsbedingung: $$Q(0) = Q_0 \qquad (5)$$

Bestimme zunächst homogene Lösung [d.h., setze V(t)=0]: $$\dot{Q}_h(t) \overset{(4)}{=} -\frac{1}{\tau} Q_h(t) \qquad (6)$$

Lösung bereits bekannt [siehe Seite (C7.1a)]: beschreibt exponentiellen Zerfall $$\boxed{Q_h(t) \overset{(C7.1a.3)}{=} Q_0\, e^{-t/\tau}} \qquad (7)$$

Nächster Schritt: suche eine partikuläre Lösung von (3e.4): C7.3f

(3e.4):

$\tau = RC$

$$\dot{Q}_p(t) = \underbrace{-\frac{1}{\tau}}_{g(t)} Q_p(t) + \underbrace{\frac{1}{R} V(t)}_{h(t)} \qquad (1)$$

Variation der Konstanten:
Ansatz:

$$Q_p(t) \overset{(3d.3)}{=} c(t) \underbrace{e^{\Phi(t)}}_{(3e.7)\ e^{-t/\tau}} \qquad (2)$$

(3c.9):

$$c(t) \overset{(3c.9)}{=} \int_0^t d\tilde{t}\ \underbrace{h(\tilde{t})}_{\frac{1}{R} V(\tilde{t})}\ \underbrace{e^{-\Phi(\tilde{t})}}_{e^{+\tilde{t}/\tau}} + \underbrace{c(0)}_{Q_0} \qquad (3)$$

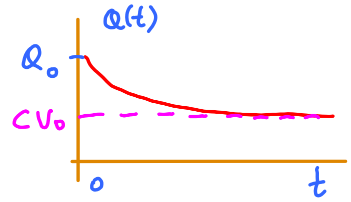
Partikuläre Lösung:
(3) in (2)

$$\boxed{Q_p(t) \overset{(2)}{=} \left[\int_0^t d\tilde{t}\ \frac{V(\tilde{t})}{R}\ e^{\tilde{t}/\tau} + Q_0\right] e^{-t/\tau}} \qquad (4)$$

$$= Q_0 e^{-t/\tau} + \int_{t_0}^t d\tilde{t}\ \frac{V(\tilde{t})}{R}\ e^{-(t-\tilde{t})/\tau} \qquad (5)$$

Spezialfall: zeitunabhängige Spannung: $V(t) = V_0$

$$Q(t) \overset{(3f.5)}{=} Q_0 e^{-t/\tau} + V_0 \overbrace{\frac{\tau}{R}}^{(3e.4)\ = C}\left[1 - e^{-t/\tau}\right] \xrightarrow{t \to \infty} V_0 C$$



C7.4 System von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

C7.4a

Index, keine Potenz!

Lineares System von Gl. 1. Ordnung, für n Funktionen, $f^1(t), \dots, f^n(t)$

$$\begin{aligned} d_t f^1(t) &= A^1{}_1(t) f^1(t) + A^1{}_2(t) f^2(t) + \dots A^1{}_n(t) f^n(t) + g^1(t) \\ &\ \ \vdots \\ d_t f^n(t) &= A^n{}_1(t) f^1(t) + A^n{}_2(t) f^2(t) + \dots A^n{}_n(t) f^n(t) + g^n(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

Kompaktnotation:

$$\vec{f}(t) = (f^1(t), \dots, f^n(t))^T, \qquad \vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$$

$$\vec{g}(t) = (g^1(t), \dots, g^n(t))^T, \qquad \vec{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n \qquad (2)$$

$$A(t) = \{A^i{}_j(t)\} \qquad A : \mathbb{R} \to \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$$

System v. DG:

$$\boxed{d_t \vec{f}(t) \overset{(1)}{=} A(t) \cdot \vec{f}(t) + \vec{g}(t)} \qquad (3)$$

Anfangsbedingungen:

$$\vec{f}(t_0) = \vec{f}_0 = (f_0^1, \dots, f_0^n)^T \qquad (4)$$

Falls $\vec{g}(t) = \vec{0}$: 'homogenes System'. Falls $A(t) = A$: 'konstante Koeffizienten'

Superpositionsprinzip: [für lineare, homogene DG der Form (4b.3)]

C7.4b

Seien $\vec{f}_1(t)$ und $\vec{f}_2(t)$ zwei beliebige Lösungen der homogenen DG, d.h.

$$d_t \vec{f}_j(t) = A(t) \cdot \vec{f}_j(t) \qquad (j = 1, 2)$$ (j ist <u>kein</u> Komponentenindex, sondern unterscheidet zwei Lösungen!) (1)

dann ist ihre 'Linearkombination' ebenfalls eine Lösung! $\vec{f}(t) = \vec{f}_1(t)\, c^1 + \vec{f}_2(t)\, c^2$ (2)

denn: $d_t \vec{f}(t) \overset{(2)}{=} d_t \vec{f}_1(t)\, c^1 + d_t \vec{f}_2(t)\, c^2 \overset{(1)}{=} A(t)\, \vec{f}_1(t)\, c^1 + A(t)\, \vec{f}_2(t)\, c^2$ (3)

$= A(t) \cdot \left[\vec{f}_1(t)\, c^1 + \vec{f}_2(t)\, c^2 \right] \overset{(2)}{=} A(t) \cdot \vec{f}(t)$ ✓ (4)

(5)

Was war hierfür notwendig? Linearität und Homogenität der DG.

Für zeitabhängige A-Matrix erfordert das Lösen von fortgeschrittene Methoden (Fourier-Analysis) $d_t \vec{f}(t) = A(t) \cdot \vec{f}(t)$ (6)

Im Folgenden betrachten wir zeit<u>un</u>abhängige Koeffizienten: $d_t \vec{f}(t) = A\cancel{(t)} \cdot \vec{f}(t)$ (7)

Lineares System v. DG: Exponentialansatz und Eigenwertproblem

C7.4c

Lineares System: $d_t \vec{f}(t) \overset{(i.2)}{=} A \cdot \vec{f}(t)$ [A zeit<u>un</u>abhängig] (1)

mit Anfangsbedingung: $\vec{f}(t_0) = \vec{f}_0$ (2)

Für n=1, lautet die homogene DGL, $d_t f = a f$ mit Lösung $f(t) = f_0\, e^{at}$ (3)

Für allgemeines n machen wir analogen exp-Ansatz, aber mit Vektor-Vorfaktor:

exp-Ansatz: $\vec{f}(t) = \vec{v}\, e^{\lambda t}$ Zeitabhängigkeit nur im Exponenten! zeit<u>un</u>abhängiger Vektor, $\in \mathbb{C}^n$ (4)

(4) in (1): $\vec{0} \overset{(1)}{=} (d_t - A)\vec{f}(t) \overset{(4)}{=} (d_t - A)\, \vec{v}\, e^{\lambda t} = \underbrace{(\lambda - A)\, \vec{v}\, e^{\lambda t}}_{=\vec{0}}$ (5)

$$\Rightarrow \boxed{A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}}$$ (6)

Für nicht-triviale Lösung ($\vec{v} \neq \vec{0}$) muss $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A sein !

λ ein Eigenwert von A sein ! (7)

Sei A diagonalisierbar (andere Fälle diskutieren wir hier nicht). C7.4d

Dann existiert ein Satz von n linear unabhängigen Eigenvektoren (1)

$\vec{v}_j\,,\ j=1,\dots,n$ mit dazugehörigen Eigenwerten λ_j (2)

d.h. $$\boxed{A\cdot\vec{v}_j = \lambda_j\,\vec{v}_j}\qquad j=1,\dots,n \quad (3)$$

Allg. Lösung der homogenen DG ist Summe über alle Eigenlösungen:
(laut Superpositionsprinzip)

$$\vec{f}(t) = \boxed{\sum_j \vec{v}_j\, e^{\lambda_j t}\, c^j} \quad (4)$$

durch Anfangsbed. bestimmt

Anfangsbedingung: $$\vec{f}(0) \overset{(4)|_{t=0}}{=} \sum_j \vec{v}_j\, c^j \quad (5)$$

i-Komponente: $$f^i(0) \overset{(5)}{=} \sum_j \underbrace{v^i_j}_{\equiv T^i_j} c^j \quad (6)$$ sei $T=(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)\,,\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}c^1\\ \vdots\\ c^n\end{pmatrix}$ (7)

Kompaktnotation: $$\vec{f}(0) \overset{(6)}{=} T\cdot\vec{c} \quad (8) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{c} = T^{-1}\cdot\vec{f}(0)} \quad (9)$$

Also ist Lösungstragie:
- Eigenwerte finden (Nullstellen des charakteristischen Polynoms finden, usw.)
- Eigenvektoren finden
- Konstanten c^j so bestimmen, dass Anfangsbedingungen erfüllt sind.

<u>Homogene lineare DG 1. Ordnung: allgemeiner Lösungsansatz</u> C7.4e

Betrachte: $$d_t\vec{f} = A\cdot\vec{f} \quad (1)$$

Lösungsansatz: $$\boxed{\vec{f}(t) = e^{\overset{\text{Matrix!}}{A}t}\,\vec{f}_0} \overset{(L7.4a.6)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n A^n\,\vec{f}_0 \quad (2)$$

Check: $$d_t\vec{f}(t) \overset{(2)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{n}{n!}}_{=\frac{1}{(n-1)!}} t^{n-1}A\cdot A^{n-1}\vec{f}_0 \overset{m=n-1}{=} A\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}t^m A^m}_{e^{At}}\vec{f}_0 \overset{(2)}{=} A\,\vec{f}(t) \;\checkmark \quad (3)$$

Ansatz (2) funktioniert, egal ob A diagonalisierbar ist oder nicht!

<u>Falls</u> A diagonalisierbar ist, gilt: $$A = TDT^{-1}\,,\qquad T=(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n) \quad (4)$$

und $$e^{At} \overset{(L7.4c.4)}{=} T\,e^{Dt}\,T^{-1} \quad (5) \qquad T\vec{e}_i = \begin{pmatrix}v^1_1 & \dots & v^1_n\\ \vdots & & \\ v^n_1 & \dots & v^n_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \vec{v}_i \quad (6)$$

(5) in (2): $$\vec{f}(t) = T e^{Dt}\underbrace{T^{-1}\vec{f}_0}_{\equiv\vec{c}=\sum_i\vec{e}_i c^i} = \sum_i T\underbrace{e^{Dt}\vec{e}_i}_{e^{\lambda_i t}\vec{e}_i} c^i$$
$$\overset{(L7c.4)}{=} \sum_i T e^{\lambda_i t}\vec{e}_i\, c^i \overset{(6)}{=} \boxed{\sum_i \vec{v}_i\, e^{\lambda_i t} c^i} = \checkmark\ (C7.4d.4) \quad (7)$$

Zusammenfassung: C7.2 Separable Differentialgleichungen

ZC7.2

Separable DG:
(f- und t-Abhängigkeit faktorisiert)

$$d_t f(t) = g(t)\, h(f(t)) \qquad (1)$$

mit $f(t_0) = f_0$ (1')

Lösungsweg: Trennung der Variablen

Trennen:

$$df \frac{1}{h(f)} = g(t)\, dt \qquad (2)$$

Integrieren:

$$\int_{f_0 = f(t_0)}^{f = f(t)} d\tilde{f} \frac{1}{h(\tilde{f})} = \int_{t_0}^{t} g(\tilde{t})\, d\tilde{t} \qquad (3)$$

Stammfunktionen:

$$H(f) - H(f_0) = G(t) - G(t_0) \qquad (4)$$

Nach f auflösen:

$$f(t) = H^{-1}\left(G(t) - G(t_0) + H(x_0)\right) \qquad (5)$$

Zusammenfassung: C7.3 Lineare DG 1. Ordnung

ZC7.3

Lineare DG: $\dot{f}(t) = g(t)\, f(t) + h(t)$, mit $f(0) = f_0$

falls h(t) $= 0$: homogen falls h(t) $\neq 0$: inhomogen

Allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DG:

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t)$$

Allgemeine homogene Lösung erfüllt homogene DG:

$$\dot{f}_h(t) = g(t)\, f_h(t)$$

partikuläre Lösung erfüllt inhomogene DG:

$$\dot{f}_p(t) = g(t) \cdot f_p(t) + h(t)$$

homogene Lösung (Trennung d. Variablen):

$$f_h(t) = f_0\, e^{\Phi(t)},$$

mit

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, g(\tilde{t})$$

partikuläre Lösung (Variation d. Konstanten):

$$f_p(t) = c(t)\, e^{\Phi(t)}$$

mit

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde{t}\, h(\tilde{t})\, e^{-\Phi(\tilde{t})}$$

Zusammenfassung: C7.4 Homogenes System von linearen DG 1. Ordnung

$$\underbrace{d_t\vec{f}(t)}_{\in\mathbb{C}^n} = \underbrace{A(t)}_{\mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)}\cdot\vec{f}(t)$$

Superpositionsprinzip (SP) für lineare, homogene DG:

falls $d_t\vec{f}_j(t) = A(t)\cdot\vec{f}_j(t) \quad (j=1,2)$ dann $d_t\vec{f}(t) = \lambda_1\vec{f}_1(t) + \lambda_2\vec{f}_2(t)$

Für <u>konstanten Koeffizienten:</u>

exp-Ansatz: $\vec{f}(t) = \vec{v}\, e^{\lambda t}$ ← Zeitabhängigkeit nur im Exponenten!

$\vec{v}$: zeit<u>un</u>abhängiger Vektor, $\in\mathbb{C}^n$

führt auf Eigenwertgleichung: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Falls A diagonalisierbar ist, ist die allgemeine Lösung die Summe über alle Eigenlösungen:

$\vec{f}(t) = \sum_j \vec{v}_j\, e^{\lambda_j t}\, c^j$ mit $A\cdot\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_j\,, \quad j=1,\dots,n$

$\vec{c} = T^{-1}\cdot\vec{f}(0)\,, \qquad T=(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$

Allgemeinerer Exponentialansatz:
(funktioniert auch dann, wenn
A nicht diagonalisierbar ist):

$$\vec{f}(t) = e^{At}\vec{f}_0$$