L5.4 Kriterien für Invertierbarkeit einer Matrix

V sei $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $\{\hat v_j\}$. $\hat A: V \to V$, $\hat v_j \mapsto \hat A \hat v_j = \hat w_j$ sei lineare Abbildung.

$= \hat v_i A^i{}_j$ Matrixdarstellung

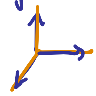
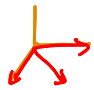
Definition: $\mathrm{Rang}(\hat A) \equiv \dim(\mathrm{span}\{\hat w_j\})$ = Dimension des Bildraums von $\hat A$ (1)

Definition: $\mathrm{Kern}(\hat A) \equiv \{\hat x \mid \hat A \hat x = \hat 0\}$ = Unterraum aller $\hat x$, die auf $\hat 0$ abgebildet werden. (2)
'Null-Raum'

Wann ist Abbildung $\hat A$ bijektiv. d.h. wann ist ihre Matrix A invertierbar? 3 äquivalente Sätze:

(i) $\hat A$ invertierbar $\overset{\text{falls und nur falls}}{\Leftrightarrow}$ für jede Basis $\{\hat v_j\}$ bilden die Bildvektoren $\{\hat w_j = \hat A \hat v_j\}$ auch eine Basis

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathrm{Rang}(\hat A) = \dim(V)}$ (3) (intuitiv gesprochen: aus linear unabhängigen Vektoren darf A nicht linear abhängige machen)

 $\not\Rightarrow$ 

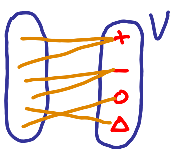
(ii) $\hat A$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $\hat A \cdot \hat x = \hat 0$ impliziert $\hat x = \hat 0$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\dim(\mathrm{Kern}(\hat A)) = 0}$ ('Kern ist trivial') (4)

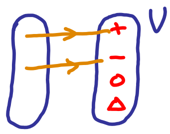
Falls Standardbasis benutzt wird, $\{\hat v_i\} = \{\vec e_i\}$, sodass $\underbrace{A\vec e_j}_{\text{Bildvektor der Standardbasis}} \overset{(j.5)}{=} \underbrace{\vec A_j}_{\text{Spaltenvektor der Matrix } A}$ folgt aus (i) ferner:

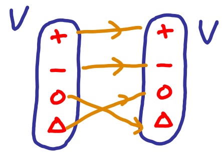
(iii) $\hat A$ invertierbar $\Leftrightarrow$ die Spaltenvektoren der Matrix A bilden eine Basis. (5)

[Nächste Frage: wie wissen wir, ob Spaltenvektoren eine Basis bilden? Siehe L6.1]

<u>Begründung für (i):</u> (Selbststudium; AD-Buch, S. 72-74)

surjektiv: 

injektiv: 

bijektiv: 

<u>Begründung für (i) $\Leftarrow$:</u> <u>Annahme:</u> $\{\hat w_i\}$ ist eine Basis. (1)

Dann ist $\hat A$ <u>surjektiv</u> [das ganze V liegt im Bild v. A, $\hat A(V) = V$]
denn sein Bild, $\hat A(V)$, enthält eine Basis v. V, nämlich $\{\hat w_i\}$ und somit das <u>ganze</u> V. (2)

Ferner ist $\hat A$ auch <u>injektiv</u> [jeder Bildvektor entspricht maximal einem Argument].

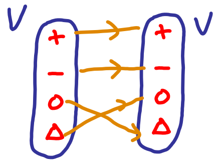
Denn ansonsten gäbe es zwei <u>verschiedene</u> Vektoren, $\hat x = \hat v_j x^j$ und $\hat x' = \hat v_j x'^j$ (3)
mit demselben Bild, d.h. $\hat A \cdot \hat x = \hat A \cdot \hat x'$ (4)

$$\Rightarrow \hat 0 \overset{(4)}{=} \hat A(\hat x - \hat x') = \hat A(\hat v_j x^j - \hat v_j x'^j) \overset{\text{Linearitität}}{=} \hat A(\hat v_j)(x^j - x'^j) = \hat w_j (x^j - x'^j) \quad (5)$$

Letzte Gl. steht im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren $\{\hat w_i\}$

<u>Fazit:</u> A ist surjektiv und injektiv, somit bijektiv, somit invertierbar. $\Leftarrow \square$ (6)

Begründung für (i) $\Longrightarrow$: Annahme: $\hat{A}$ ist bijektiv. (1)



L5.4m

Dann ist jeder Vektor $\hat{y} \in V$ das Bild eines Vektors $\hat{x} \in V$: (2)

$$\hat{y} = A(\hat{x}) = A(\hat{v}_j x^j) = A(\hat{v}_j) x^j = \hat{w}_j x^j \quad \Longrightarrow \quad \{\hat{w}_j\} \text{ ist vollständig.} \tag{3}$$

Ferner: $\{\hat{w}_i\}$ sind linear unabhängig. Ansonsten würde eine nicht-triviale Linearkombination existieren, die Null liefert,

$$\hat{0} = \hat{w}_j x^j = A(\hat{v}_j) x^j \overset{\text{Linearitität}}{=} A(\hat{v}_j x^j), \quad \text{also} \quad \overbrace{\hat{v}_i x^i}^{\neq \hat{0}} \overset{A}{\longmapsto} \hat{0}. \tag{4}$$

im Widerspruch zur Injektivität, denn es gilt auch $\hat{0} \longmapsto \hat{0}$. (5)

Fazit: $\{\hat{w}_i\}$ ist vollständig und linear unabhängig, somit eine Basis. $\Longrightarrow \square$

Begründung für (ii): analoge Argumente, Selbststudium!

L6 Determinanten

L6a

'Determinante' ist eine Abbildung der Form:

$$\det : \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad A \longmapsto \det(A) \tag{1}$$

Motivation:

1. Invertierbarkeit von A $\Longleftrightarrow$ Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\det A \neq 0}$

2. Diagonalisierung von A:
Finde eine Transformation T,
so dass

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diagonal}$$

Startpunkt für Diagonalisierung: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$

[3. Jakobi-Determinante bei Variablen-Transformation in Integralen: $\left| \dfrac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right|$]

In allen Fällen spielt die 'Determinante' einer Matrix eine zentrale Rolle.

Vorschau: L6 Determinanten

L7 Diagonalisierung

Kriterium dafür, ob Spaltenvektoren linear unabhängig sind: 2x2

L6b

2 x 2 Matrix: $A = \begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 \end{pmatrix} = (\vec{A}_1, \vec{A}_2)$ Spaltenvektoren (1)

$\in \mathrm{mat}(\mathbb{C},2,2)$

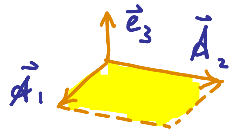
Zwei Vektoren $\vec{A}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{A}_2 \neq \vec{0}$, sind linear abhängig, falls $\vec{A}_1 \parallel \vec{A}_2$ (2)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A^1{}_1 \\ A^2{}_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A^1{}_2 \\ A^2{}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} A^1{}_1 = \lambda A^1{}_2 \\ A^2{}_1 = \lambda A^2{}_2 \end{array} \Rightarrow \frac{A^1{}_1}{A^1{}_2} = \lambda = \frac{A^2{}_1}{A^2{}_2} \Rightarrow \boxed{A^1{}_1 A^2{}_2 - A^2{}_1 A^1{}_2 = 0} \quad (3)$$

Geometrische Interpretation für reelle Vektoren:

$$A^1{}_1 A^2{}_2 - A^2{}_1 A^1{}_2 = \left| \begin{pmatrix} A^1{}_1 \\ A^2{}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^1{}_2 \\ A^2{}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = F(\vec{A}_1, \vec{A}_2) \quad (4)$$

3-dim Versionen von $\vec{A}_1, \vec{A}_2$



= von $\vec{A}_1$ und $\vec{A}_2$ aufgespannte Fläche (= 0 falls $\vec{A}_1 \parallel \vec{A}_2$)

Definition: 'Determinante' einer 2x2 Matrix:

$$\begin{vmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 \end{vmatrix} \equiv \det \begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 \end{pmatrix} \equiv \boxed{A^1{}_1 A^2{}_2 - A^2{}_1 A^1{}_2} \quad (5)$$

Merkregel: $\begin{vmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 \end{vmatrix}$

Fazit: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ Spaltenvektoren sind linear unabhängig $\overset{(L5.4k.3)}{\Leftrightarrow}$ A ist invertierbar (6)

In Formel für Inverse Matrix, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{(L5.4g.2)}{\Rightarrow} A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ ist Nenner $\neq 0$

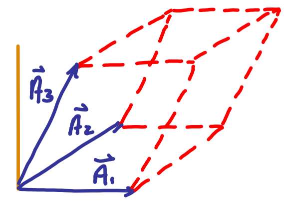
Kriterium dafür, ob Spaltenvektoren linear unabhängig sind: 3x3

L6c

3x3 Matrix: $A = \begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 \end{pmatrix} = (\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3)$ Spaltenvektoren (1)

$\in \mathrm{mat}(\mathbb{C},3,3)$

$(\vec{A}_j)^i = A^i{}_j$ (2)



Geometrische Interpretation für reelle Vektoren:

Die Spaltenvektoren $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3 \in \mathbb{R}^3$ spannen ein Parallelepiped auf mit Volumen

$$\mathrm{Vol}(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3) \overset{(L4m.4)}{=} |(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_3| \quad (3a)$$

$$\overset{(L4m.2\text{-}3)}{=} |\varepsilon_{ijk} A^i{}_1 A^j{}_2 A^k{}_3| \quad (3b)$$

Einstein-Summe über ijk

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \overset{(L4m.2\text{-}3)}{=} \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k$

Levi-Civita-Symbol

Hier: $\vec{a} = \vec{A}_1$, $\vec{b} = \vec{A}_2$, $\vec{c} = \vec{A}_3$

Sie sind linear unabhängig, falls sie nicht alle in einer Ebene liegen, also falls $\mathrm{Vol}(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3) \neq 0$

Definition: 'Determinante' einer 3x3 Matrix $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},3,3)$ (4)

$$\begin{vmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 \end{vmatrix} \equiv \det A \equiv (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_3 = \boxed{\varepsilon_{ijk} A^i{}_1 A^j{}_2 A^k{}_3} \quad (5)$$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ Spaltenvektoren sind linear $\overset{(L5.4k.3)}{\Leftrightarrow}$ A ist invertierbar (6)

L6d

Explizit:

$$\det A \overset{(C.5)}{=} \varepsilon_{ijk} A^i{}_1 A^j{}_2 A^k{}_3 = \begin{array}{l} +\underline{A^1{}_1\, A^2{}_2\, A^3{}_3} - \underline{A^1{}_1\, A^3{}_2\, A^2{}_3} \\ +\underline{A^2{}_1\, A^3{}_2\, A^1{}_3} - \underline{A^2{}_1\, A^1{}_2\, A^3{}_3} \\ +\underline{A^3{}_1\, A^1{}_2\, A^2{}_3} - \underline{A^3{}_1\, A^2{}_2\, A^1{}_3} \end{array} \qquad (1)$$

Anmerkung: Indizes in (1) haben folgende Struktur:

- für feste Reihenfolge 123 der (rechten) Spaltenindizes,
- durchlaufen die (linken) Reihenindizes alle möglichen Reihenfolgen ('alle Permutationen'),

$$\underbrace{123,\ 231,\ 312} \qquad \text{und} \qquad \underbrace{132,\ 213,\ 321}$$

- mit Vorzeichen = $\left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}$ für $\left\{ \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \right\}$ Anzahl v. 'Transpositionen' relativ zu 123

('Merkregel des Sarrus' (gilt nur für 3x3 Determinanten, deswegen nicht lohnenswert...)

$$\begin{array}{ccccc} A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 & A^1{}_1 & A^1{}_2 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 & A^2{}_1 & A^2{}_2 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 & A^3{}_1 & A^3{}_2 \end{array}$$

+ für Produktbildung links oben nach rechts unten: $\searrow$

- für Produktbildung links unten nach rechts oben: $\nearrow$ (2)

L6e

<u>Permutationen</u> (Vertauschung der n Zahlen 1,2,3, ... , n)

Jede Permutation P lässt sich schreiben als Folge von 'Transpositionen' ● ● ● ● ● ● (1)

nur zwei Elemente werden vertauscht

'signum'

$\mathrm{sgn}(P) \equiv$ 'Vorzeichen der Permutation' $\equiv \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}$ für $\left\{ \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \right\}$ Anzahl v. Transpositionen (2) (3)

Beispiel: Alle Permutationen von 123:

Permutation P:	[1,2,3]	[1,3,2]	[2,1,3]	[3,2,1]	[2,3,1]	[3,1,2]	(4)
Anzahl Transpositionen:	0	1	1	1	2	2	(5)
sgn (P) :	+1	−1	−1	−1	+1	+1	(6)

Allgemeine Notation für Permutationen:

$P = [P_1, P_2, \ldots, P_j, \ldots, P_n]$ steht für $\left\{ \begin{array}{l} \text{ersetze } 1 \text{ durch } P_1 \\ \text{ersetze } 2 \text{ durch } P_2 \\ \quad\vdots \\ \text{ersetze } j \text{ durch } P_j \\ \quad\vdots \\ \text{ersetze } n \text{ durch } P_n \end{array} \right.$ (7)

ersetze j durch Pj (egal, wo j gerade steht)

Beispiele:

$1\,2\,3\,4 \xrightarrow{[3,1,2,4]} 3\,1\,2\,4$

$4\,1\,3\,2 \xrightarrow{[3,1,2,4]} 4\,3\,2\,1$

n-dimensionales Levi-Civita-Symbol: $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \equiv \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{sgn}(P) & \text{falls } i_1 = P_1, i_2 = P_2, \ldots, i_n = P_n \\ 0 & \text{falls zwei oder mehr Indizes gleich sind} \end{array} \right.$ (8)

(per Def. antisymmetrisch unter Index-Vertauschung) (9)

z.B.: $1 \equiv \varepsilon_{1234} \xrightarrow{14} \varepsilon_{4231} = -1 \xrightarrow{21} \varepsilon_{4132} = +1 \xrightarrow{32} \varepsilon_{4123} = -1, \quad \varepsilon^{1232} = 0$ (10)

Def: Determinante einer nxn Matrix: Sei $A = \{A^i{}_j\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ **L6f**

Summe über S_n, Gruppe aller n! Permutationen, $P = [P_1, P_2, \dots, P_n]$, von $(1, 2, \dots, n)$

$$\det A \equiv \sum_{P\in S_n} (\mathrm{sgn}\, P)\, A^{P_1}{}_1 A^{P_2}{}_2 \dots A^{P_n}{}_n \qquad \text{'Leibniz-Regel'} \qquad (1)$$

(Spaltenindex aufsteigend, Reihenindex permutiert)

$$\overset{(e.8)}{=} \sum_{P\in S_n} \varepsilon_{P_1 P_2 \dots P_n} A^{P_1}{}_1 A^{P_2}{}_2 \dots A^{P_n}{}_n = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} A^{i_1}{}_1 A^{i_2}{}_2 \dots A^{i_n}{}_n \qquad (2)$$

n-fache Einstein-Summation

Terme, in denen nicht alle Indizes verschieden sind, sind gleich Null

Alternative Schreibweise: sortiere in jedem Term das Produkt so, dass Reihenindex aufsteigt:

z.B. $A^2{}_1 A^1{}_2 A^3{}_3 = A^1{}_2 A^2{}_1 A^3{}_3$, oder allgemein: $\prod_{i=1}^{n} A^{P_i}{}_i = \prod_{j=1}^{n} A^j{}_{P^{-1}{}_j}$ (3)

denn: $P_i = j \Rightarrow i = P^{-1}{}_j$

$$\det A \overset{(1,3)}{=} \sum_{P\in S_n} \underbrace{\mathrm{sgn}(P)}_{=\mathrm{sgn}(P^{-1})} A^1{}_{P^{-1}{}_1} A^2{}_{P^{-1}{}_2} \dots A^n{}_{P^{-1}{}_n} \qquad (4)$$

Summe über alle inverse Permutanionen

= Summe über alle Permutation

$$= \sum_{P\in S_n} \mathrm{sgn}(P)\, A^1{}_{P_1} A^2{}_{P_2} \dots A^n{}_{P_n} \qquad (5)$$

(Reihenindex aufsteigend, Spaltenindex permutiert)

$$\overset{(e.8)}{=} \sum_{P\in S_n} \varepsilon^{P_1 P_2 \dots P_n} A^1{}_{P_1} A^2{}_{P_2} \dots A^n{}_{P_n} = \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} A^1{}_{j_1} A^2{}_{j_2} \dots A^n{}_{j_n} \qquad (6)$$

'Laplace-Entwicklung' (Entwicklung einer Det. nach Spalte j oder Zeile i) **L6g**

Die Determinante von A lässt sich auch wie folgt berechnen (ohne Beweis):

Entwicklung nach Spalte j: $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} M^k{}_j A^k{}_j$ (1)

Elemente von Spaltenvektor j, mit j∈ 1, ... , n beliebig, aber fest (d.h. keine Summenkonvention für j)

Entwicklung nach Zeile i: $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} M^i{}_k A^i{}_k$ (2)

Elemente von Reihenvektor i, mit i∈ 1, ... , n beliebig, aber fest (d.h. keine Summenkonvention für i)

Def: 'Unterdeterminante' oder 'Minor': $M^i{}_j$ = Determinante derjenigen (n-1)x(n-1) Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht (3a)

Def: 'Kofaktor': $(-1)^{i+j} M^i{}_j \equiv \tilde{A}^i{}_j$ (3b)

Entwicklung nach Spalte j=1: $\det A = \underbrace{(-1)^{1+1} M^1{}_1 A^1{}_1}_{k=1} + \underbrace{(-1)^{2+1} M^2{}_1 A^2{}_1}_{k=2} + \underbrace{(-1)^{3+1} M^3{}_1 A^3{}_1}_{k=3}$ (4)

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot 2 + (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot 1 + (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot 0 \qquad (5)$$

$$= 2 \cdot (4\cdot 2 - 2\cdot 3) - (-3\cdot 2 - 2\cdot 1) + 0 = 12 \qquad (6)$$

Wähle Spalte oder Zeile mit möglichst vielen Nullen - dann ist Rechnung einfacher!

Geometrische Bedeutung der Determinante für reelle Matrizen

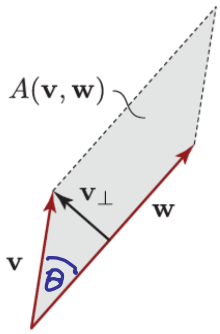
L6h

$$|\det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n)| = \mathrm{Vol}(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n)$$

= Volumen des n-dimensionalen Parallelepipeds, das durch die Spalten (-oder Reihenvektoren) der Matrix aufgespannt wird. (1)

Check: 3D $\quad \mathrm{Vol}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \underbrace{|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|}_{\text{Spatprodukt}} = |\varepsilon_{ijk}\, u^i v^j w^k| \overset{(C\text{-}5)}{=} |\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|$ (2)

Check: 2D $\quad (A(\vec{v},\vec{w}))^2 = (\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\| \sin\theta)^2 = \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2[1-\cos^2\theta]$ (3)



$$= \langle\vec{v},\vec{v}\rangle\langle\vec{w},\vec{w}\rangle - \langle\vec{v},\vec{w}\rangle^2$$

$$= \sum_{ij}\left[(v^i)^2(w^j)^2 - (v^i w^i)(v^j w^j)\right] \quad \text{[i=j Terme kürzen sich zu Null]}$$

$$= (v^1)^2(w^2)^2 + (v^2)^2(w^1)^2 - \underbrace{(v^1w^1)(v^2w^2) - (v^2w^2)(v^1w^1)}_{\text{gleich}}$$

$$= (v^1w^2 - v^2w^1)^2$$

$$A(\vec{v},\vec{w}) = |v^1w^2 - v^2w^1| = |\varepsilon_{ij}\, v^i w^j| = |\det(\vec{v},\vec{w})| \quad (4)$$

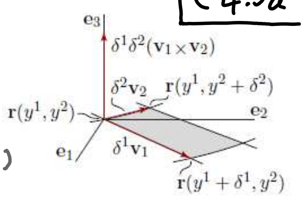
Konsequenz für allgemeines n:

$\det A = 0 \Rightarrow \mathrm{Vol} = 0 \Rightarrow$ Reihen- und Spaltenvektoren sind linear abhängig!

Einschub: C4.2-5 Determinanten und krummlinige Integration

C4.5a

Integrationsmaß = Jacobi-Determinante (!)



2D-Integral: $\displaystyle\int_S dS\, f(\vec{r}) \overset{(C4q.1)}{=} \int dy^1 \int dy^2\, \|\partial_{y^1}\vec{r}\times\partial_{y^2}\vec{r}\|\, f(\vec{r}(y^1,y^2))$ (1)

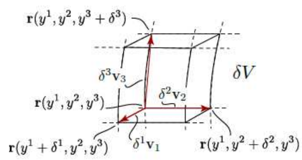
kartesisch: $\vec{r} = (x^1, x^2)^T$

$$\|\partial_{y^1}\vec{r}\times\partial_{y^2}\vec{r}\| = \left|\frac{\partial x^1}{\partial y^1}\frac{\partial x^2}{\partial y^2} - \frac{\partial x^2}{\partial y^1}\frac{\partial x^1}{\partial y^2}\right| = \left|\begin{matrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2}\\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2}\end{matrix}\right| = \det\left[\frac{\partial\vec{r}}{\partial y^1}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial y^2}\right] \equiv \left|\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(y^1,y^2)}\right| \equiv \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{y}}\right| \quad (2)$$

Kurznotation

'Jacobi-Determinante' (in 2D)
'Funktional-Determinante'

Also: Flächenelement: $\quad dS = dy^1\, dy^2 \left|\dfrac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(y^1,y^2)}\right|$ (3)



3D-Integral: $\displaystyle\int_V dV\, f(\vec{r}) \overset{(C4m.1)}{=} \int dy^1 \int dy^2 \int dy^3\, |(\partial_{y^1}\vec{r}\times\partial_{y^2}\vec{r})\cdot\partial_{y^3}\vec{r}|\, f(\vec{r}(y^1,y^2,y^3))$ (4)

Spatprodukt der Koordinatenbasisvektoren = 'Jacobi-Determinante' (in 3D)
'Funktional-Determinante'

kartesisch: $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)^T$

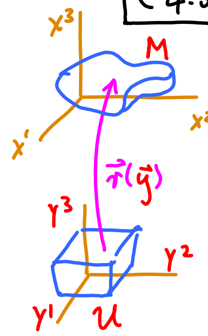
$$\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial y^1}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial y^3} \overset{(L6c.5)}{=} \left|\begin{matrix}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \frac{\partial x^1}{\partial y^3}\\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \frac{\partial x^2}{\partial y^3}\\ \frac{\partial x^3}{\partial y^1} & \frac{\partial x}{\partial y^2} & \frac{\partial x^3}{\partial y^3}\end{matrix}\right| = \det\left[\frac{\partial\vec{r}}{\partial y^1}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial y^2}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial y^3}\right] \equiv \left|\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(y^1,y^2,y^3)}\right| \equiv \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{y}}\right| \quad (5)$$

Kurznotation

Also: Volumenelement: $\quad dV = dy^1\, dy^2\, dy^3 \left|\dfrac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(y^1,y^2,y^3)}\right|$ (6)

Krummlinige Integration in n Dimensionen

C4.5b



$$\vec{r}: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{y} \longmapsto \vec{r}(\vec{y}) \equiv \vec{x}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x^1(y^1, \dots, y^n) \\ \vdots \\ x^n(y^1, \dots, y^n) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

krummlinig ($\vec{y}$) kartesisch ($\vec{x}$)

n-dimensionales 'Volumenelement':
$$dV^n = dy^1 \dots dy^n \cdot \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right| \qquad (2)$$

'Jacobi-Determinante', 'Funktionaldeterminante': = Volumenelement, welches von Koordinatenbasisvektoren $\vec{v}_j = \frac{\partial \vec{x}}{\partial y^j}$ aufgespannt wird:

$$\left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}}\right| \equiv \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right| = \det\left[\frac{\partial \vec{x}}{\partial y^1}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial y^n}\right] \equiv \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial y^n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \frac{\partial x^n}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

n-dimensionales Integral:

$$\int_M dx^1 \dots \int dx^n f(x^1, \dots, x^n) = \int_U dy^1 \dots \int dy^n \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right| f(x^1(\vec{y}), \dots, x^n(\vec{y})) \qquad (4)$$

Das ist Verallgemeinerung der Substitutionsregel, (C2g.7): $\int dx\, f(x) = \int dy \left|\frac{dx}{dy}\right| f(x(y))$ (5)

Eigenschaften von Determinanten

L6i

Im Folgenden sei $A = \{A^i{}_j\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$, $\quad \vec{A}_j = \begin{pmatrix} A^1{}_j \\ \vdots \\ A^n{}_j \end{pmatrix} =$ Spaltenvektor j $\in \mathbb{C}^n$ (1)

Notation:
$$\det A = \begin{vmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & \cdots & A^1{}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n{}_1 & A^n{}_2 & & A^n{}_n \end{vmatrix} \equiv \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n) \qquad (2)$$

(i) Diagonalmatrix

Für
$$A = \{\lambda_i \delta^i{}_j\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

gilt
$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad (4)$$
[nur der erste Term in Leibniz-Regel ist ungleich Null]

[vergleiche 2x2 Matrix, Gl. (b.5), 3x3 Matrix, Gl. (d.1)]

Für Einheitsmatrix: $\det(\mathbb{1}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \dots 1 = 1$ (5)

L6j

(ii) Transponierte $\qquad \det A^T = \det A \qquad (1)$

$$A = \{A^i{}_j\}, \quad A^T = \{A^T{}_j{}^i\}, \quad A^T{}_j{}^i \overset{(L5.2e.3)}{=} A^i{}_j \qquad (2) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Begründung: $\det(A^T) \overset{(f.1)}{=} \sum_P \mathrm{sgn}(P) \prod_i A^T{}_{P_i}{}^i \overset{(2)}{=} \sum_P \mathrm{sgn}(P) \prod_P A^i{}_{P_i} \overset{(f.5)}{=} \det(A)$

Spaltenindex aufsteigend, Reihenindex permutiert

Reihenindex aufsteigend, Spaltenindex permutiert

Konsequenz: alle Aussagen für Determinanten, die im Folgenden für Spaltenvektoren einer Matrix gemacht werden, gelten auch für Zeilenvektoren einer Matrix.

(iii) 'Multilinearität':

$$\det(\ldots, \overbrace{\lambda \vec{B} + \mu \vec{C}}^{j\text{-Spalte}}, \ldots) = \lambda \det(\ldots, \overset{j\text{-Spalte}}{\vec{B}}, \ldots) + \mu \det(\ldots, \overset{j\text{-Spalte}}{\vec{C}}, \ldots) \qquad (4)$$

Begründung: links $= \sum_P \mathrm{sgn}(P) \; A^{P_1}{}_1 \ldots (\lambda \vec{B} + \mu \vec{C})^{P_j}{}_j \ldots A^{P_n}{}_n \qquad (5)$

$$= \lambda \sum_P \mathrm{sgn}(P) A^{P_1}{}_1 \ldots B^{P_j} \ldots A^{P_n}{}_n + \mu \sum_P \mathrm{sgn}(P) A^{P_1}{}_1 \ldots C^{P_j} \ldots A^{P_n}{}_n = \text{rechts} \qquad (6)$$

Multilinearität impliziert 'Homogenität': $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ (jede der n Spalten liefert einen Faktor λ) $\qquad (7)$

L6k

(iv) Antisymmetrie (Vorzeichenwechsel) bei Vertauschen von Spalten:

$$\boxed{\det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_i, \ldots, \vec{A}_j, \ldots, \vec{A}_n) = -\det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_j, \ldots, \vec{A}_i, \ldots, \vec{A}_n)} \qquad (1)$$

Begründung:

links $\overset{(f.2)}{=} \varepsilon_{\ell_1 \ldots \ell_i \ldots \ell_j \ldots} \; A^{\ell_1}{}_1 \ldots A^{\ell_i}{}_i \ldots A^{\ell_j}{}_j \ldots A^{\ell_n}{}_n \qquad \ell, k \qquad (2)$

vertausche Indizes: liefert (-1); $\qquad$ in jedem Term der Summe, vertausche Reihenfolge der Faktoren

$$= -\varepsilon_{\ell_1 \ldots \ell_j \ldots \ell_i \ldots \ell_n} A^{\ell_1}{}_1 \ldots A^{\ell_j}{}_j \ldots A^{\ell_i}{}_i \ldots A^{\ell_n}{}_n \qquad (3)$$

bennene Indizes um: $\ell_i \leftrightarrow \ell_j$

$$= -\varepsilon_{\ell_1 \ldots \ell_i \ldots \ell_j \ldots \ell_n} A^{\ell_1}{}_1 \ldots A^{\ell_i}{}_j \ldots A^{\ell_j}{}_i \ldots A^{\ell_n}{}_n \overset{(f.2)}{=} \text{rechts} \qquad (4)$$

Antisymmetrie impliziert: sind zwei Spalten oder zwei Zeilen gleich, ist $\boxed{\det A = 0}$ $\qquad (5)$

Begründung: (1) mit i-Spalte = j-Spalte:

$$\det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_i, \ldots, \vec{A}_i, \ldots, \vec{A}_n) \overset{(1)}{=} -\det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_i, \ldots, \vec{A}_i, \ldots, \vec{A}_n) \qquad (6)$$

$$\det A = -\det A \implies \det A = 0 \qquad \square \qquad (7)$$

[Anwendung in QM: Pauli-Prinzip für Fermionen!]

Konsequenz von (iii,iv): addiert man zu einer Spalte (Zeile) die mit einer Zahl μ multiplizierten Elemente einer anderen Spalte (Zeile), ändert sich die Determinante nicht:

$$\det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_i + \mu \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_n) \overset{(j.4)}{=} \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_i, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_n) \qquad (1)$$

$$+ \mu \underbrace{\det(_1, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_j, \dots, _n)}_{= 0} \,..$$

zwei gleiche Spalten: (l.3)

$\square$

Konsequenz für Gauß-Algorithmus: bei Zeilenaddition der Form $[z_1] + \mu[z_2]$ ändert sich Det. nicht!

(v): Falls Spaltenvektoren von A linear abhängig sind, dann gilt $\quad \det(A) = 0 \qquad (2)$

(oder Zeilenvektoren...)

Beweis: falls Spaltenvektoren linear abhänig sind, gilt: $\quad \sum_{i=1}^{n} \vec{A}_i c^i = \vec{0} \qquad (3)$

wobei nicht alle c^i gleich 0 sind. Sei z.B. $c^n \neq 0$ dann $\quad \vec{A}_n = -\frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^{n-1} \vec{A}_i c^i \qquad (4)$

Eingesetzt in

$$\det(A) = \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_{n-1}, \vec{A}_n) \qquad (5)$$

$$\overset{(4)}{=} \det\left(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_{n-1}, -\frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^{n-1} \vec{A}_i c^i\right) \qquad (6)$$

Multilinearität:

$$\overset{(j.4)}{=} -\frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^{n-1} c^i \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_{n-1}, \vec{A}_i) \overset{(k.5)}{=} 0 \qquad (7)$$

gleich Null, da in jedem Term zwei Spaltenvektoren gleich sind (weil $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$)

(vi) Konstruktion der Inversen:

Laplace-Entwicklung nach Spalte i:

$$\det A = \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_i, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_n) \overset{(g.1)}{=} \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}^k{}_i \, \underbrace{A^k{}_i}_{} \qquad (1)$$

$$\tilde{A}^k{}_i \overset{(g.4)}{=} (-1)^{k+i} M^k{}_i$$

Spalte i $\qquad$ Spalte j $(\neq i)$ $\qquad$ Spaltenvektor an Position i

Falls $\vec{A}_i$ durch Kopie der j-Spalte, $\vec{A}_j$ ersetzt wird, sind zwei Spalten gleich und det( ) = 0:

$$0 \overset{(k.5)}{=} \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_j, \dots, \vec{A}_n) \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}^k{}_i \, \underbrace{A^k{}_j}_{} \qquad (j \neq i) \qquad (2)$$

Spaltenvektor an Position i

Betrachte nun folgende Matrix: $\quad C = \{C^i{}_k\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n), \quad C^i{}_k \equiv \frac{\tilde{A}^k{}_i}{\det A} \qquad (3)$

$$(C \cdot A)^i{}_j \overset{(L5k.2)}{=} \sum_{k=1}^{n} C^i{}_k A^k{}_j \overset{(3)}{=} \frac{1}{\det A} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \tilde{A}^k{}_i A^k{}_j}_{} \overset{(5,6)}{=} \delta^i{}_j \qquad (4)$$

$$= \begin{cases} \det A & \text{falls } i = j \quad (m.1) \qquad (5) \\ 0 & \text{falls } i \neq j \quad (m.2) \qquad (6) \end{cases}$$

Fazit: $\quad C = A^{-1} \qquad (7)$

Satz: die Inverse der Matrix A existiert genau dann, wenn $\quad \det A \neq 0 \qquad (8)$

und ist gegeben durch $\quad A^{-1} = C \quad$ mit $\quad C^i{}_k \overset{(3)}{=} \frac{\tilde{A}^k{}_i}{\det A} \qquad (9)$

L6n

(vi) Konsequenzen von det(A) = 0:

$$\det(A) = 0 \qquad (1)$$

$\overset{(m.8)}{\Longleftrightarrow}$ A^{-1} existiert nicht (2)

$\overset{(L5.4k.1)}{\Longleftrightarrow}$ Spaltenvektoren v. A sind linear abhängig und bilden keine Basis von $\mathbb{C}^n$ (3)

$\overset{(j.1)}{\Longleftrightarrow}$ Reihenvektoren " " " " " " " " " " (4)

$\overset{(L5.4k.2)}{\Longleftrightarrow}$ Nullraum v. A ist nicht-trivial, d.h. es exitiert ein $\vec{v} \neq \vec{0}$ mit $A \cdot \vec{v} = \vec{0}$ (5)

(vi) Multiplikationstheorem:
für nxn-Matrizen
(Beweis: nächste Seite)

$$\boxed{\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B)} \qquad (6)$$

(vii) Determinante der Inversen:

$$\boxed{\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}} \qquad (7)$$

Beweis: $(\det A)(\det A^{-1}) \overset{(6)}{=} \det(\underbrace{A \cdot A^{-1}}_{= \mathbb{1}}) = \det(\mathbb{1}) \overset{(h.5)}{=} 1$ $\square$ (8)

L6p

Beweis des Multiplikationstheorems

$$\det(A \cdot B) = \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} (A\cdot B)^{i_1}{}_1 \cdots (A\cdot B)^{i_n}{}_n = \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} A^{i_1}{}_{j_1} B^{j_1}{}_1 \cdots A^{i_n}{}_{j_n} B^{j_n}{}_n \qquad (1)$$

Umsortierung der Faktoren in jedem Term der (n-Quadrat)-fachen Einstein-Summe:

(A's vorne, B's hinten)

$$= \underbrace{\varepsilon_{i_1 \cdots i_n} A^{i_1}{}_{j_1} \cdots A^{i_n}{}_{j_n}} B^{j_1}{}_1 \cdots B^{j_n}{}_n \qquad (2)$$

$$\overset{(f.2)}{=} \det(\vec{A}_{j_1}, \cdots, \vec{A}_{j_n}) B^{j_1}{}_1 \cdots B^{j_n}{}_n \qquad (3)$$

Umsortierung der Spaltenvektoren von A in jedem Term der n-fachen Einstein-Summe:

$$= \det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n)\, \varepsilon_{j_1 \cdots j_n} B^{j_1}{}_1 \cdots B^{j_n}{}_n \qquad (4)$$

$$\overset{(f.2)}{=} \det A \cdot \det B \qquad (5)$$

Levi-Civita-Symbol in (4) liefert das Vorzeichen, das beim Vertauschen von Spalten entsteht.
Beispiel:

$$\underbrace{\varepsilon_{123}}_{=1} \det(A_1, A_2, A_3) \overset{1 \leftrightarrow 3}{=} \varepsilon_{321} \det(A_3, A_2, A_1) \overset{2 \leftrightarrow 1}{=} \varepsilon_{312} \det(A_3, A_1, A_2) \qquad (6)$$

ε_{312} (6): $\varepsilon_{312} \det(A_1, A_2, A_3) = \det(A_3, A_1, A_2)$, denn $(\varepsilon_{312})^2 = 1$ (7)

Zusammenfassung: L6 Determinanten

ZL6a

Determinante: diagnostiziert lin. Unabhängigkeit d. Spaltenvektoren einer nxn-Matrix

Leibniz-Regel: $$\det A \equiv \sum_P \mathrm{sgn}(P)\, A^{P1}{}_1 \dots A^{Pn}{}_n = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} A^{i_1}{}_1 \dots A^{i_n}{}_n \qquad (1)$$

2x2: $$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = a^1 b^2 - a^2 b^1$$ 3x3: $$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\, a^i b^j c^k \qquad (2)$$

Laplace-Entwicklung: $$\det A = \sum_{k=1}^n \tilde{A}^k{}_j A^k{}_j = \sum_{k=1}^n \tilde{A}^i{}_k A^i{}_k \qquad (3)$$ (hier keine

(j fest) (i fest)

Kofaktor: $$\tilde{A}^i{}_j \equiv (-1)^{i+j} M^i{}_j \qquad (4)$$ Unterdeterminante: (streiche Zeile i, Spalte j aus A, bilde dann die Determinante)

Diagonalmatrix: $$\det(\lambda_i \delta^i{}_j) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad , \quad \det \mathbb{1} = 1 \qquad (5)$$

Transponierte: $$\det A = \det A^T \qquad (6)$$

ZL6b

Multilinearität: $$\det(\vec{A}_1, \dots, \underbrace{\lambda \vec{B} + \mu \vec{C}}_{\text{j-Spalte}}, \dots, \vec{A}_n) = \lambda \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{B}, \dots, \vec{A}_n) + \mu \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{C}, \dots, \vec{A}_n) \qquad (1)$$ j-Spalte

Antisymmetrie: Vorzeichenwechsel beim Vertauschen v. zwei Zeilen oder zwei Spalten.

$$\det(\dots, \vec{B}, \dots, \vec{C}, \dots) = -\det(\dots, \vec{C}, \dots, \vec{B}, \dots) \qquad (2)$$

Zwei gleiche Spalten oder Zeilen: $$\det(\dots, \vec{B}, \dots, \vec{B}, \dots) = 0 \qquad (3)$$

Konstruktion des Inversen: $$A = \{A^i{}_j\} \Rightarrow A^{-1} \equiv C = \{C^i{}_k\}, \quad C^i{}_k = \frac{\tilde{A}^k{}_i}{\det A} \qquad (4)$$

$\boxed{\det A \neq 0}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{A invertierbar}}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{Spaltenvektoren v. A sind lin. unabhängig}}$

Multiplikationstheorem: $$\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B) \qquad (5)$$

Det. der Inversen $$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} \qquad (6)$$