L5.4 Inverse einer Matrix

L5.4a

Ausgangsfrage: Wie löst man ein lineares Gleichungsystem (LSG)?

Betrachte n lineare Gleichungen für n Unbekannte:

$$\begin{aligned} A^1{}_1 x^1 + A^1{}_2 x^2 + \dots + A^1{}_n x^n &= b^1 \\ A^2{}_1 x^1 + A^2{}_2 x^2 + \dots + A^2{}_n x^n &= b^2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ A^n{}_1 x^1 + A^n{}_2 x^2 + \dots + A^n{}_n x^n &= b^n \end{aligned} \qquad A^i{}_j x^j = b^i, \quad i,j = 1,\dots,n \qquad (1)$$

Ziel: durch geeignete Umformungen
- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

(2)

bringe man das LSG in 'Diagonalform' (1 auf der 'Diagonalen', 0 überall sonst):

$$\begin{aligned} 1\cdot x^1 + 0\cdot x^2 + \dots + 0\cdot x^n &= d^1 \\ 0\cdot x^1 + 1\, x^2 + \dots + 0\cdot x^n &= d^2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ 0\cdot x^1 + 0\cdot x^2 + \dots + 1\cdot x^n &= d^n \end{aligned}$$

Dann folgt sofort: $\boxed{x^i = d^i}$

Nützliches Hilfsmittel (um Schreiberei zu reduzieren): 'Erweiterte Matrix':

L5.4b

Start: Ziel:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} A^1{}_1 & A^1{}_2 & \dots & A^1{}_n & b^1 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & \dots & A^2{}_n & b^2 \\ \vdots & & & & \\ A^n{}_1 & A^n{}_2 & \dots & A^n{}_n & b^n \end{array}\right) \xrightarrow{\text{'Gauß-Verfahren'}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d^1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d^2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & d^n \end{array}\right) \qquad (1)$$

Beispiel: finde Lösung des Systems:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} x^1 + \tfrac{1}{3} x^2 + \tfrac{1}{3} x^3 &= 1 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= 2 \\ 2x^1 + 3x^2 + x^3 &= 1 \end{aligned} \qquad (2)$$

Ratschlag: Falls Brüche auftauchen, Zeile mit Hauptnenner durchmultiplizieren!

Zeile: Erweiterte Matrix:

$$\begin{array}{l} [1]: \\ [2]: \\ [3]: \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad (3) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 3[1]: \\ [2]-3[1]: \\ [3]-6[1]: \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \quad (4)$$

$$
\begin{array}{l|ccc|c}
[1]-[2]: & 1 & 0 & -1 & 4 \\
[2]+2[3]: & 0 & 3 & 0 & -11 \\
[2]-[3]: & 0 & 0 & 3 & 4
\end{array}
\quad (1) \quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{l|ccc|c}
[1]+\frac{1}{3}[3]: & 1 & 0 & 0 & 16/3 \\
\frac{1}{3}[2]: & 0 & 1 & 0 & -11/3 \\
\frac{1}{3}[3] & 0 & 0 & 1 & 4/3
\end{array}
\quad (2)
$$

LS.4c

Lösung: $x^1 = 16/3, \quad x^2 = -11/3, \quad x^3 = 4/3$ (3)

konsistent mit z1 ✓

Check durch einsetzen:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{3}x^1 + \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 &= \tfrac{16}{9} + -\tfrac{11}{9} + \tfrac{4}{9} = \tfrac{9}{9} \stackrel{\text{z1}}{=} 1 \quad ✓ \\
x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= \tfrac{16}{3} - 2\cdot\tfrac{11}{3} + 3\cdot\tfrac{4}{3} = \tfrac{6}{3} = 2 \quad ✓ \\
2x^1 + 3x^2 + x^3 &= 2\cdot\tfrac{16}{3} - 3\cdot\tfrac{11}{3} + \tfrac{4}{3} = \tfrac{3}{3} = 1 \quad ✓
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Falls das Gauß-Verfahren eine Zeile der Form $0 \;\; 0 \;\; 0 \;|\; d \neq 0$ liefert, hat das LGS <u>keine</u> Lösung.

Falls das Gauß-Verfahren eine 'Nullzeile' der Form $0 \;\; 0 \;\; 0 \;|\; 0$ liefert, kann eine der Variablen x^ν frei gewählt werden. Setze diese Variable gleich einem Parameter, z.B. $x^\nu = t$. Lösung ist dann eine 'Parameterschar'.

(Falls m Nullzeilen vorkommen, sind m der Variablen frei wählbar, $\Longrightarrow$ m unabhängige Parameter.)

Betrachte nun analoges Gleichungssystem, aber mit <u>anderem</u> Vektor rechts, $\vec{b}'$

LS.4d

Um es zu lösen, müssten wir Gauß-Verfahren wiederholen. Umständlich!

Es geht aber auch kompakter, mittels Matrix-Notation:

Kompakte Notation für (a.1): $A^i{}_j \, x^j = b^i$ (1)

Schreibe $A = \{A^i{}_j\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$, (quadratisch) $\quad \left.\begin{array}{l}\vec{x} = \{x^j\} \\ \vec{b} = \{b^i\}\end{array}\right\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, 1)$ (2)

Matrix-Notation (1): $\boxed{A \cdot \vec{x} \stackrel{(1)}{=} \vec{b}}$ $\quad \left(\vdots\vdots\vdots\right)\left(\vdots\right) = \left(\vdots\right)$ (3)

Angenommen, es gibt eine 'inverse Matrix' zu A, mit: $A^{-1} \cdot A = \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$ (4)

dann:

$A^{-1} \cdot (3)$: $\quad \underbrace{A^{-1} \cdot (A}_{\mathbb{1}} \cdot \vec{x}) \stackrel{(3)}{=} A^{-1} \cdot \vec{b}$ $\quad \underbrace{\left(\vdots\vdots\vdots\right)\left(\vdots\vdots\vdots\right)}_{\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)}\left(\vdots\right) = \left(\vdots\vdots\vdots\right)\left(\vdots\right)$ (5)

(4): $\mathbb{1}$

Gesuchte Lösung: (funktioniert für alle $\vec{b}$!) $\quad \boxed{\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}}$ $\quad \left(\vdots\right) = \left(\vdots\vdots\vdots\right)\left(\vdots\right)$ (6)

L5.4e

Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ heisst 'invertierbar',

falls eine 'inverse Matrix' $A^{-1} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ existiert, mit

$$\boxed{A^{-1}A = \mathbb{1}} \quad (1) \quad \text{und} \quad \boxed{A\,A^{-1} = \mathbb{1}} \qquad (2)$$

wobei

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \text{Einheitsmatrix.} \qquad (3)$$

(1) impliziert (2):

$$A = A\cdot\mathbb{1} \overset{(1)}{=} A\cdot(A^{-1}\cdot A) \overset{\text{Assoziativität}}{=} \underbrace{(A\cdot A^{-1})}\cdot A \qquad (4)$$

$$\Longrightarrow \quad A\cdot A^{-1} = \mathbb{1} \quad \Longrightarrow (2) \qquad (5)$$

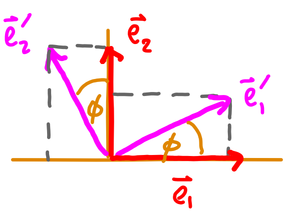
[Analog: (2) impliziert (1).]

Wie findet man Inverse? Seite L5.4h. Kriterien für Invertierbarkeit: später...

L5.4f

Beispiel: 2x2-Rotationsmatrix

Rotation: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \overset{R(\phi)}{\longmapsto} \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}$, $\quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \overset{R(\phi)}{\longmapsto} \begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}$ (1)



Rotationsmatrix:

[laut (L5.2d.5) sind Spalten v. R die Abbilder v. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$]

$$\boxed{R(\phi) = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}} \qquad (2)$$

Inverse v. R = Rotation um $-\phi$:

$$R^{-1}(\phi) = R(-\phi) = \begin{bmatrix}\cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi)\end{bmatrix} \qquad (3)$$

Check:

$\cos \equiv c$

$\sin \equiv s$

$$R^{-1}(\phi)\,R(\phi) = \begin{pmatrix}c & s \\ -s & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c & -s \\ s & c\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}c^2+s^2 & -cs+sc \\ -sc+cs & (-s)^2+c^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (4)$$

Übrigens:

$\cos\phi_1 = c_1$

$\sin\phi_1 = s_1$

$\cos\phi_2 = c_2$

$\sin\phi_2 = c_2$

$$R(\phi_1)\,R(\phi_2) = \begin{bmatrix}c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1c_2 - s_1s_2 & -c_1s_2 - s_1c_2 \\ s_1c_2 + c_1s_2 & -s_1s_2 + c_1c_2\end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$= \begin{bmatrix}\cos(\phi_1+\phi_2) & -\sin(\phi_1+\phi_2) \\ \sin(\phi_1+\phi_2) & \cos(\phi_1+\phi_2)\end{bmatrix} \qquad (6)$$

Beispiel: Allgemeine 2x2-Matrix

Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (1) dann $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$ (2) [Inverse existiert nur falls $ad-bc \neq 0$] (3)

Check:

$$A^{-1}\cdot A = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Eigenschaften der Inversen

1) $$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1} \quad (5)$$

Check: $$(\lambda^{-1}A^{-1})\cdot(\lambda A) \overset{(g.4)}{=} \lambda^{-1}\lambda\,(A^{-1}\cdot A) = 1\cdot\mathbb{1} \quad (6)$$

2) $$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1} \quad (7)$$

Check: $$(B^{-1}\cdot \underbrace{A^{-1})(A}_{\mathbb{1}}\cdot B) = B^{-1}\cdot\mathbb{1}\cdot B = B^{-1}\cdot B = \mathbb{1} \quad \square \quad (8)$$

Warnung: $$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$ [wie auch in $\mathbb{R}$: $(a+b)^{-1} \neq a^{-1}+b^{-1}$] (9)

Bestimmung der Inversen: Rückführung auf Lösung v. n linearen Gleichungssystemen

Sei $A = \{A^i{}_j\} \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ (1)

und

$$A^{-1} \equiv C \equiv \{C^j{}_k\} = \begin{bmatrix} C^1{}_1 & \cdots & C^1{}_k & \cdots & C^1{}_n \\ C^j{}_1 & \cdots & C^j{}_k & \cdots & C^j{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C^n{}_1 & \cdots & C^n{}_k & \cdots & C^n{}_n \end{bmatrix} \equiv (\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_k, \dots, \vec{C}_n) \quad (2)$$

n Spaltenvektoren, mit Komponenten: $(\vec{C}_k)^j \equiv C^j{}_k$ (3)

$$\Rightarrow \quad A\cdot A^{-1} \overset{(t.4)}{=} \mathbb{1} \quad (4)$$

$$A^i{}_j\, C^j{}_k \overset{(m.1)}{=} \delta^i{}_k \quad (5)$$

$$\boxed{A\cdot\vec{C}_k = \vec{e}_k} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} A^1{}_1 & \cdots & A^1{}_j & \cdots & A^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i{}_1 & \cdots & A^i{}_j & \cdots & A^i{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^n{}_1 & \cdots & A^n{}_j & \cdots & A^n{}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^1{}_k \\ \vdots \\ C^j{}_k \\ \vdots \\ C^n{}_k \end{bmatrix} = \begin{array}{r} \\ \\ \text{k-te Stelle} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_k \quad (7)$$

[spielt die Rolle von b in (d.3)]

Für jeden Wert von $k = 1, \dots, n$ liefert (6) ein anderes LGS (wegen anderem $\vec{e}_k$),
zu lösen für den Spaltenvektor $\vec{C}_k$. [(h.6) hat dieselbe Form wie (d.3)] (8)

Die aus diesen Spaltenvektoren gebildete Matrix (2) ist dann die gesuchte Inverse, A^{-1}

Die n Gl.systeme der Form (h.7) lassen sich gleichzeitig lösen, mit Gauß-Verfahren: **L5.4i**

$$
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
A^1{}_1 & \cdots & A^1{}_j & \cdots & A^1{}_n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\
A^i{}_1 & \cdots & A^i{}_j & \cdots & A^i{}_n & 0 & 0 & 1 & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\
A^n{}_1 & \cdots & A^n{}_j & \cdots & A^n{}_n & 0 & \cdots & & \cdots & 1
\end{array}\right) \quad (1)
\xrightarrow{\text{Gauß-Verfahren}}
\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C^1{}_1 & \cdots & C^1{}_k & \cdots & C^1{}_n \\
0 & 1 & 0 & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 1 & & \vdots & C^j{}_1 & \cdots & C^j{}_k & \cdots & C^j{}_n \\
\vdots & & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & & \cdots & 1 & C^n{}_1 & \cdots & C^n{}_k & \cdots & C^n{}_n
\end{array}\right)
$$

Linker Block: A

(h.8): $C = \underline{A}^{-1}$ (2)

Beispiel (vergleiche Seite b):

Zeile:

Erweiterte Matrix:

$$
\begin{array}{r}
[1]: \\ [2]: \\ [3]:
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right) \quad (3)
$$

Linker Block: A

$$
\begin{array}{r}
3[1]: \\ [2]-3[1]: \\ [3]-6[1]:
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -6 & 0 & 1
\end{array}\right) \quad (4)
$$

L5.4j

$$
\begin{array}{r}
[1] \quad [2]: \\ [2]+2[3]: \\ [2]-[3]:
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & -1 & 6 & -1 & 0 \\
0 & 3 & 0 & -15 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 3 & 3 & 1 & -1
\end{array}\right) \quad (1)
$$

$$
\begin{array}{r}
[1]+\frac{1}{3}[3]: \\ \frac{1}{3}[2]: \\ \frac{1}{3}[3]
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 7 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\
0 & 1 & 0 & -5 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\
0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}
\end{array}\right) \quad (2)
$$

Rechter Block: $= A^{-1}$

Check:

$$
A \cdot A^{-1} \overset{(i.3)}{=} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \overset{(j.2)}{} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 21 & -2 & -1 \\ -15 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} (21-15+3) & (-2+1+1) & (-1+2-1) \\ (63-90+27) & (-6+6+9) & (-3+12-9) \\ (126-135+9) & (-12+9+3) & (-6+18-3) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark
$$

L5.5 Allgemeine lineare Abbildungen und Matrizen

V sei ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Basis $\quad V \equiv \text{span}\{\hat v_j\},\quad j = 1,\dots,n \leftarrow \dim(V)$ (1)

W sei ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Basis $\quad W \equiv \text{span}\{\hat w_i\},\quad i = 1,\dots,m \leftarrow \dim(W)$ (2)

[Hut bedeutet hier: allgemein/abstrakt, im Gegensatz zu bisherigen Spaltenvektoren in $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$

Betrachte lineare Abbildung: $\quad \hat A : V \longrightarrow W$ (3)

Wirkung auf Basis sei:
(durch diese Information ist A eindeutig festgelegt)

$$\hat v_j \longmapsto \hat u_j = \hat A(\hat v_j) \equiv \hat w_i A^i{}_j \qquad (4)$$

Bild von v-Basisvektor j ist
Linearkombination von w-Basisvektoren

Wirkung von A auf
beliebigen Vektor in V:

$$\hat v_j x^j \equiv \hat x \longmapsto \hat A(\hat x) = \hat y \equiv \hat w_i y^i \qquad (5)$$

(dargestellt in jeweiliger Basis):

$$\hat w_i y^i = \hat y \overset{(5)}{=} \hat A(\hat v_j x^j) = \hat A(\hat v_j) x^j \overset{(4)}{=} \hat u_j x^j \overset{(4)}{=} \hat w_i \underbrace{A^i{}_j x^j}_{\equiv y^i} \quad (6) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y^i = A^i{}_j x^j} \quad (7)$$

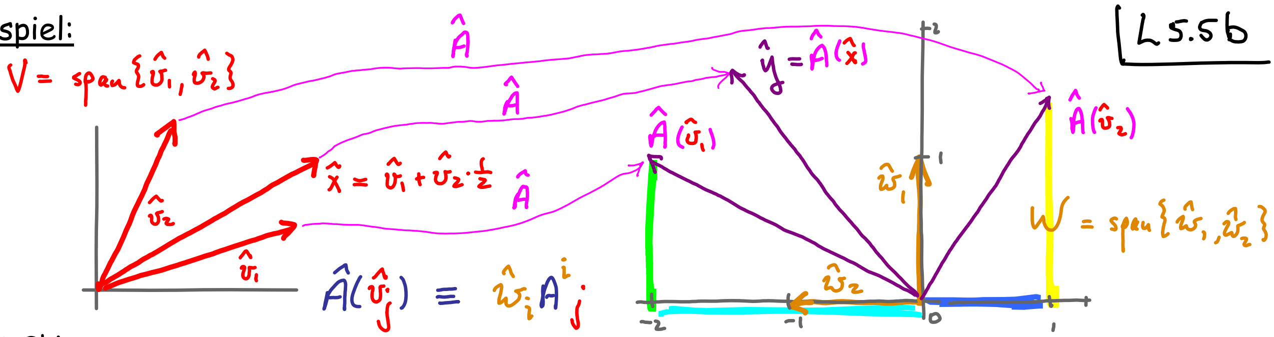
A ist linear, (L5b.2)

(7) entspricht einer Abbildung
zwischen Standardvektorräumen: $\quad A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$

$A \in \text{mat}(\mathbb{C}, m, n)$

$$(x^1,\dots,x^n)^T = \vec x \longmapsto \boxed{A \cdot \vec x = \vec y} = (y^1,\dots,y^m)^T \qquad (8)$$

Beispiel:



Laut Skizze:

$$\hat A(\hat v_1) = \vec u_1 = \hat w_1 \cdot 1 + \hat w_2 \cdot 2 = \hat w_i A^i{}_1 \quad \Rightarrow \quad A^1{}_1 = 1, \quad A^2{}_1 = 2 \qquad (1)$$

$$\hat A(\hat v_2) = \vec u_2 = \hat w_1 \cdot \tfrac{3}{2} + \hat w_2 \cdot (-1) = \hat w_i A^i{}_2 \quad \Rightarrow \quad A^1{}_2 = \tfrac{3}{2}, \quad A^2{}_2 = -1 \qquad (2)$$

Können wir hieraus die Wirkung v. A auf einen anderen Vektor, $\vec x$ bestimmen? Ja!

$$\hat y \equiv \hat A(\hat x) = \hat A(\hat v_1 + \hat v_2 \cdot \tfrac12) = \hat A(\hat v_1)\cdot 1 + \hat A(\hat v_2)\cdot \tfrac12 \qquad (3)$$

$$\overset{(1),(2)}{=} (\hat w_1 \cdot 1 + \hat w_2 \cdot 2)\cdot 1 + \left(\hat w_1 \cdot \tfrac32 + \hat w_2 \cdot (-1)\right)\cdot \tfrac12 = \hat w_1 \underbrace{\tfrac74}_{1\cdot 1 + \frac32 \cdot \frac12} + \hat w_2 \cdot \underbrace{\tfrac32}_{2\cdot 1 + (-1)\cdot\frac12} \qquad (4)$$

Kompaktversion in Matrixnotation:

$$\vec x = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac12 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec y = A \cdot \vec x = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 3/2 \cdot 1/2 \\ 2\cdot 1 \; - 1 \cdot 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

L5.5c

Für Basisvektoren: $V \xrightarrow{\hat{A}} W$

diese Gl. definiert die Abbildung

$$V \ni \quad \hat{v}_j \longmapsto \hat{u}_j = \hat{A}\,\hat{v}_j = \hat{w}_i\, A^i{}_j \quad \in W \qquad (1)$$

$\phi_{\hat{v}} \downarrow$ (L2.5a.4) $\qquad\qquad$ (L2.5a.4) $\downarrow \phi_{\hat{w}}$

$$\mathbb{C}^n \ni \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_j \longmapsto \vec{u} = A\,\vec{e}_j = \vec{f}_i\, A^i{}_j = \begin{pmatrix} A^1{}_j \\ A^i{}_j \\ A^m{}_j \end{pmatrix} = \vec{A}_j \quad \in \mathbb{C}^m \qquad (2)$$

Position j $\qquad$ $\vec{f}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Position i $\qquad (3)$

$\boxed{\vec{A}_j \;=\; \text{Spalte j der Matrix } A\text{, ist Bild des Basisvektors } \vec{e}_j \text{ unter Abbildung A.}}$ $\qquad (4)$

Für allgemeine Vektoren: $V \xrightarrow{\hat{A}} W$

$$V \ni \quad \hat{v}_j x^j = \hat{x} \longmapsto \hat{A}\,\hat{x} = \hat{y} = \hat{w}_i\, y^i \quad \in W \qquad (5)$$

$\phi_{\hat{v}} \downarrow \qquad\qquad \downarrow \phi_{\hat{w}} \qquad \downarrow \phi_{\hat{w}}$

$$\mathbb{C}^n \ni \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \vec{x} \longmapsto \boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{y}} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{C}^m \qquad (6)$$

L5.6a

L5.6 Basistransformation

[vergleiche Seite L2.5a,b] [wie L5.5, nun mit W=V]

$\{\hat{v}_j\}$, $\{\hat{v}'_{i'}\}$ seien zwei Basen für V, $\dim(V) = n$ mit $\boxed{\hat{v}_j = \hat{v}'_{i'}\, T^{i'}{}_j}$ $\qquad (1)$

$j, i' = 1, \dots, n$

In $\{\hat{v}_j\}$-Basis, $\quad \hat{x} = \hat{v}_j\, x^j \xrightarrow{\phi_{\hat{v}}} \vec{x} \in \mathbb{C}^n \qquad (2)$

In $\{\hat{v}'_{i'}\}$-Basis, $\quad \hat{x} = \hat{v}'_{i'}\, x'^{i'} \xrightarrow{\phi_{\hat{v}'}} \vec{x}'_{i'} \in \mathbb{C}^n \qquad (3)$

$$\hat{v}'_{i'}\, \underline{x'^{i'}} \overset{(3)}{=} \hat{x} \overset{(2)}{=} \hat{v}_j\, x^j \overset{(1)}{=} \hat{v}'_{i'}\, \underline{T^{i'}{}_j\, x^j} \qquad (4)$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^n \arrow[d, "T"] \\ V \arrow[ur, "\phi_{\hat{v}}"] \arrow[dr, "\phi_{\hat{v}'}"'] & \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

$T = \phi_{\hat{v}'} \circ \phi_{\hat{v}}^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$\vec{x} \longmapsto \vec{x}' = \phi_{\hat{v}'}(\phi_{\hat{v}}^{-1}(\vec{x}))$

Fazit: $\quad x'^{i'} \overset{(4)}{=} T^{i'}{}_j\, x^j \qquad (5)$

Matrixnotation: $\quad \boxed{\vec{x}' = T\,\vec{x}} \qquad (6)$

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^{i'} \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} T^1{}_1 & \cdots & T^1{}_j & \cdots & T^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ T^{i'}{}_1 & \cdots & T^{i'}{}_j & \cdots & T^{i'}{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ T^n{}_1 & \cdots & T^n{}_j & \cdots & T^n{}_n \end{pmatrix}}^{=\,T} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^j \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Neue Komponenten lassen sich durch Matrixmultiplikation von T mit den Alten berechnen!

Rückransformation mittels inverser Matrix: $\quad \underline{T^{-1} \cdot \vec{x}'} \overset{(6)}{=} \underbrace{T^{-1} \cdot T}_{=\,\mathbb{1}} \cdot \vec{x} = \underline{\vec{x}} \qquad (8)$

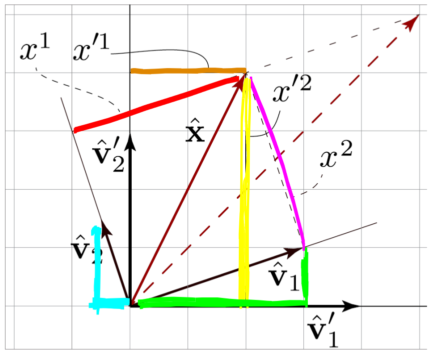
Beispiel:

$$\hat v_j = \hat v'_{i'} \, T^{i'}{}_j \qquad (1)$$

$$\hat v_1 = \hat v'_1 \, \overbrace{\tfrac{3}{4}}^{T^{1'}{}_1} + \hat v'_2 \, \overbrace{\tfrac{1}{3}}^{T^{2'}{}_1} \qquad (2)$$

$$\hat v_2 = \hat v'_1 \, \overbrace{\left(-\tfrac{1}{8}\right)}^{T^{1'}{}_2} + \hat v'_2 \, \overbrace{\tfrac{1}{2}}^{T^{2'}{}_2} \qquad (3)$$

$$T = \begin{bmatrix} T^{1'}{}_1 & T^{1'}{}_2 \\ T^{2'}{}_1 & T^{2'}{}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (4)$$



Der Vektor $\hat x$ hat zwei Darstellungen:

Einerseits, in $\{\hat v_j\}$-Basis: $\hat x = \hat v_1 \cdot 1 + \hat v_2 \cdot 2 \xmapsto{\phi_{\hat v}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \vec x$ (5)

Andrerseits, in $\{\hat v'_{i'}\}$-Basis: $\hat x = \hat v'_1 \, \frac{1}{2} + \hat v'_2 \, \frac{4}{3} \xmapsto{\phi_{\hat v'}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 4/3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{bmatrix} = \vec x'$ (6)

(5) & (6) sind konsistent mit Skizze und (L5.6a.7):

$$\begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{bmatrix} \overset{(5.6a.7)}{=} \overbrace{\begin{bmatrix} T^{1'}{}_1 & T^{1'}{}_2 \\ T^{2'}{}_1 & T^{2'}{}_2 \end{bmatrix}}^{T} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 3/4 & -1/8 \\ 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}}^{(4)} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}^{(5)} \overset{\checkmark}{=} \overbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 4/3 \end{bmatrix}}^{(6)} \qquad (7)$$

Transformation einer Matrix-Darstellung von einer Basis in eine andere

$\hat A : V \longrightarrow V$, sei eine lineare Abbildung, mit $\hat A : \hat x \mapsto \hat y$

In $\{\hat v_j\}$-Basis, $\hat x \overset{(5.6a.2)}{=} \hat v_j \, x^j \xmapsto{\phi_{\hat v}} \vec x$ (1)

$\hat y = \hat v_j \, y^j \xmapsto{\phi_{\hat v}} \vec y$ (2)

habe A die Darstellung $\vec y = A \cdot \vec x$ (3)
[siehe (5.5a.8,5.5c.6)]

In $\{\hat v'_{j'}\}$-Basis, $\hat x \overset{(5.6a.3)}{=} \hat v'_{i'} \, x'^{i'} \xmapsto{\phi_{\hat v'}} \vec x'$ (1')

$\hat y = \hat v'_{i'} \, y'^{i'} \xmapsto{\phi_{\hat v'}} \vec y'$ (2')

habe A die Darstellung $\vec y' = A' \cdot \vec x'$ (3')
[siehe (5.5a.8,5.5c.6)]

Die zwei Basen seien Verknüpft durch die Transformation $\hat T : \quad \hat v_j = \hat v'_{i'} \, T^{i'}{}_j$ (4)

Dann sind Koordinaten verknüpft durch:

$\vec x' \overset{(5.6a.6)}{=} T \cdot \vec x$ (5), $\qquad \vec y' \overset{(5.6a.6)}{=} T \cdot \vec y$ (5')

$T^{-1} \cdot \vec x' \overset{(5)}{=} \vec x$ (6), $\qquad T^{-1} \cdot \vec y' \overset{(5')}{=} \vec y$ (6')

Und A' mit A durch:

$$\vec y' \overset{(5')}{=} T \cdot \vec y \overset{(3)}{=} T \cdot A \cdot \vec x \overset{(6)}{=} \underbrace{T \; A \cdot T^{-1}}_{= A'} \cdot \vec x' \qquad (7)$$

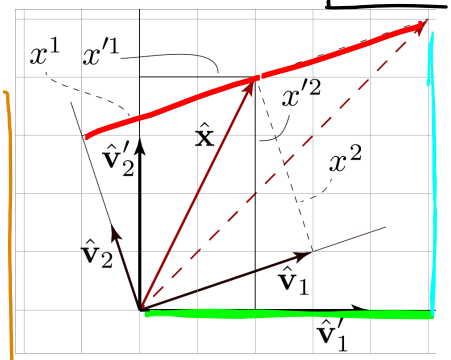
$$\boxed{A' = T \cdot A \cdot T^{-1}}$$

Interpretation: Wie wirkt lineare Abbildung auf Spaltenvektor in neuer Basis (wie lautet A')? Schicke ihn zunächst in alte Basis (mittels T^{-1}), bilde ihn dort ab (mittels A), und schicke ihn dann zurück (mittels T). (8)

L5.6d

Beispiel:

A : sei Streckung in $\hat{v}_1$ -Richtung um Faktor 2: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



Falls nicht offensichtlich, wird A wie folgt bestimmt:

(5.6a.1): $\hat{A}(\hat{v}_j) = \hat{v}_{j'} A^{j'}{}_j$ (1)

$$\hat{A}(\hat{v}_1) = \hat{v}_1 \cdot \overset{A^1{}_1}{2} + \hat{v}_2 \cdot \overset{A^2{}_1}{0} \quad (2)$$

$$\hat{A}(\hat{v}_2) = \hat{v}_1 \cdot \overset{A^1{}_2}{0} + \hat{v}_2 \cdot \overset{A^2{}_2}{1} \quad (3)$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Finde nun Darstellung v. A in der $\{\hat{v}_{i'}\}$ -Basis:

$$A' \overset{(5i.8)}{=} T \cdot A \cdot T^{-1} = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}^{(6b.4)} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{(4)} \cdot \overbrace{\frac{12}{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}}^{(L5.4g.2)} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 19 & \frac{9}{4} \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Wie wirkt A auf den Vektor $\hat{x} \overset{\phi_{\hat{v}'}}{\longmapsto} \vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$,

$$A' \cdot \vec{x}' = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 19 & \frac{9}{4} \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \quad (6)$$

L5.6e

Spur einer quadratischen Matrix $\quad A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$

Spur = Summe der Diagonalelemente:

$$Sp(A) = \sum_i A^i{}_i \quad (1)$$

Beispiel:

$$Sp \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3 + 1 + 2 = 6 \quad (2)$$

Spur eines Matrixprodukts ist zyklisch invariant:

$$\boxed{Sp(A \cdot B)} \overset{(1)}{=} \sum_i (A \cdot B)^i{}_i = \sum_{ij} A^i{}_j B^j{}_i = \sum_{ij} B^j{}_i A^i{}_j = \boxed{Sp(B \cdot A)} \quad (3)$$

Analog:

$$Sp(A \cdot B \cdot C) \overset{(3)}{=} Sp(C \cdot A \cdot B) = Sp(B \cdot C \cdot A) \quad (4)$$

Spur ist invariant unter Basistransformationen:

$$A' = T \cdot A \cdot T^{-1} \quad (5)$$

$$\boxed{Sp(A')} \overset{(5)}{=} Sp(T \cdot A \cdot T^{-1}) \overset{(4)}{=} Sp(\underbrace{T^{-1} \cdot T}_{= \mathbb{1}} \cdot A) = \boxed{Sp(A)} \quad (6)$$

Zusammenfassung: L5.5-6 Basistransformationen

ZL5c

Zwei Vektorräume: $V = \mathrm{span}\{\hat{v}_j\}$,	$W = \mathrm{span}\{\hat{w}_i\}$	(1)
Allgemeine lineare Abbildung: $\hat{A} : V \to W$	$\hat{x} = \hat{v}_j x^j \longmapsto \hat{y} = \hat{w}_i y^i$	(2)
Matrixdarstellung v. A: $\hat{A}(\hat{v}_j) = \hat{w}_i A^i{}_j$	$\vec{y} = A \cdot \vec{x}$, $A = \{A^i{}_j\}$	(3)
In Standardbasis: A bildet Basisvektor $\vec{e}_j$ ab auf:	$\vec{A}_j$ = Spalte j von A	(4)
Zwei Basen für denselben Raum: $V = \mathrm{span}\{\hat{v}_j\} = \mathrm{span}\{\hat{v}'_{i'}\}$		(5)
Basistransformation: $T : V \longrightarrow V$	$\hat{v}_j = \hat{v}'_{i'} T^{i'}{}_j$	(6)
Matrixdarstellung v. T: $T = \{T^{i'}{}_j\}$	$x'^{i'} = T^{i'}{}_j x^j$, $\vec{x}' = T \cdot \vec{x}$	(7)
Darstellung v. altem Basisvektor $\hat{v}_j$ in neuer Basis:	$\vec{T}_j$ = Spalte j von T	(8)
Inverse Transformation: $T^{-1} = \{(T^{-1})^j{}_{i'}\}$	$\hat{v}'_{i'} = \hat{v}_j (T^{-1})^j{}_{i'}$, $x^j = (T^{-1})^j{}_{i'} x'^{i'}$	(9)
Darstellung v. neuem Basisvektor $\hat{v}'_{i'}$ in alter Basis:	$(\overrightarrow{T^{-1}})_{i'}$ = Spalte i von T^{-1}	(10)
Bezug zwischen $\vec{y} = A \cdot \vec{x}$ (11) und $\vec{y}' = A' \cdot \vec{x}'$ (12):	$A' = T \cdot A \cdot T^{-1}$	(13)