L5 Matrizen I: Lineare Abbildungen

Matrix:
(Plural: Matrizen)

$$A = \begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & \cdots & A^1{}_n \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & \cdots & A^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^m{}_1 & A^m{}_2 & \cdots & A^m{}_n \end{pmatrix} = \{A^i{}_j\} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array} \qquad (1)$$

Vielfältige Anwendungen in der Physik:
- Lösung von linearen Gleichungsystemen
- Beschreibung von Drehungen
- Beschreibung von Lorenz-Transformationen (spezielle Relativitätstheorie)
- Lösung von linearen Differenzialgleichungen (nach Fouriertransformation)
- Bestimmung der Normalmoden von gekoppelten harmonischen Oszillatoren
- Bestimmung der Eigenzuständen und Eigenenergien eines Quantensystems
- Dirac-Gleichung (relativistische Version der Schrödingergleichung)
- ... ...

Für gründliche Einführung: siehe lineare Algebra Vorlesung

L5.1 Lineare Abbildungen

Wir betrachten zwei- $\mathbb{C}$ (oft reicht auch $\mathbb{R}$) Vektorräume, V und W
mit Dimensionen n bzw. m

und eine Abbildung

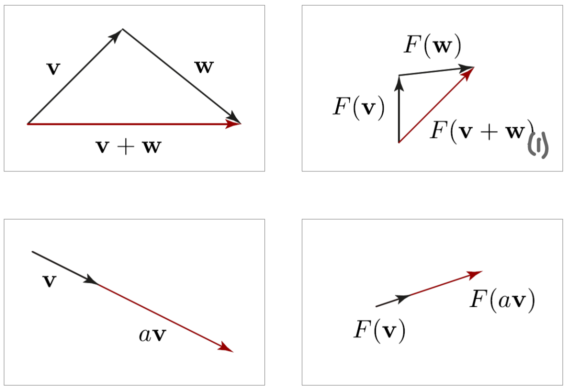
$$F: V \to W, \quad \vec{v} \mapsto F(\vec{v}) \equiv F\vec{v} \qquad (1)$$

Kompaktnotation verzichtet auf ( )-Klammern

Abbildung ist 'linear', falls $\forall\ a, b \in \mathbb{C},\ \vec{v}, \vec{w} \in V$ gilt:

$$F(a\vec{v} + b\vec{w}) = aF(\vec{v}) + bF(\vec{w}) \qquad (2)$$

Beispiel: F = Rotation um 45° und Streckung um Faktor ½



Lin. Abb. ist ein Homomorphismus: sie 'respektiert' die Vektorraumstruktur v. V und W:
erst addieren/strecken, dann abbilden = erst abbilden, dann addieren/strecken

Alltagsbeispiele: Foto einer Person ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Foto einer Buchseite ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Im Folgenden betrachten wir zunächst die Standardvektorräume $V = \mathbb{C}^n$, $W = \mathbb{C}^m$

n = 1, m = 1: $A : \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$,

Kompaktnotation (nur für lineare Abbildungen): verzichte auf ( )-Klammern

$$x \mapsto y = A(x) \equiv A x = a x \quad , \qquad a \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

Beispiel: wie in (b.2) gefordert ✓

$$x \mapsto 3x, \quad \text{dann:} \quad A(5x + 6\tilde{x}) = 3(5x + 6\tilde{x}) = 5(3x) + 6(3\tilde{x}) = 5A(x) + 6A(\tilde{x}) \qquad (2)$$

Essentielle Eigenschaft v. A: <u>linear</u> in x: $A x = a x$

d.h. keine Konstante: $A x \neq a x + b$

und keine Potenzen: $A x \neq a (x)^3$

$\Big\}$ dann wäre (b.2) nicht erfüllt (3)

wie in (b.2) gefordert

Konstante würde Linearität zerstören. Beispiel:

$$x \mapsto 3x + 1 \quad \text{dann:} \quad A(5x + 6\tilde{x}) = 3(5x + 6\tilde{x}) + 1 = 5(3x+1) + 6(3\tilde{x}+1) - 10 = 5A(x) + 6A(\tilde{x}) - 10$$

---

n = 2, m = 1: $A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^1$, $\quad A_j \in \mathbb{C}$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \longmapsto y = A\vec{x} = A_1 x^1 + A_2 x^2 \qquad j = 1, 2 \qquad (3)$$

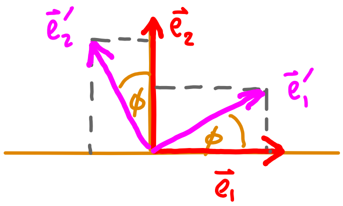
---

n = 2, m = 2: $A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$,

oben-Index links, unten-Index rechts

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \longmapsto \vec{y} = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} A^1{}_1 x^1 + A^1{}_2 x^2 \\ A^2{}_1 x^1 + A^2{}_2 x^2 \end{bmatrix}, \qquad A^i{}_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, 2 \qquad (4)$$

Beispiel: Rotation in 2 Dimensionen



$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \cos\phi \; x^1 - \sin\phi \; x^2 \\ \sin\phi \; x^1 + \cos\phi \; x^2 \end{bmatrix} ; \qquad (1)$$

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix} = \vec{e}_1', \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix} = \vec{e}_2' \qquad (2)$$

Allgemein: n, m beliebig:

$$A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m, \quad \vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x}, \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^i \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1{}_1 x^1 + \dots + A^1{}_j x^j + \dots + A^1{}_n x^n \\ \vdots \\ A^i{}_1 x^1 + \dots + A^i{}_j x^j + \dots + A^i{}_n x^n \\ \vdots \\ A^m{}_1 x^1 + \dots + A^m{}_j x^j + \dots + A^m{}_n x^n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Einstein-Notation:

$$y^i = A^i{}_j x^j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \qquad (4)$$

L5.2 Matrizen

L5.2a

'm x n Matrix' $A = \{A^i{}_j\}$ ist rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten,

'Matrixelement': $A^i{}_j \in \mathbb{C}$

$$A = \begin{bmatrix} A^1{}_1 & \cdots & A^1{}_j & \cdots & A^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i{}_1 & \cdots & A^i{}_j & \cdots & A^i{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^m{}_1 & \cdots & A^m{}_j & \cdots & A^m{}_n \end{bmatrix} = \{A^i{}_j\} \qquad (1)$$

Reihenindex links (oben): $i = 1, \ldots, m$

Spaltenindex rechts (unten): $j = 1, \ldots, n$ (2)

Spalte j: $\vec{A}_j \equiv \begin{pmatrix} A^1{}_j \\ \vdots \\ A^i{}_j \\ \vdots \\ A^m{}_j \end{pmatrix}$ ist ein 'Spaltenvektor', mit Komponenten $(\vec{A}_j)^i = A^i{}_j$ (3)

(mx1 Matrix)

Reihe i: $\vec{A}^i \equiv (A^i{}_1, \ldots, A^i{}_j, \ldots, A^i{}_n)$ ist ein 'Reihenvektor', mit Komponenten $(\vec{A}^i)_j = A^i{}_j$

(1xn Matrix) (4)

'Quadratische Matrix' falls $m = n$

Notationskonventionen: A, $\{A^i{}_j\}$, $\{A_{ij}\}$, $\{A^{ij}\}$, $(A^i{}_j)$, $[A^i{}_j]$

oft auch mit beiden Indizes unten, oder oben:

Multiplikation: Matrix mal Spaltenvektor

L5.2b

Spaltenvektor mit n Komponenten ist nx1 Matrix.

$\vec{y} = A\vec{x}$ bedeutet: $y^i \overset{(\text{1d.4})}{=} A^i{}_j x^j \overset{(\text{2a.3})}{=} (\vec{A}^i)_j x^j = (\vec{A}^i) \cdot \vec{x}$ (1)

Kompaktnotation: Skalarprodukt von Reihenvektor $\vec{A}^i$ und Spaltenvektor $\vec{x}$ (2)

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^i \\ \vdots \\ y^m \end{bmatrix} \overset{(\text{1d.3})}{=} \begin{bmatrix} A^1{}_1 x^1 + \ldots + A^1{}_j x^j + \ldots + A^1{}_n x^n \\ \vdots \\ A^i{}_1 x^1 + \ldots + A^i{}_j x^j + \ldots + A^i{}_n x^n \\ \vdots \\ A^m{}_1 x^1 + \ldots + A^m{}_j x^j + \ldots + A^m{}_n x^n \end{bmatrix} \underset{\text{per Definition}}{\equiv} \underbrace{\begin{bmatrix} A^1{}_1 & \cdots & A^1{}_j & \cdots & A^1{}_n \\ \vdots & & & & \\ A^i{}_1 & \cdots & A^i{}_j & \cdots & A^i{}_n \\ \vdots & & & & \\ A^m{}_1 & \cdots & A^m{}_j & \cdots & A^m{}_n \end{bmatrix}}_{\text{Matrix}} \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^j \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Beispiele:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 3/2 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 5\cdot 2 \\ 3\cdot 3 + 3\cdot 2 \\ 6\cdot 3 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Einschub: Matrizen bilden einen Vektorraum

L5.2c

$$\mathrm{mat}(\mathbb{C},m,n) \equiv \left\{A = \{A^i{}_j\} : \ i = 1,\dots,m;\ \ j = 1,\dots,n,\ \ A^i{}_j \in \mathbb{C}\right\} \tag{1}$$

Menge aller mxn Matrizen ist ein Vektorraum, mit Dimension $m \cdot n$, isomorph zu $\mathbb{C}^{m\cdot n}$

(i) Matrixaddition: $(A, B) \longmapsto A + B, \quad (A+B)^i{}_j \equiv A^i{}_j + B^i{}_j$ 'elementenweise Addition' (2)

Beispiel:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Neutrales Element: 'Nullmatrix : $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ alle Matrixelemente = 0 (4)

Additives Inverse: $A + (-A) = 0 \quad \Rightarrow \quad -A = \{-A^i{}_j\}$ (5)

Matrixaddition ist assoziativ: $(A + B) + C \overset{(2)}{=} A + (B + C)$ (6)

und kommutativ: $A + B \overset{(2)}{=} B + A$ (7)

(ii) Skalarmultiplikation: $(\underbrace{\lambda}_{\in\mathbb{C}}, A) \longmapsto \lambda A, \quad (\lambda A)^i{}_j \equiv \lambda A^i{}_j$ 'elementenweise Multiplikation' (8)

Beispiel:
$$3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Wirkung einer linearen Abbildung auf Standardbasis

L5.2d

Standardbasis in $\mathbb{C}^n$: $\{\vec{e}_j\}$ $j = 1, \dots, n$ $\qquad \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ Position j von insgesamt n (1)

Standardbasis in $\mathbb{C}^m$: $\{\vec{f}_i\}$ $i = 1, \dots, m$ (2)

$\vec{f}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ Position i von insgesamt m

Was ist das Bild eines Standardbasisvektors für Abbildung A?

Position j:
$$\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^1{}_j & \dots & A^1{}_n \\ \vdots & & & & \\ A^i{}_1 & \dots & A^i{}_j & \dots & A^i{}_n \\ A^m{}_1 & \dots & A^m{}_j & \dots & A^m{}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A^1{}_j \\ \vdots \\ A^i{}_j \\ \vdots \\ A^m{}_j \end{pmatrix}}_{\vec{A}_j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} A^1{}_j + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} A^i{}_j + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} A^m{}_j \tag{3}$$

$$= \vec{f}_1 A^1{}_j + \dots + \vec{f}_i A^i{}_j + \dots + \vec{f}_m A^m{}_j$$

$$\boxed{\vec{e}_j \longmapsto A\,\vec{e}_j = \vec{f}_i\, A^i{}_j} \tag{4}$$

$\vec{A}_j$ = Spalte j der Matrix A

Fazit: für lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, dargestellt durch $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, m, n)$

liefert $\vec{A}_j$ ($\equiv$ Spalte j der Matrix A) das Bild des Basisvektors $\vec{e}_j$ (5)

Transponierte Matrix (das werden wir später brauchen)

L5.2e

Sei $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, m, n)$ eine $m \times n$ Matrix, mit Matrixelementen $A^i{}_j$

Definition: Die 'transponierte Matrix', A^T [sprich: A-transponiert] ist eine $n \times m$ Matrix, erhalten durch Vertauschen der Reihen und Spalten von A: (1)

Beispiele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C^T = (4, 5)$ (2)

Formal: A^T hat Matrixelemente $(A^T)_j{}^i = A^i{}_j$ (3)

auf beiden Seiten der Gleichung gilt:
linker Index = Reihenindex
rechter Index = Spaltenindex
kovariante Stellung (oben/unten) unverändert

Rezept: um Reihen/Spalten zu vertauschen, 'verschiebe Indizes horizontal': $A^i{}_j \xrightarrow[A_j{}^i]{T} A^T{}_j{}^i$ (4)

Gilt auch umgekehrt: für $n \times m$ Matrix B, mit Elementen $B_j{}^i$

ist die Transponierte, B^T, eine $m \times n$ Matrix, mit Matrixelementen $(B^T)^i{}_j = B_j{}^i$ (5)

Rezept: Horizontale Rückverschiebung der Indizes: $B_j{}^i \xrightarrow{T} B^i{}_j \equiv B^{T\,i}{}_j$ (6)

Zweimal transponieren liefert ursprüngliche Matrix: $(A^T)^T = A$. (7)

In alle-Indizes-unten-Notation: $(B^T)_{ji} = B_{ij}$ (8)

Adjungierte Matrix (das werden wir später brauchen)

L5.2f

(andere Namen: adjungiert = hermitesch transponiert = transponiert-konjugiert)

Sei $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, m, n)$ eine $m \times n$ Matrix, mit Matrixelementen $A^i{}_j$ (1)

Definition: Die 'adjungierte Matrix', $A^\dagger$ [sprich: A-adjungiert] ist eine $n \times m$ Matrix, erhalten durch Transposition und komplexer Konjugation:

'Kreuz'

Beispiele: $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 3+i \\ 2i & 4 & -i+5 \end{pmatrix}$, $A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ -i & 4 \\ 3-i & i+5 \end{bmatrix}$ (2)

Formal: $(A^\dagger)_j{}^i = \overline{A^i{}_j}$ (3)

Rezept: 'verschiebe Indizes horizontal' und konjugiere: $A^i{}_j \xrightarrow[\overline{A_j{}^i}]{\dagger} A^\dagger{}_j{}^i$ (4)

Gilt auch umgekehrt: für $n \times m$ Matrix B, mit Elementen $B_j{}^i$

ist die Adjungierte, B^T, eine $m \times n$ Matrix, mit Matrixelementen $(B^\dagger)^i{}_j = \overline{B_j{}^i}$ (5)

Rezept: Horizontale Rückversch. der Indizes und Konj.: $B_j{}^i \xrightarrow{\dagger} \overline{B^i{}_j} \equiv B^{\dagger\,i}{}_j$ (6)

Zweimal adjungieren liefert ursprüngliche Matrix: $(A^\dagger)^\dagger = A$. (7)

In alle-Indizes-unten-Notation: $(B^\dagger)_{ji} = \overline{B_{ij}}$ (8)

L5.3 Matrixmultiplikation: Verknüpfung v. zwei linearen Abbildungen

L5.3a

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{\;A\;} \mathbb{C}^m \xrightarrow{\;B\;} \mathbb{C}^l \qquad (1)$$

$$\vec{x} \;=\; \overset{A}{\longmapsto} \; \vec{y} = A\cdot\vec{x} \; \overset{B}{\longmapsto} \; \vec{z} = B\cdot\vec{y} = B\cdot(A\cdot\vec{x}) \equiv C\cdot\vec{x} \qquad (2)$$

Komponenten: $\underline{y^i} = \underline{A^i{}_j\, x^j} \qquad \underline{z^k} = \underline{B^k{}_i\, y^i} = \underline{B^k{}_i A^i{}_j\, x^j} = \underline{C^k{}_j\, x^j} \qquad (3)$

Spaltendarstellung:

$j = 1,\dots,n \qquad i = 1,\dots,m \qquad k = 1,\dots,l$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^j \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \overset{A}{\longmapsto} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ \underline{y^i} \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1{}_j\, x^j \\ \vdots \\ \underline{A^i{}_j\, x^j} \\ \vdots \\ A^m{}_j\, x^j \end{pmatrix} \overset{B}{\longmapsto} \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ \underline{z^k} \\ \vdots \\ z^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1{}_i\, y^i \\ \vdots \\ \underline{B^k{}_i\, y^i} \\ \vdots \\ B^l{}_i\, y^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1{}_i A^i{}_j\, x^j \\ \vdots \\ \underline{B^k{}_i A^i{}_j\, x^j} \\ \vdots \\ B^l{}_i A^i{}_j\, x^j \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} C^1{}_j\, x^j \\ \vdots \\ \underline{C^k{}_j\, x^j} \\ \vdots \\ C^l{}_j\, x^j \end{pmatrix} \qquad (4)$$

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{\quad C \,\equiv\, B\circ A \quad} \mathbb{C}^l \qquad \text{mit} \qquad \boxed{\begin{aligned} C &\overset{(2)}{=} B\cdot A \\ C^k{}_j &\overset{(3)}{=} B^k{}_i A^i{}_j \end{aligned}}$$

$$\vec{x} \xmapsto{\quad C \,\equiv\, B\circ A \quad} \vec{z} = C\cdot\vec{x} \qquad (5)$$

Matrixmultiplikation (zusätzliche Struktur zu der des Vektorraums)

L5.3b

$$\cdot \,:\, \mathrm{mat}(\mathbb{C}, l, \underline{m}) \times \mathrm{mat}(\mathbb{C}, \underline{m}, n) \longrightarrow \mathrm{mat}(\mathbb{C}, l, n) \qquad (1)$$
$$(B, A) \longmapsto B\cdot A = C$$

Summe über 'innere' Indizes

$$\text{mit} \qquad C^k{}_j \overset{(3a.5)}{=} B^k{}_i A^i{}_j \overset{(2a.3,4)}{=} (\vec{B}^k)_i\, (\vec{A}_j)^i = \vec{B}^k \cdot \vec{A}_j \qquad (2)$$

= Skalarprodukt von 'Zeile k von B' und 'Spalte j von A'

Nur definiert falls $\underbrace{\text{(\# Spalten v. B)}}_{m}$ = $\underbrace{\text{(\# Zeilen v. A)}}_{m}$.

Explizit:

l Zeilen, n Spalten — l Zeilen, m Spalten — m Zeilen, n Spalten

$$\begin{bmatrix} C^1{}_1 & \cdots & C^1{}_j & \cdots & C^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C^k{}_1 & \cdots & \boxed{C^k{}_j} & \cdots & C^k{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C^l{}_1 & \cdots & C^l{}_j & \cdots & C^l{}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^1{}_1 & \cdots & B^1{}_i & \cdots & B^1{}_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B^k{}_1 & \cdots & B^k{}_i & \cdots & B^k{}_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B^l{}_1 & \cdots & B^l{}_i & \cdots & B^l{}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^1{}_1 & \cdots & A^1{}_j & \cdots & A^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i{}_1 & \cdots & A^i{}_j & \cdots & A^i{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^m{}_1 & \cdots & A^m{}_j & \cdots & A^m{}_n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Zeilenvektor k von B — Spaltenvektor j von A

Beispiel: (l = 3, m = 2, n = 2) L5.3c

$$B \cdot A := \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} B \backslash A & \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot 1\\ 4\cdot 0 + 5\cdot 2 & 4\cdot 1 + 5\cdot 1\\ 1\cdot 0 + 0\cdot 2 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1\end{pmatrix}\end{array} = \begin{pmatrix}4 & 3\\ 10 & 9\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Matrixmultiplikation (1)

1) nicht kommutativ: $\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$ (sogar gar nicht definiert, falls Dimensionen nicht passen!) (2)

Beispiel: (l = 2, m = 2, n = 2)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}3 & 6\\ 2 & 2\end{bmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix} & \begin{matrix}1\cdot 3 + 2\cdot 2 & 1\cdot 6 + 2\cdot 2\\ 4\cdot 3 + 5\cdot 2 & 4\cdot 6 + 5\cdot 2\end{matrix}\end{array} = \begin{bmatrix}7 & 10\\ 22 & 34\end{bmatrix} \qquad (3)$$

verschieden ! verschieden !

$$B \cdot A = \begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 2\end{pmatrix} & \begin{matrix}3\cdot 1 + 6\cdot 4 & 3\cdot 2 + 6\cdot 5\\ 2\cdot 1 + 2\cdot 4 & 2\cdot 2 + 2\cdot 5\end{matrix}\end{array} = \begin{bmatrix}27 & 36\\ 10 & 14\end{bmatrix} \qquad (4)$$

---

2) assoziativ (falls definiert) L5.3d

$$D \equiv \boxed{(C \cdot B) \cdot A = C \cdot (B \cdot A)} \equiv \tilde{D} \qquad (1)$$

Beweis:

$$D^l{}_j = \sum_i (C \cdot B)^l{}_i A^i{}_j = \sum_i \Big(\sum_k C^l{}_k B^k{}_i\Big) A^i{}_j = \sum_i \sum_k \big(\underline{C^l{}_k B^k{}_i A^i{}_j}\big) \qquad (2)$$

gleich !

$$\tilde{D}^l{}_j = \sum_k C^l{}_k (B \cdot A)^k{}_j = \sum_k C^l{}_k \Big(\sum_i B^k{}_i A^i{}_j\Big) = \sum_k \sum_i \big(\underline{C^l{}_k B^k{}_i A^i{}_j}\big) \qquad (3)$$

Reihenfolge, in der die Terme addiert werden, ist egal, $\sum_i \sum_k = \sum_k \sum_i$, denn (4)
Addition von Zahlen (hier Produkte von Matrixelementen) ist assoziativ!

Beispiel: (k=2, l = 2, m = 2, n = 1)

$$\Big[\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}}\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}}\Big]\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}(1\cdot 2 + 0\cdot 1) & (1\cdot 3 + 0\cdot 0)\\ (1\cdot 2 + 2\cdot 1) & (1\cdot 3 + 2\cdot 0)\end{pmatrix}}\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}\underline{1\cdot 2\cdot 0} + \underline{0\cdot 1\cdot 0} + \underline{1\cdot 3\cdot 1} + \underline{0\cdot 0\cdot 1}\\ 1\cdot 2\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 1\end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}} \qquad (5)$$

Dieselben Terme werden in unterschiedlicher Reihenfolge addiert.

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}}\Big[\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}}\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}}\Big] = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}}\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}2\cdot 0 + 3\cdot 1\\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1\end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}\underline{1\cdot 2\cdot 0} + \underline{1\cdot 3\cdot 1} + \underline{0\cdot 1\cdot 0} + \underline{0\cdot 0\cdot 1}\\ 1\cdot 2\cdot 0 + 1\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 1\end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}} \qquad (6)$$

3. distributiv

$\mu, \lambda \in \mathbb{C}$

$$\boxed{A \cdot (\lambda B + \mu C) = \lambda A \cdot B + \mu A \cdot C} \quad (1)$$

LS.3e

Beweis: $$A^i{}_k (\lambda B^k{}_j + \mu C^k{}_j) = \lambda A^i{}_k B^k{}_j + \mu A^i{}_k C^k{}_j \quad \square \quad (2)$$

ebenso: $$\boxed{(\lambda A + \mu B) \cdot C = \lambda A \cdot C + \mu B \cdot C} \quad (3)$$

4. $$(\lambda A) \cdot (\mu B) = \lambda \mu (A \cdot B) \quad (4)$$

Beweis: $$(\lambda A^i{}_k)(\mu B^k{}_j) = \lambda \mu (A^i{}_k B^k{}_j) \quad (5)$$

5. Falls $A, B \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n) \implies A \cdot B \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ (6)

Quadratische Matrizen sind 'abgeschlossen' unter Matrixmultiplikation.

Quadratische Matrizen bilden eine 'Algebra'.

LS.3f

Eine Algebra ist ein Vektorraum mit einer Produkt-Operation, $V \times V \to V, \quad (u, v) \mapsto u \cdot v$,

welche die folgenden Distributivität-Axiome erfüllt $(u, v, w \in V, \; c \in \mathbb{C})$:

$$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w \quad (1a)$$

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w \quad (1b)$$

$$c(v \cdot w) = (cv) \cdot w = v \cdot (cw) \quad (1c)$$

6. Neutrales Element der Matrixmultiplikation

'Einheitsmatrix' (engl: identity)
(für m = n)

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \{ \delta^i{}_j \} \quad (2)$$

(Einser auf der Diagonalen, ansonsten Nullen)

$$\mathbb{1} \cdot A = A = A \cdot \mathbb{1} \quad (3a)$$

denn: $$\delta^i{}_k A^k{}_j = A^i{}_j = A^i{}_k \delta^k{}_j \quad (3b)$$

Explizit:
(n=3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1{}_1 & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2 & A^2{}_3 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Adjungiertes Produkt

Sei $A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, l, m)$, $B \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, m, n)$, sodass $A \cdot B = \mathrm{mat}(\mathbb{C}, l, n)$

Es gilt: $\boxed{(A \cdot B)^\dagger = B^\dagger \cdot A^\dagger}$

Adjungiertes Produkt =
Produkt der Adjungierten,
in <u>umgekehrter</u> Reihenfolge (1)

Dimensionen: $n \times l = (l \times n)^\dagger = ((l \times k)\cdot(k \times n))^\dagger = (k \times n)^\dagger \cdot (l \times k)^\dagger = (n \times k)\cdot(k \times l) = n \times l$ (2)

Beweis: $(A \cdot B)^{\dagger}{}_j{}^i \overset{(2f.3)}{=} \overline{(A \cdot B)^i{}_j} \overset{(3b.2)}{=} \overline{A^i{}_k B^k{}_j} = \overline{A^i{}_k}\,\overline{B^k{}_j}$ (3)

gleich!

$(B^\dagger \cdot A^\dagger)_j{}^i \overset{(3b.2)}{=} B^\dagger{}_j{}^k A^\dagger{}_k{}^i \overset{(2f.3)}{=} \overline{B^k{}_j}\,\overline{A^i{}_k} = \overline{A^i{}_k}\,\overline{B^k{}_j}$ (4)

Multiplikation von Zahlen (hier von Matrix<u>elementen</u>) ist kommutativ!

Beispiel: (l=m=2, n=1)

(3): $\left(\begin{pmatrix}1 & i \\ 2 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 3\end{pmatrix}\right)^\dagger = \begin{pmatrix}1\cdot i + i\cdot 3 \\ 2\cdot i + i\cdot 3\end{pmatrix}^\dagger = \left(\overline{1\cdot i + i\cdot 3}\,,\ \overline{2\cdot i + i\cdot 3}\right) = (1\cdot\bar{i} + \bar{i}\cdot 3\,,\ 2\cdot\bar{i} + \bar{i}\cdot 3) = (-4i, -5i)$ (5)

gleich!

(4): $\begin{pmatrix} i \\ 3\end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix}1 & i \\ 2 & i\end{pmatrix}^\dagger = (\bar{i}, 3)\begin{pmatrix}1 & 2 \\ \bar{i} & \bar{i}\end{pmatrix} = (\bar{i}\cdot 1 + 3\cdot\bar{i}\,,\ \bar{i}\cdot 2 + 3\cdot\bar{i}) = (1\cdot\bar{i} + \bar{i}\cdot 3\,,\ 2\cdot\bar{i} + \bar{i}\cdot 3) = (-4i, -5i)$ (6)

Analog für Transposition: $\boxed{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T}$ (6)

Zusammenfassung: L5.1-5.3 Lineare Abbildungen und Matrizen

Die Abbildung $F: V \longrightarrow W$ ist 'linear', falls $F(a\vec{v} + b\vec{w}) = aF(\vec{v}) + bF(\vec{w})$ (1)

Für $V = \mathbb{C}^n$, $W = \mathbb{C}^m$ hat eine lineare Abbildung die Form:

$A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $\quad \vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x} = A\cdot\vec{x}$, $\quad$ mit $y^i = a_j x^j = \vec{A}^i \cdot \vec{x}$ (2)

m x n Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^1{}_j & \dots & A^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i{}_1 & \dots & A^i{}_j & \dots & A^i{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^m{}_1 & \dots & A^m{}_j & \dots & A^m{}_n \end{bmatrix} = \{A^i{}_j\}$$

$i = 1, \dots,$
$j = 1, \dots,$

(3)

Spalte j: $\vec{A}_j = \begin{pmatrix} A^1{}_j \\ \vdots \\ A^i{}_j \\ \vdots \\ A^m{}_j \end{pmatrix}$ (4)

Reihe i: $\vec{A}^i = (A^i{}_1, \dots, A^i{}_j, \dots A^i{}_n)$ (5)

Abbildung der Standardbasis: $\vec{e}_j \overset{A}{\longmapsto} A\vec{e}_j = \vec{A}_j$ = Spalte j (6)

Komplexe (mxn)-Matrizen bilden $m \cdot n$ dim. Vektorraum, $\simeq \mathbb{C}^{m \cdot n}$

$$\mathrm{mat}(\mathbb{C}, m, n) \equiv \{ A = \{A^i{}_j\} : \; i = 1, \dots, m ; \; j = 1, \dots, n, \; A^i{}_j \in \mathbb{C} \} \tag{1}$$

mit Matrixaddition,
(elementenweise)

$$(A, B) \longmapsto A + B, \qquad (A+B)^i{}_j \equiv A^i{}_j + B^i{}_j \tag{2}$$

und Skalarmultiplikation,
(elementenweise)

$$(\lambda, A) \longmapsto \lambda A, \qquad (\lambda A)^i{}_j \equiv \lambda A^i{}_j \tag{3}$$

Verknüpfung von zwei linearen Abbildungen $\Longrightarrow$ Matrixmultiplikation

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^m \xrightarrow{B} \mathbb{C}^\ell \tag{4}$$

$$\vec{x} = \xmapsto{A} \vec{y} = A \cdot \vec{x} \xmapsto{B} \vec{z} = B \cdot \vec{y} = B \cdot (A \cdot \vec{x}) \equiv C \cdot \vec{x} \tag{5}$$

(5e.3,4)

$$C^k{}_j = B^k{}_i A^i{}_j = (\vec{B}^k)_i (\vec{A}_j)^i = \vec{B}^k \cdot \vec{A}_j \qquad \left\{ \begin{array}{l} k = 1, \dots, \ell \\ i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array} \right. \tag{6}$$

(Zeile k von B) $\cdot$ (Spalte j von A)

Matrixmultiplikation ist assoziativ & distributiv, aber <u>nicht</u> kommutativ !