C3 Partielle Ableitungen

C3a

Betrachte $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = f(x^1, x^2, \dots, x^d)$ (Skalarfeld) (1)

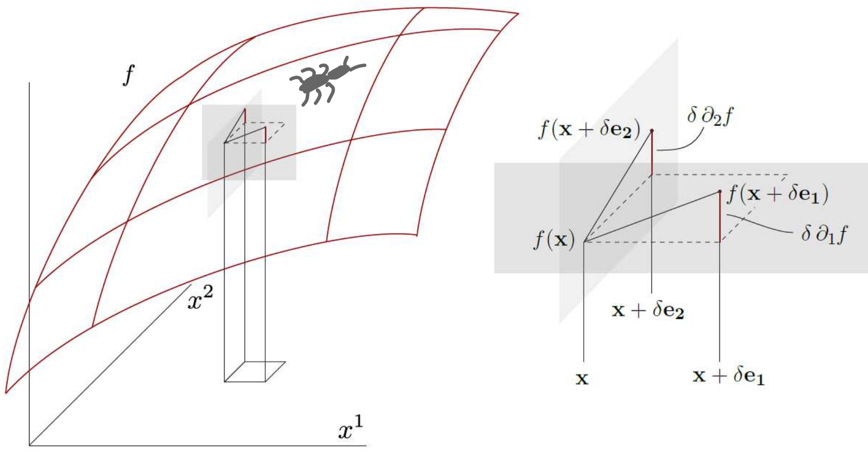
Beispiel für d=2: Höhe eines kugelförmigen Zeltdachs: $x^2 + y^2 + h^2 = R^2$

$$\vec{x} = (x, y)^T = (x^1, x^2)^T, \qquad f(\vec{x}) = \left[R^2 - x^2 - y^2\right]^{1/2} = \left[R^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2\right]^{1/2} \quad (2)$$

C3.1 Partielle Ableitung

Wie ändert sich $f(\vec{x})$ als Funktion v. nur einer der Variablen, x^i, wenn die anderen Variablen festgehalten werden?

'Ameise auf Zeltdach:
wie ändert sich ihre Höhe,
wenn sie parallel zur
i -Achse krabbelt?'



C3b

Wie ändert sich $f(\vec{x})$ als Funktion v. nur einer der Variablen, x^i ?

<u>Definition: 'Partielle Ableitung</u> von f am Punkt $\vec{x}$, nach x^i ':

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\left[f(x^1, \dots, x^i + \delta, \dots, x^d) - f(x^1, \dots, x^i, \dots, x^d)\right] \quad (1)$$

nur x^i ändert sich, um δ

In Vektornotation:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^d \end{pmatrix} = \vec{e}_i x^i$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, etc.

$$\boxed{\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\left[f(\vec{x} + \delta \vec{e}_i) - f(\vec{x})\right] \equiv \partial_i f(\vec{x})} \quad (2)$$

Lineare Näherung: $f(\vec{x} + \delta \vec{e}_i) = f(\vec{x}) + \delta\, \partial_i f(\vec{x})$ (2')

Alternative Notationen: $\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i f(\vec{x}) \equiv f_i(\vec{x})$ (3)

Lieblingsnotation; eher unüblich

Merkregel: Index oben 'im Nenner der Ableitung' = Index unten in Kurznotation für Ableitung

<u>Beispiele:</u>

$$\partial_y \big(\underbrace{x \cos(y)}_{f(\vec{x})}\big) = -x \sin y \quad (4)$$

$$\partial_{x^1}\left(e^{3x^1} \sin(x^2)\right) = 3\, e^{3x^1} \sin(x^2) \quad (5)$$

[Index, nicht Potenz!]

$$\partial_2 \left(e^{3x^1} \sin(x^2)\right) = e^{3x^1} \cos(x^2) \quad (6)$$

C3.2 Mehrfache partielle Ableitungen (rekursive Definition)

C3c

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec x)\right] \equiv \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} f(\vec x) \equiv \partial^2_{x^i} f(\vec x) \equiv \partial_i^2 f(\vec x) \qquad (1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec x)\right)\dots\right)}_{n\ \text{mal}} \equiv \frac{\partial^n}{\partial (x^i)^n} f(\vec x) \equiv \partial^n_{x^i} f(\vec x) \equiv \partial^n_i f(\vec x) \qquad (2)$$

Gemischte partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec x)\right) \equiv \partial_{x^j}\partial_{x^i} f(\vec x) \equiv \partial_j \partial_i f(\vec x) \equiv \partial^2_{j,i} f(\vec x) \equiv f_{,ji}(\vec x) \qquad (3)$$

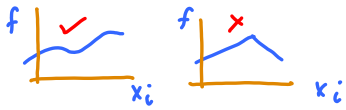
Beispiel v. Seite C3a:

$$\partial_2 \partial_1 \left(e^{3x^1}\sin(x^2)\right) \overset{(b.5)}{=} \partial_2\, 3e^{3x^1}\sin(x^2) = 3e^{3x^1}\cos(x^2) \qquad (4)$$

gleich!

$$\partial_1 \partial_2 \left(e^{3x^1}\sin(x^2)\right) \overset{(b.6)}{=} \partial_1\, e^{3x^1}\cos(x^2) = 3e^{3x^1}\cos(x^2) \qquad (5)$$

Satz v. Schwarz: Für hinreichend glatte Funktionen sind partielle Ableitungen vertauschbar:



$$\partial_i \partial_j f(\vec x) = \partial_j \partial_i f(\vec x) \qquad (6)$$

'Hinreichend glatt' bedeutet: alle Ableitungen bis mindestens zur 2.ten Ordnung sind stetig (AD-Buch, Seite 231, Fußnote 12)

$\partial_i^2 f,\ \partial_j^2 f,\ \partial_i\partial_j f,\ \partial_j\partial_i f$ [Beispiel wo dies nicht gilt: AD-Buch, S. 231]

C3.3 Gleichzeitige Änderung aller Variablen

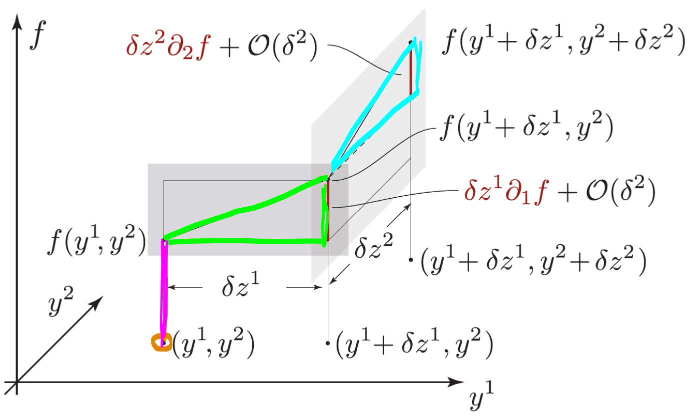
C3d

'Wie ändert sich Höhe von Ameise auf Zeltdach, wenn sie parallel zu $\vec z$ krabbelt?'

beliebiger, vorgegebener Vektor

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \vec y \mapsto f(\vec y) \qquad (1)$$

Wie ändert sich eine Funktion $f(\vec y)$ an einem gegebenen Punkt $\vec y = (y^1, y^2)^T$ wenn sich beide Argumente gleichzeitig ändern, von $\vec y$ nach $\vec y + \delta \vec z$ mit δ klein und $\vec z = (z^1, z^2)^T$ beliebig?



Es gilt:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\left[f(\vec y + \delta \vec z) - f(\vec y)\right] = \cancel{\delta} z^1 \frac{\partial}{\partial y^1} f(\vec y) + \cancel{\delta} z^2 \frac{\partial}{\partial y^2} f(\vec y) = \cancel{\delta} \sum_{j=1}^{2} \partial_j f(\vec y)\, z^j \qquad (2)$$

(Begründung: Seite C3e)

Verallgemeinerung: Für $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \ \vec y \mapsto f(\vec y)$ gilt: (3)

$$\boxed{\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\left[f(\vec y + \delta \vec z) - f(\vec y)\right] = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial y^j} f(\vec y)\, z^j = \partial_j f(\vec y)\, z^j}$$

kovariante Notation

Merke: linear in z^j ! (4)

Begründung für (d.2):

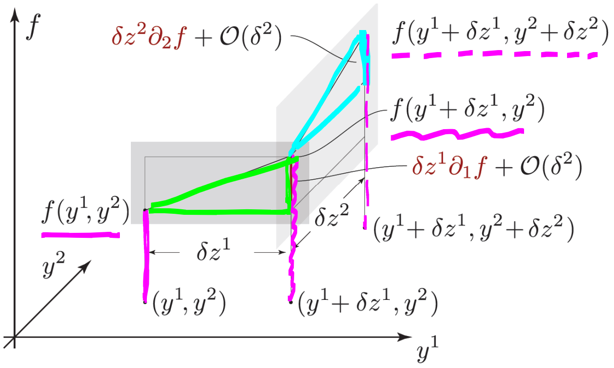
C3e

explizit für $d = 2$:

$$\vec{y} = (y^1, y^2)^T \qquad (1)$$

$$\delta \vec{z} = (\delta z^1, \delta z^2)^T \qquad (2)$$

$$\left[f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y}) \right] = ? \qquad (3)$$



subtrahiere und addiere dieselbe Größe

$$[\;] \overset{(2)}{=} \underbrace{f(y^1 + \delta z^1, y^2 + \delta z^2) - f(y^1 + \delta z^1, y^2)} + \underbrace{f(y^1 + \delta z^1, y^2) - f(y^1, y^2)} \qquad (4)$$

$$\simeq (\delta z^2)\, \partial_2 f(y^1 + \delta z^1, y^2) + (\delta z^1)\, \partial_1 f(y^1, y^2) \qquad (5)$$

$$\simeq \delta z^2\, \partial_2 \left[f(y^1, y^2) + \delta z^1 \partial_1 f(y^1, y^2) \right] + (\delta z^1)\, \partial_1 f(y^1, y^2) \qquad (6)$$

vernachlässigbar, weil v. Ordnung $\mathcal{O}(\delta^2)$

(5) in (3):

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left[f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y}) \right] = \cancel{\delta} \left[\partial_1 f(\vec{y}) z^1 + \partial_2 f(\vec{y}) z^2 \right] = \sum_{j=1}^{2} \partial_j f(\vec{y}) z^j = \text{(d.2)} \qquad (7)$$

Analog folgt (d.4) für beliebiges d

Beispiel für (d.2)

C3f

$$f(\vec{y}) = f(y^1, y^2) = (y^1 + 3y^2)^2 \qquad (1)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left[f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y}) \right] \overset{(d.4)}{=} \partial_1 f(y^1, y^2)\, z^1 + \partial_2 f(y^1, y^2)\, z^2 \qquad (2)$$

$$= 2(y^1 + 3y^2) z^1 + 6(y^1 + 3y^2) z^2 \qquad (3)$$

Explizite Rechnung ist aufwendig... :

$$f(y^1, y^2) = (y^1)^2 + 6 y^1 y^2 + 9 (y^2)^2 \qquad (4)$$

$$f(y^1 + \delta z^1, y^2 + \delta z^2) = (y^1 + \delta z^1)^2 + 6 (y^1 + \delta z^1)(y^2 + \delta z^2) + 9 (y^2 + \delta z^2)^2 \qquad (5)$$

$$= (y^1)^2 + 2 y^1 \delta z^1 + (\delta z^1)^2 + 6 \left[y^1 y^2 + y^1 \delta z^2 + \delta z^1 y^2 + \delta z_1 \delta z_2 \right] + 9 (y^2)^2 + 18 y^2 \delta z^2 + 9 (\delta z^2)^2 \qquad (6)$$

$$= (y^1)^2 + 6 y^1 y^2 + 9 (y^2)^2 + \delta \left[2 y^1 z^1 + 6 y^1 z^2 + 6 y^2 z^1 + 18 y^2 z^2 \right] + \mathcal{O}(\delta^2) \qquad (7)$$

$$= f(y^1, y^2) + \delta \left[2 (y^1 + 3y^2) z^1 + 6 (y^1 + 3y^2) z^2 \right] + \mathcal{O}(\delta^2) \qquad (8)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left[f(y^1 + \delta z^1, y^2 + \delta z^2) - f(y^1, y^2) \right] = 2 (y^1 + 3y^2) z^1 + 6 (y^1 + 3y^2) z^2 = (3) \qquad (9)$$

C3.3 Kettenregel für Funktion von mehreren Variablen

'Wie ändert sich Höhe von Ameise auf Zeltdach mit Zeit, wenn sie entlang $\vec{g}(x)$ krabbelt?'

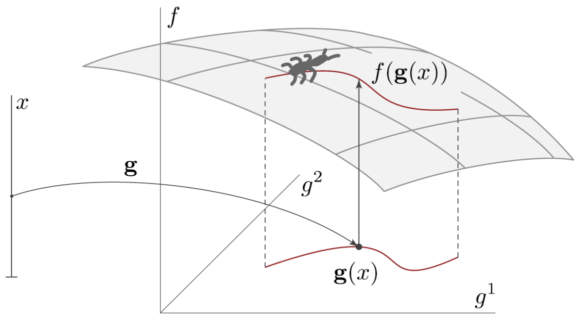
x

beliebiger, vorgegebener Weg

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad \vec{y} \mapsto f(\vec{y}) = f(y^1, \dots, y^d) \qquad (1)$$

$$\vec{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto \vec{g}(x) = (g^1(x), \dots, g^d(x))^T \qquad (2)$$

$$f \circ \vec{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(\vec{g}(x)) = f(g^1(x), \dots, g^d(x)) \qquad (3)$$



In Skizze: d=2

Dann gilt:

$$\boxed{\frac{d\, f(\vec{g}(x))}{dx} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f(\vec{g}(x))}{\partial g^j} \frac{d g^j(x)}{dx}} \qquad (4)$$

wie normale Kettenregel, aber summiert über j

(Steigung von f mit x) = $\sum_j$ (Steigung von f mit g^j) mal (Steigung von g^j mit x)

Falls der Kurvenparameter der Zeit entspricht, $x = t$:

$$\dot{f}(\vec{g}(t)) = \frac{d\, f(\vec{g}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f(\vec{g}(t))}{\partial g^j} \dot{g}^j(t) \qquad (5)$$

Begründung von Kettenregel (g.4)

$$\frac{d\, f(\vec{g}(x))}{dx} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left[f(\vec{g}(x+\delta)) - f(\vec{g}(x)) \right] = ? \qquad (1)$$

Für jede Komponente von $\vec{g}$ gilt:

$$g^j(x+\delta) \overset{(C1b.3)}{=} g^j(x) + \delta\, \underbrace{d_x g^j(x)}_{= \frac{d}{dx} g^j(x)} \qquad (2)$$

Mutter aller Ableitungen!

Vektornotation:

$$\vec{g}(x+\delta) = \vec{g}(x) + \delta\, \underbrace{d_x \vec{g}(x)}_{= \left(\frac{d}{dx} g^1(x), \dots \frac{d}{dx} g^d(x)\right)^T} \qquad (3)$$

(3) in (1)

$$\frac{d f(\vec{g}(x))}{dx} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left[f\left(\vec{g}(x) + \delta\, d_x \vec{g}(x)\right) - f(\vec{g}(x)) \right] = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left[f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y}) \right] \qquad (4)$$

Schreibe: $\vec{g}(x) = \vec{y}$, $d_x \vec{g}(x) = \vec{z}$ (5)

Berechne rechte Seite von (h.4) mittels (d.4):

$$\frac{d\, f(\vec{g}(x))}{dx} \overset{(d.4)}{=} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial y^j} f(\vec{y}) \Big|_{\vec{y}} z^j \overset{(5)}{=} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f(\vec{g}(x))}{\partial g^j} \frac{d g^j(x)}{dx} \qquad (6)$$

Beispiel:

$$f(g^1, g^2) = \cos(g^1) + \sin(g^2), \quad g^1(x) = \sqrt{x}, \quad g^2(x) = 3x \qquad (7)$$

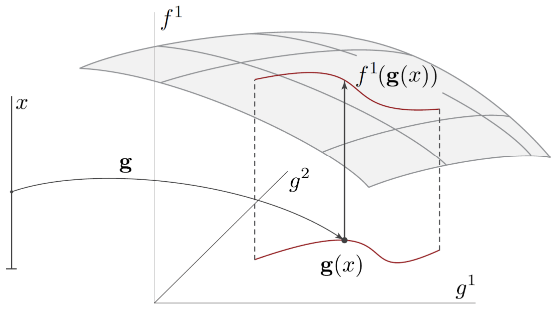
$$\frac{d}{dx} f(\vec{g}(x)) = \frac{\partial f}{\partial g^1} \frac{d g^1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial g^2} \frac{d g^2}{dx} = -\sin(g^1(x))\, \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos(g^2(x)) \cdot 3 = -\sin\sqrt{x}\, \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos(3x) \cdot 3 \qquad (8)$$

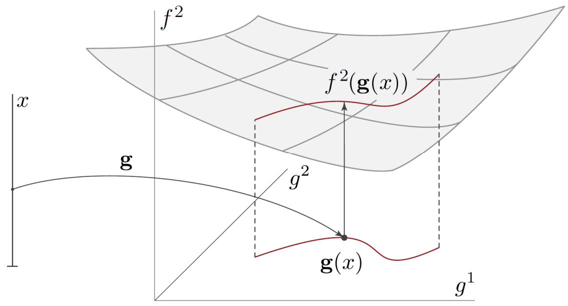
Verallgemeinerung I:

C 3 i

'Wie ändert sich Höhe und Temperatur mit der Zeit, wenn Ameise entlang $\vec{g}(x)$ krabbelt?'

f^1 f^2 x





$$\vec{f}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m, \quad \vec{y} \mapsto \vec{f}(\vec{y}) = \left(f^1(\vec{y}), \dots, f^m(\vec{y})\right)^T \qquad (1)$$

$$\vec{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto \vec{g}(x) = \left(g^1(x), \dots, g^d(x)\right)^T \qquad (2)$$

$$\vec{f} \circ \vec{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto \vec{f}(\vec{g}(x)) = \left(f^1(\vec{g}(x)), \dots f^m(\vec{g}(x))\right)^T \qquad (3)$$

Dann gilt (g.4) für jede Komponente getrennt:

$$\boxed{\frac{d f^i(\vec{g}(x))}{dx} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f^i(\vec{g}(x))}{\partial g^j} \frac{d g^j(x)}{dx} \qquad i = 1, \dots, m} \qquad (4)$$

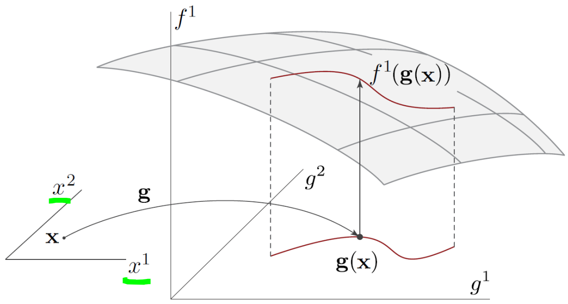
wie normale Kettenregel für f^i,
aber summiert über j

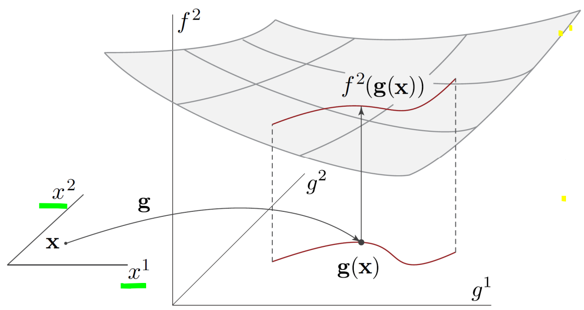
Verallgemeinerung II:

C 3 j

'Wie ändert sich Höhe und Temperatur mit der Zeit und der Windstärke, wenn Ameise entlang $\vec{g}(\vec{x})$ krabbelt?'

f^1 f^2 x^1 x^2





$$\vec{f}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m, \quad \vec{y} \mapsto \vec{f}(\vec{y}) \qquad (1)$$

$$\vec{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \mapsto \vec{g}(\vec{x}) = \vec{g}(x^1, \dots, x^n) \qquad (2)$$

$$\vec{f} \circ \vec{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{g}(\vec{x})) \qquad (3)$$

Dann gilt (g.4) für jede Komponente getrennt:

$$\boxed{\frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial g^j} \frac{\partial g^j(\vec{x})}{\partial x^k} \qquad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, n \end{matrix}} \qquad (4)$$

wie normale Kettenregel für f^i,
aber summiert über j
und partiell abgeleitet nach x^k

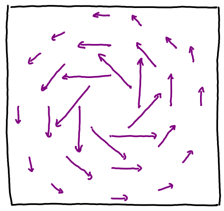
Beispiel: Geschwindigkeit an Wasseroberfläche (Selbststudium!)

C3k

Betrachte erstens:

$$\vec{g}: \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \longmapsto \vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g^1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g^d(\vec{x}) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Beispiel für $\vec{g}$:
Geschwindigkeit an Wasseroberfläche, $\vec{v}$:



$d = 2$
$n = 2$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v^1(\vec{x}) \\ v^2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^1} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Betrachte zweitens:

$$f: \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (m = 1)$$
$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^d \end{pmatrix} \longmapsto f(\vec{y}) = f(y^1, \dots, y^d) \qquad (3)$$

Beispiel für f: Betragsquadrat des Vektors $\vec{y}$:

$$f(\vec{y}) = \|\vec{y}\|^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2 \qquad (4)$$

Betrachte nun Verkettung v. f und g:

$$f \circ \vec{g}: \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{x} \longmapsto f(\vec{g}(\vec{x}))$$
$$= f(g^1(\vec{x}), \dots, g^d(\vec{x})) \qquad (5)$$

Beispiel für Verkettung: Betragsquadrat der Wassergeschwindigkeit am Punkt $\vec{x}$:

$$f(\vec{v}(\vec{x})) = \|\vec{v}(\vec{x})\|^2 \qquad (5)$$
$$= (v^1(\vec{x}))^2 + (v^2(\vec{x}))^2$$
$$= \frac{1}{(x^2)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} \qquad (6)$$

Fortsetzung Beispiel: Wie ändert sich Geschwindigkeit an Wasseroberfläche mit x^1 ?

C3l

$$\partial_1 f(\vec{v}(\vec{x})) \overset{(k.6)}{=} \partial_1 \left[\frac{1}{(x^2)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} \right] = \left[0 + \frac{-2}{(x^1)^3} \cdot 1 \right] = -\frac{2}{(x^1)^3} \qquad (1)$$

Nochmal, nun mit der allgemeinen Kettenregel für partielle Ableitungen gerechnet:

$$f(\vec{y}) \overset{(k.4)}{=} (y^1)^2 + (y^2)^2, \qquad (2a) \qquad \vec{v}(\vec{x}) \overset{(c.2)}{=} \left(-\tfrac{1}{x^2}, \tfrac{1}{x^1}\right)^T \qquad (2b)$$

$$\partial_1 f(\vec{v}(\vec{x})) \overset{(j.4)}{=} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^j}\bigg|_{\vec{y} = \vec{v}(\vec{x})} \cdot \frac{\partial v^j(\vec{x})}{\partial x^1} \qquad (3)$$

$$= \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^1}\bigg|_{\vec{y} = \vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial v^1(\vec{x})}{\partial x^1} + \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^2}\bigg|_{\vec{y} = \vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial v^2(\vec{x})}{\partial x^1} \qquad (4)$$

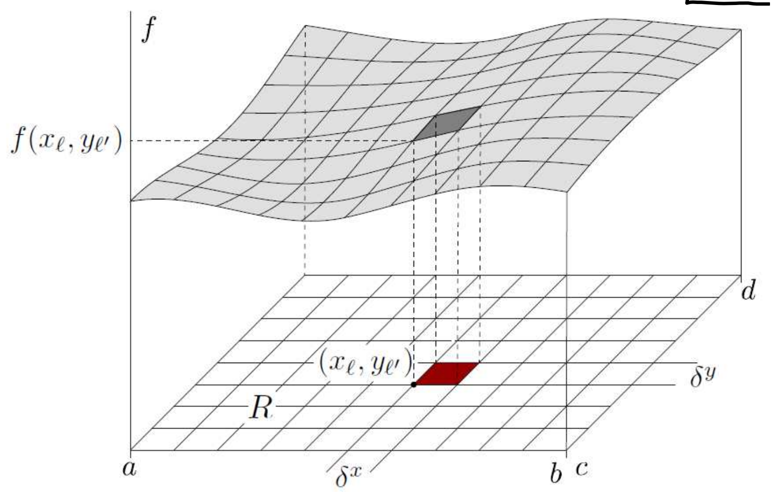
$$= \frac{\partial}{\partial y^1}\Big(\overbrace{(y^1)^2 + (y^2)^2}^{(2a)}\Big)\bigg|_{\vec{y} = \vec{v}(\vec{x})} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big(\overbrace{-\frac{1}{x^2}}^{(2b)}\Big)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y^2}\Big(\overbrace{(y^1)^2 + (y^2)^2}^{(2a)}\Big)\bigg|_{\vec{y} = \vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial}{\partial x^1}\Big(\overbrace{\frac{1}{x^1}}^{(2b)}\Big) \qquad (5)$$

$$= 2y^2\Big|_{\vec{y} = \vec{v}(\vec{x})} \cdot \left(\frac{-1}{(x^1)^2}\right) = 2\, v^2(\vec{x}) \left(\frac{-1}{(x^1)^2}\right) = 2 \frac{1}{x^1}\left(-\frac{1}{(x^1)^2}\right) = -\frac{2}{(x^1)^3} \quad ✓ \qquad (6)$$

C4 Mehrdimensionale Integration (kartesisch)

C4a

C4.1 2D Integration über Rechteck



$$f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x,y)$$

Diskretisierungschritte:

$$\delta^x = \frac{b-a}{N_x}, \qquad \delta^y = \frac{d-c}{N_y}$$

Volumen $\simeq \sum_{\ell} \sum_{\ell'} f(x_\ell, y_{\ell'})\, \delta^x \delta^y$ (Riemann-Summe)

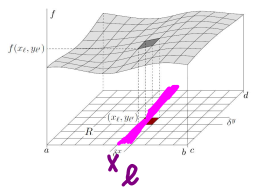
Def. v 2D-Integral:

$$\lim_{\delta^x, \delta^y \to 0} \delta^x \delta^y \sum_{\ell} \sum_{\ell'} f(x_\ell, y_{\ell'}) \equiv \int_{[a,b]\times[c,d]} dx\, dy \; f(x,y)$$

$[a,b]\times[c,d]$: Integrations-Domäne

C4b

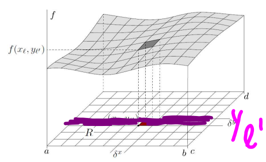
Fubini's Theorem: Integrationsreihenfolge ist egal



$$\int_{[a,b]\times[c,d]} dx\, dy \; f(x,y) = \lim_{\delta^x \to 0} \delta^x \sum_{\ell} \underbrace{\lim_{\delta^y \to} \delta^y \sum_{\ell'} f(x_\ell, y_{\ell'})}_{\text{1D-Integral, mit } x_\ell \text{ fest}} \quad (1)$$

$$= \lim_{\delta^x \to 0} \delta^x \sum_{\ell} \underbrace{\int_c^d dy\, f(x_\ell, y)}_{\text{Funktion v. } x_\ell\text{, kann integriert werden}} = \int_a^b dx \int_c^d dy\; f(x,y) \quad (2)$$

Alternativ:



$$\int_{[a,b]\times[c,d]} dx\, dy \; f(x,y) = \lim_{\delta^y \to 0} \delta^y \sum_{\ell'} \underbrace{\lim_{\delta^x \to 0} \delta^x \sum_{\ell} f(x_\ell, y_{\ell'})}_{\text{1D-Integral, mit } y_{\ell'} \text{ fest}} \quad (3)$$

$$= \lim_{\delta^y \to 0} \delta^y \sum_{\ell'} \underbrace{\int_a^b dx\, f(x, y_{\ell'})}_{\text{Funktion v. } y_{\ell'}\text{, kann integriert werden}} = \int_c^d dy \int_a^b dx\; f(x,y) \quad (4)$$

Intuitive Begründung:
Zählreihenfolge der Quader in Zeilen oder Spalten ist egal.

Fubini:

$$\boxed{\int_{[a,b]\times[c,d]} dx\, dy \; f(x,y) = \int_a^b dx \int_c^d dy\; f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx\; f(x,y)} \quad (5)$$

C4c

Beispiel $f: [0,2]\times[0,1] \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto f(x,y) = xy + y^2$ (1)

$$\int_0^2 dx \int_0^1 dy\, f(x,y) = \int_0^2 dx \int_0^1 dy\,(xy+y^2) = \int_0^2 dx\,\left(x\,\tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{3} y^3\right)\Big|_0^1 \qquad (2)$$

$$= \int_0^2 dx\,\left(x\,\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3} x\right)\Big|_0^2 = \tfrac{1}{4}\cdot 4 + \tfrac{1}{3}\cdot 2 = \tfrac{5}{3} \qquad (3)$$

Fubini stimmt!

$$\int_0^1 dy \int_0^2 dx\, f(x,y) = \int_0^1 dy \int_0^2 dx\,(xy+y^2) = \int_0^1 dy\,\left(\tfrac{1}{2} x^2 y + x y^2\right)\Big|_0^2 \qquad (4)$$

$$= \int_0^1 dy\,\left(\tfrac{1}{2}\cdot 4\, y + 2y^2\right) = \left(2\cdot\tfrac{1}{2} y^2 + 2\,\tfrac{1}{3}\cdot y^3\right)\Big|_0^1 = 1\cdot 1 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{3} \qquad (5)$$

Analog in 3D:

$$\int_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} dx\,dy\,dz\, f(x,y,z) = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\, f(x,y,z) \qquad (6)$$

Reihenfolge dieser Integrale ist beliebig

Satz von Fubini ist <u>nicht</u> anwendbar, falls das Integral $\int dx\,dy\,|f(x,y)|$ nicht existiert.

Siehe AD-Buch, INFO auf S. 240.

C4c

Beispiel $f: [0,2]\times[0,1] \to \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = xy + y^2$ (1)

$$\int_0^2 dx \int_0^1 dy\, f(x,y) = \int_0^2 dx \int_0^1 dy\,(xy+y^2) = \int_0^2 dx\,\left(x\,\tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{3} y^3\right)\Big|_0^1 \qquad (2)$$

$$= \int_0^2 dx\,\left(x\,\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3} x\right)\Big|_0^2 = \tfrac{1}{4}\cdot 4 + \tfrac{1}{3}\cdot 2 = \tfrac{5}{3} \qquad (3)$$

Fubini stimmt!

$$\int_0^1 dy \int_0^2 dx\, f(x,y) = \int_0^1 dy \int_0^2 dx\,(xy+y^2) = \int_0^1 dy\,\left(\tfrac{1}{2} x^2 y + x y^2\right)\Big|_0^2 \qquad (4)$$

$$= \int_0^1 dy\,\left(\tfrac{1}{2}\cdot 4\, y + 2y^2\right) = \left(2\cdot\tfrac{1}{2} y^2 + 2\,\tfrac{1}{3}\cdot y^3\right)\Big|_0^1 = 1\cdot 1 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{3} \qquad (5)$$

Analog in 3D:

$$\int_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} dx\,dy\,dz\, f(x,y,z) = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\, f(x,y,z) \qquad (6)$$

Reihenfolge dieser Integrale ist beliebig

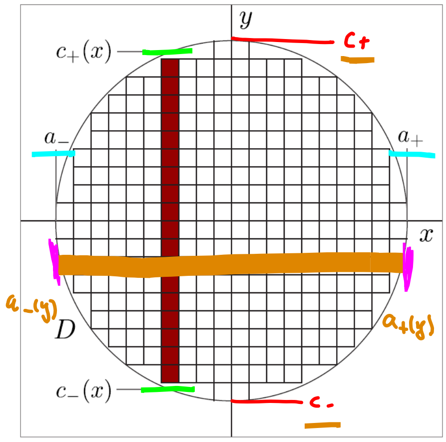
Wann ist Satz von Fubini nicht anwendbar? Siehe AD-Buch, INFO auf S. 240.

Integration über allgemeiner Domänen

C4d

Riemann-Summe:

$$\simeq \delta^x \sum_{a_- < x_\ell < a_+} \cdot \; \delta^y \sum_{c_-(x_\ell) < y_{\ell'} < c_+(x_\ell)} f(x_\ell, y_{\ell'}) \qquad (1)$$



Integral v. Funktion $f(x,y)$ über d. Fläche:

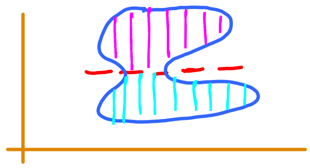
$$\int_D dx\, dy\; f(x,y) \equiv \int_{a_-}^{a_+} dx \left[\int_{c_-(x)}^{c_+(x)} dy\; f(x,y) \right]$$

nach Fubini

$$= \int_{c_-}^{c_+} dy \left[\int_{a_-(y)}^{a_+(y)} dx\; f(x,y) \right]$$

Für das 'innere' (zweite) Integral sind die Grenzen abhängig von der 'äußeren' (ersten) Integrationsvariable.

Bemerkung: $c_\pm(x)$ bzw. $a_\pm(y)$
müssen eindeutige Funktionen sein; falls sie es nicht sind,
hilft Unterteilung des Integrals in mehrere Teile:



Beispiel: Kreisfläche

C4e

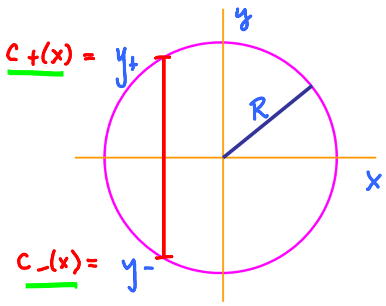
$$A \overset{(d.2)}{=} \int_{-R}^{R} dx \int_{c_-(x)}^{c_+(x)} dy \cdot 1 \qquad (3)$$

$$= \int_{-R}^{R} dx \left[c_+(x) - c_-(x) \right] \overset{(2)}{=} 2 \int_{-R}^{R} dx \sqrt{R^2 - x^2} \qquad (4)$$

Bestimmung der Integrationsgrenzen für y:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (1)$$

$$c_\pm(x) = y_\pm = \pm\sqrt{R^2 - x^2} \qquad (2)$$



Substition: $x = R\cos t$ Grenzen: $R = R\cos(0)$ (5)

Maß: $\frac{dx}{\cancel{dt}} = -R\sin t \cdot dt$ $\quad -R = R\cos(\pi)$

$$A \overset{(2)}{=} -2 \int_{\pi}^{0} dt\, (R\sin t) \underbrace{\sqrt{R^2 - R^2\cos^2 t}} \qquad (6)$$

$$R\sqrt{1-\cos^2 t} = R\sin t \qquad (7)$$

$$= 2R^2 \underbrace{\int_0^{\pi} dt\, \overset{u}{\sin^2 t} \cdot \overset{v'}{1}}_{\pi/2} = \pi R^2 \qquad (8)$$

part. Int.

□

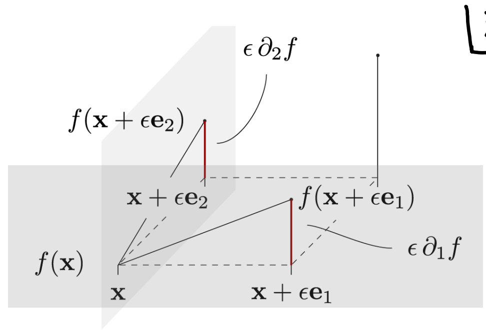
Zusammenfassung C3: Partielle Ableitungen

ZC3

Partielle Ableitung: $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\left[f(\vec{x} + \delta \vec{e}_i) - f(\vec{x})\right] \qquad (1)$$

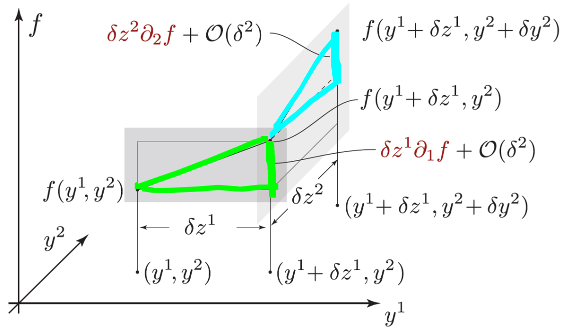
$$\equiv \partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i f(\vec{x}) \qquad (2)$$



Satz v. Schwarz: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ (3)

$$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad \vec{y} \longmapsto f(\vec{y})$$

$$\lim \frac{1}{\delta}\left[f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y})\right] = \partial_j f(\vec{y})\, z^j \qquad (4)$$



$$\vec{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d, \quad \vec{f}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m, \quad \vec{f} \circ \vec{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Allgemeine Kettenregel:

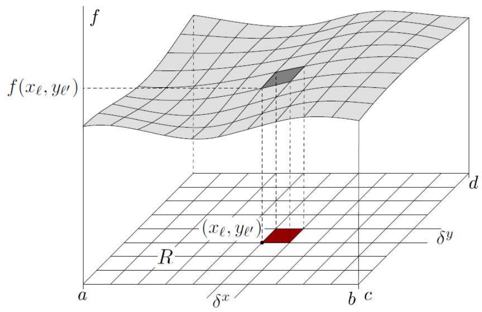
$$\frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial g^j} \frac{\partial g^j(\vec{x})}{\partial x^k} \qquad i = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, n \qquad (5)$$

Zusammenfassung: C4 Mehrdimensionale Integration (Kartesisch)

ZC4a

Integration in $\mathbb{R}^2$

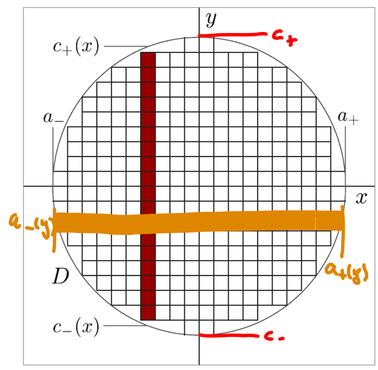
$$\int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) \equiv \lim_{\delta^x, \delta^y \to 0} \delta^x \delta^y \sum_{\ell} \sum_{\ell'} f(x_\ell, y_{\ell'})$$



Fubini: Integrationsreihenfolge ist egal:

$$\int_a^b dx \int_{y_-(x)}^{y_+(x)} dy\, f(x,y) = \int_{y_a}^{y_b} dy \int_{x_-(y)}^{x_+(y)} dx\, f(x,y)$$

Für das 'innere' (zweite) Integral sind die Grenzen abhängig von der 'äußeren'



Analog in 3D:

$$\int_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} dx\, dy\, dz\, f(x,y,z) = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\, f(x,y,z)$$

Reihenfolge dieser Integrale ist beliebig