V: Vektor-Kalkulus

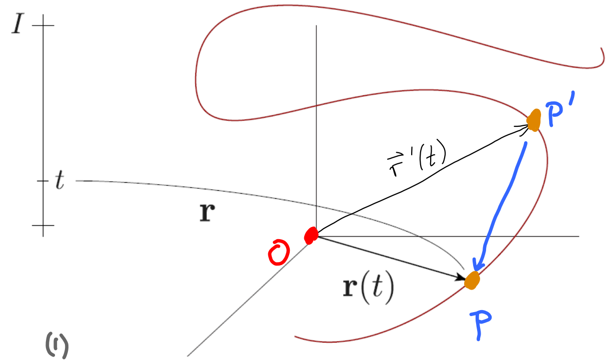
VIa

Euklidischer Raum (ER) = Ursprung + Euklidischer Vektorraum $\,/\!\!/\!\!/\, \mathbb{E}^3$
(Raum unserer Wahrnehmung)

Punkt im ER: $\quad P = O + \vec{r}\,, \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^3$

Differenzen v. Punkten sind Vektoren:

$$\vec{P} - \vec{P}' = \vec{r} - \vec{r}' \in \mathbb{E}^3$$



V1 Kurven

V1.1 Definition einer Kurve in $\mathbb{R}^d$

$$\vec{r}: I \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^d(t) \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

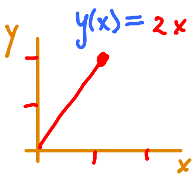
Intervall: $I \subset \mathbb{R}$, wir wählen i.d. Regel $I = (0, \tau)$ (2)

'Kurve': $\gamma = \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \}$ = Bild der Funktion $\vec{r}$ $= \vec{r}(I)$
[im Sinne v. Seite L1b]

Die Funktion $\vec{r}$ liefert eine 'Parametrisierung d. Kurve'

Beispiele von Parametrisierungen

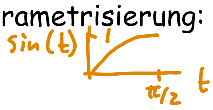
VIb

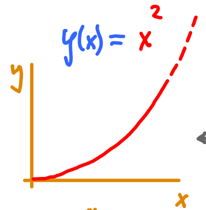


eine mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (t, 2t)^T, \quad t \in (0,1)$ (1)

andere mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (t^2, 2t^2)^T, \quad t \in (0,1)$ (2)

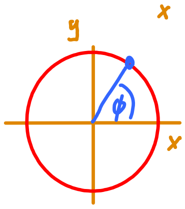
weitere mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (\sin t, 2\sin t)^T, \quad t \in (0, \frac{\pi}{2})$ (3)





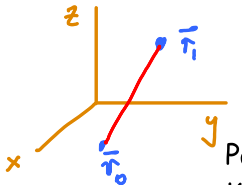
eine mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (t, t^2)^T, \quad t \in (0, \infty)$ (4)

andere mögliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (e^t, e^{2t})^T, \quad t \in (-\infty, \infty)$ (5)



naheliegende Parametrisierung: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)^T, \quad t \in (0, 2\pi)$ (6)

$\phi = t$

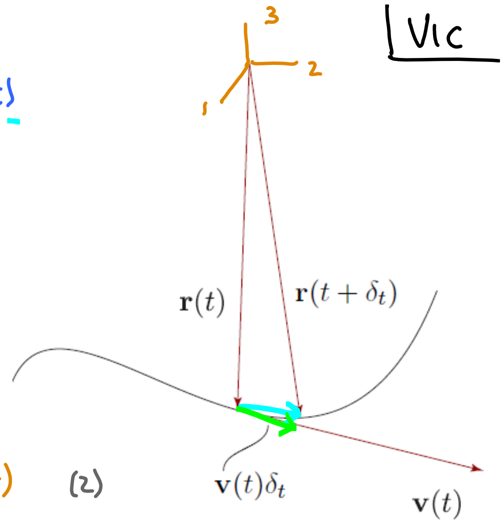


naheliegende Parametrisierung: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)t, \quad t \in (0,1)$ (7)

Parametrisierung einer Kurve enthält mehr Information als die Kurve selbst:
Kurve sagt aus, wie die 'Reiseroute' aussieht.
Parametrisierung sagt zusätzlich auch aus, wie schnell sie durchlaufen wird.

V1.2 Kurvengeschwindigkeit

V1c



'Kurvengeschwindigkeit' $\vec{v}(t)$ z.Zeit $t \in I \in (0,\tau)$
ist definiert durch die lineare Näherung:

$$\vec{r}(t+\delta_t) \simeq \vec{r}(t) + \delta_t \vec{v}(t) \qquad (\delta_t \to 0) \qquad (1)$$

$\vec{v}(t)$ liegt 'tangential' zur Kurve,

denn eine kleine Änderung, δ_t, in t bewirkt, dass sich $\vec{r}$ in $\vec{v}$ -Richtung ändert.

$$\vec{v}(t) \overset{(1)}{=} \lim_{\delta_t \to 0} \left[\frac{\vec{r}(t+\delta_t) - \vec{r}(t)}{\delta_t} \right] = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv d_t \vec{r}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) \qquad (2)$$

[Vergleiche Mutter aller Ableitungen, C1b.3 !]

Wir definieren I als <u>offenes</u> (!) Interval, denn <u>am</u> Rand ist die Ableitung $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ undefiniert.

Am Rand: $\vec{r}(\tau) = \lim_{t\to\tau} \vec{r}(t)$

Siehe AD-Buch, INFO auf Seite 409.

Komponentenschreibweise: $\vec{r}(t) = \vec{e}_i\, r^i(t)$ (3)

$\vec{e}_i$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Kartesische Basisvektoren sind <u>zeitunabhängig</u>!

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\vec{e}_i\, r^i(t)\right) = \vec{e}_i \left(\frac{dr^i(t)}{dt}\right) \equiv \vec{e}_i\, v^i(t) \qquad (4)$$

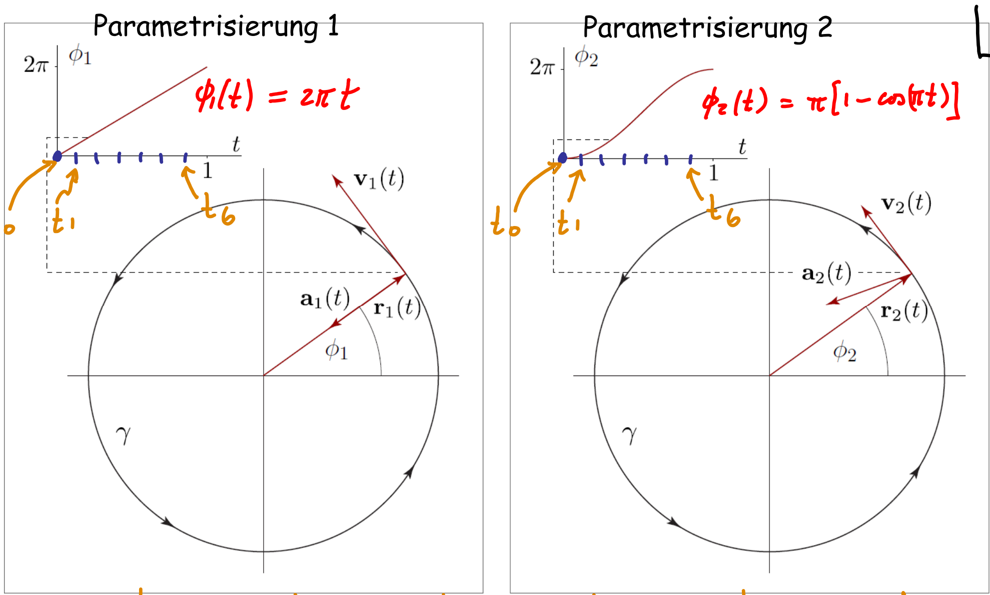
$$v^i(t) \equiv \frac{dr^i(t)}{dt} \equiv \dot{r}^i(t) \qquad (5)$$

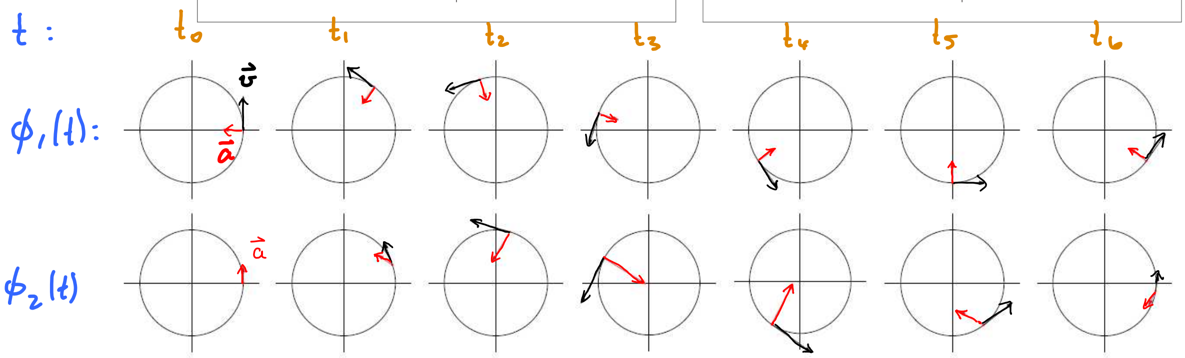
Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t) \qquad (6)$$

Beispiel: Kreis

V1d





V1e

Ort: $\vec{r}_i = \begin{pmatrix} \cos\phi_i(t) \\ \sin\phi_i(t) \end{pmatrix}$ (1)

Parametrisierung 1: $\phi_1(t) = 2\pi t$ (2)

Parametrisierung 2: $\phi_2(t) = \pi[1 - \cos(\pi t)]$ (3)

Beide Parametrisierungen (i = 1,2) beschreiben denselben Kreis:

$\gamma = \{ \vec{r}(t) \mid t \in (0,1) \}$

$\|\vec{r}_i\|^2 = (x_i)^2 + (y_i)^2 = \cos^2[\ ] + \sin^2[\ ] = 1$ (4)

Quadrat

Vektor: i = 1 oder 2

Geschw.: $= d_t(1)$

$\dot{\vec{r}}_i = \begin{bmatrix} -\sin\phi_i(t) \\ \cos\phi_i(t) \end{bmatrix} \dot{\phi}_i$, $\quad \dot{\phi}_1(t) = 2\pi$, $\quad \dot{\phi}_2(t) = \pi^2 \sin(\pi t)$ (5)

Beschl.: $= d_t(5)$

$\ddot{\vec{r}}_i \overset{PR}{=} -\begin{pmatrix} \cos\phi_i(t) \\ \sin\phi_i(t) \end{pmatrix} \dot{\phi}_i^2 + \begin{bmatrix} -\sin\phi_i(t) \\ \cos\phi_i(t) \end{bmatrix} \ddot{\phi}_i$, $\quad \ddot{\phi}_1 = 0$, $\quad \ddot{\phi}_2 = \pi^3 \cos(\pi t)$ (6)

$= -\vec{r}_i\, \dot{\phi}_i^2 + \vec{v}_i\, \ddot{\phi}_i / \dot{\phi}_i$ (7)

Zentripetalbeschl. — Änderung der Geschwindigkeit in Tangentialrichtung

Für i = 1 gilt: $\|\vec{r}_1(t)\| = 1$, $\quad \|\vec{v}_1(t)\| = 2\pi$, $\quad \|\vec{a}_1(t)\| = (2\pi)^2$ (8)

$\vec{r}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0$, $\quad \vec{v}_1 \cdot \vec{a}_1 = 0$ (9)

V1f

<u>Ableitungsregeln:</u> $d_t \equiv \frac{d}{dt}$ $\qquad d_t \vec{r} \equiv d_t(\vec{r}(t))$

Für $\vec{r}(t)$, $\vec{s}(t)$, $a(t)$ gilt:

$d_t(\vec{r} + \vec{s}) = d_t\vec{r} + d_t\vec{s}$ (1)

$d_t(a\vec{r}) \overset{\text{Produktregel}}{=} (d_t a)\,\vec{r} + a\,(d_t\vec{r})$ (2)

$d_t(\vec{r} \cdot \vec{s}) \overset{PR}{=} (d_t\vec{r}) \cdot \vec{s} + \vec{r} \cdot (d_t\vec{s})$ (3)

$d_t(\vec{r} \times \vec{s}) \overset{PR}{=} (d_t\vec{r}) \times \vec{s} + \vec{r} \times (d_t\vec{s})$ (4)

Herleitung:
nach Komponenten zerlegen, z.B.: $\vec{r}(t) = \vec{e}_i\, r^i(t)$, $\quad \vec{s}(t) = \vec{e}_j\, s^j(t)$ (5)

$d_t(\vec{r} \cdot \vec{s}) = d_t\left[(\vec{e}_i\, r^i(t)) \cdot (\vec{e}_j\, s^j(t)) \right]$ (6)

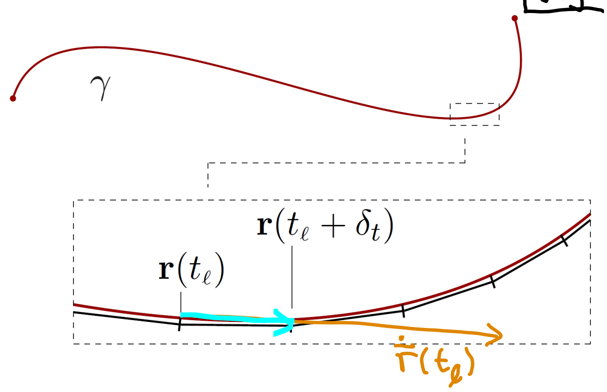
$\overset{PR}{=} (\vec{e}_i\, d_t(r^i(t))) \cdot (\vec{e}_j\, s^j(t)) + (\vec{e}_i\, r^i(t)) \cdot (\vec{e}_j\, d_t s^j(t))$ (7)

$= (d_t\vec{r}) \cdot \vec{s} + \vec{r} \cdot (d_t\vec{s})$ $\Rightarrow$ (4) (8)

V1.3 Länge einer Kurve

V1g

Kurve: $\vec r : (0,T) \to \mathbb{R}^d, \quad t \to \vec r(t)$



Schätzung der Kurvenlänge:
(mit Diskretisierungsparameter δ_t)

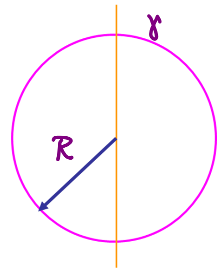
$$L_{\delta_t} = \sum_\ell \underbrace{\| \vec r(t_\ell + \delta_t) - \vec r(t_\ell)\|}_{(C.1)\ \simeq\ \|\delta_t \dot{\vec r}(t_\ell)\| \ =\ \delta_t \|\dot{\vec r}(t_\ell)\|} \qquad (1)$$

Tatsächliche Kurvenlänge:

$$L[\gamma] = \lim_{\delta_t\to 0} L_{\delta_t} \overset{(1)}{=} \lim_{\delta_t\to 0}\delta_t \sum_\ell \|\dot{\vec r}(t_\ell)\| = \int_0^T dt\, \|\dot{\vec r}(t)\| \qquad (2)$$

(C.2) $\equiv d_t \vec r(t)$

Beispiel: Umfang eines Kreises:



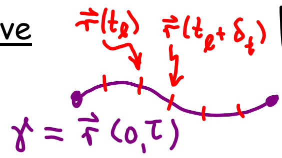
$$\vec r(t) = R(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)^T, \quad t\in(0,1) \qquad (3)$$

$$\dot{\vec r}(t) = 2\pi R(-\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)^T, \quad \|\dot{\vec r}\| = 2\pi R\,[\underbrace{\sin^2+\cos^2}_{=1}]^{1/2} \qquad (4)$$

$$L[\gamma] \overset{(2)}{=} \int_0^1 dt\ 2\pi R = 2\pi R \quad ✓ \qquad (5)$$

Länge ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung der Kurve

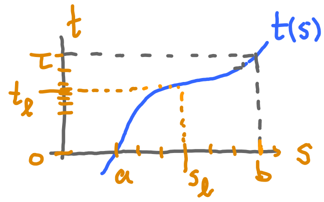
V1h



t-Parametrisierung: $\vec r: (0,T)\to\mathbb{R}^d, \quad t\mapsto \vec r(t)$ (1)

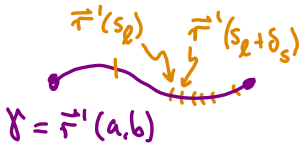
Argument v. $\vec r(t)$ sei Zielelement einer bijektiven Abbildung: $t: (a,b)\to(0,T), \quad s\mapsto t(s)$ (2)

wegen Bijektivität: $\frac{d}{ds}t(s) > 0$ (3)



Konstruiere nun alternative Parametrisierung derselben Kurve:

s-Parametrisierung: $\vec r\,': (a,b)\to\mathbb{R}^d, \quad s\mapsto \vec r\,'(s) \equiv \vec r(t(s))$ (4)



s-Geschwindigkeit:

$$\|d_s\vec r\,'(s)\| \overset{(4)}{=} \left\|\frac{d}{ds}\vec r(t(s))\right\| \overset{(1d.2):KR}{=} \left\|\frac{d}{dt}\vec r(t)\Big|_{t=t(s)} \frac{dt(s)}{ds}\right\| = \frac{dt(s)}{ds}\|d_t \vec r(t(s))\| \qquad (5)$$

$\|\vec u a\| = a\|\vec u\|$ falls $a \overset{(3)}{>} 0$

Kurvenlänge:

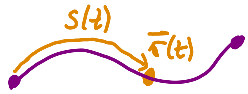
$$L[\gamma] \overset{(h.2)}{=} \int_a^b ds\, \|d_s \vec r\,'(s)\| \overset{(5)}{=} \int_a^b ds\, \frac{dt(s)}{ds}\|d_t\vec r(t(s))\| \underset{t=t(s)}{\overset{(C2g.4)}{=}} \int_0^T dt\, \|d_t \vec r(t)\| \overset{✓}{=} (h.2) \qquad (6)$$

Integralsubstitution:

Konsistenzcheck erfolgreich: s-Parametrisierung liefert dieselbe Länge wie t-Parametrisierung!

Natürliche Parametrisierung einer Kurve: durch Bogenlänge

V1i



$\gamma = \vec r(0,T)$

Kurve sei durch eine Variable u parametrisiert. $\vec r: (0,T) \to \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto \vec r(u)$ (1)

Bogenlänge nach Zeit t: $s(t) \overset{(h.2)}{\equiv} \int_0^t du \, \| d_u \vec r(u) \|$ (2)

(auch unabhängig v. Form der Parametrisierung)

s wächst monoton mit t: $s: (0,T) \to (0, L(\gamma)), \quad t \mapsto s(t), \quad d_t s(t) > 0$ (3)

Umkehrfunktion: Zeit t(s), nach der Länge s erreicht ist: $t: (0, L(\gamma)) \to (0,T), \quad s \mapsto t(s)$ (4)

Parametrisiere nun Kurve durch Bogenlänge s: $\vec r_L: (0, L(\gamma)) \to \mathbb{R}^d, \quad s \mapsto \vec r_L(s) \equiv \vec r(t(s))$ (5)

'Natürliche Parametrisierung'

Geschw. in nat. Param.: $\| d_s \vec r_L(s) \| \overset{(h.5)}{=} \left\| \frac{d}{dt} \vec r(t) \Big|_{t=t(s)} \right\| \frac{dt(s)}{ds} \;\text{"}=\; \left\| \frac{d\vec r}{\cancel{dt}} \right\| \frac{\cancel{dt}}{ds} \text{"} = 1$ (6)

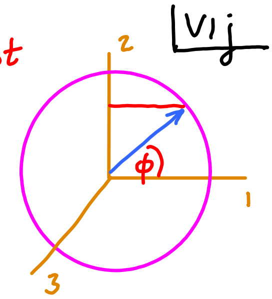
Ist t-Geschw. groß, wächst auch Bogenlänge schnell mit t, 'das hebt sich weg'

sauber formuliert: $\frac{dt(s)}{ds} \overset{(C1.e.2)}{=} \frac{1}{\frac{ds(t)}{dt}\Big|_{t=t(s)}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{\| d_t \vec r(t) \|}\Big|_{t=t(s)}$ (7)

Beispiel: Kreisbewegung

V1j

$\phi = \omega t$



Bahnkurve: $\vec r: (0,T) \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto \vec r(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t)^T$ (1)

Periode: wenn $\cos(\omega T) = 1 \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$ (2)

Geschwindigkeit: $\frac{d\vec r}{dt} \overset{(1)}{=} \omega R(-\sin\omega t, \cos\omega t)^T \qquad \left\| \frac{d\vec r}{dt} \right\| \overset{(3)}{=} R\omega$ (3)

Bogenlänge: $s(t) \overset{(i.2)}{=} \int_0^t du \, \| \dot{\vec r}(u) \| \overset{(4)}{=} \int_0^t du \, R\omega = R\omega t$ (4)

Kreisumfang: $s(T) \overset{(5),(2)}{=} R\omega \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi R$ ✓ (5)

Umkehrfunktion: $t: (0, 2\pi R) \to (0,T), \quad s \mapsto t(s) \overset{(4)}{=} \frac{s}{R\omega}$ (6)

$= t(2\pi R) = \frac{2\pi R}{R\omega} = T$

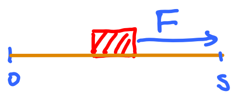
Natürliche Parametrisierung: $\vec r_L(s) = \vec r(t(s)) \overset{(1,7)}{=} (R\cos(s/R), R\sin(s/R))^T$ (7)

s-Geschwindigkeit: $\| d_s \vec r_L \| \overset{(7)}{=} \left\| R\left(-\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}, \frac{1}{R}\cos s/R\right) \right\| = 1$ ✓ (8)

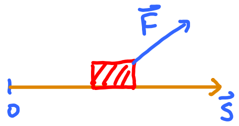
V1.4 Linienintegral

Physikalische Motivation: Arbeit (W) verrichtet durch Kraft entlang eines Weges.

Falls Richtung der Kraft entlang geradliniger Verschiebung ist: $W = sF$

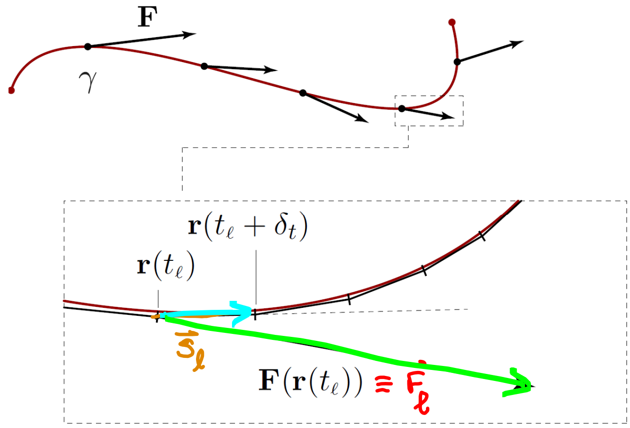


Falls Richtung der Kraft nicht entlang geradliniger Verschiebung: $W = \vec{s} \cdot \vec{F}$



Nicht-geradliniger Weg, γ

mit ortsabhängige Kraft: $\vec{F}(\vec{r}(t))$



Parametrisierung:

$$\vec{r} : (0,T) \to \mathbb{R}^d, \quad t \mapsto \vec{r}(t) \qquad (1)$$

Diskretisierungsparameter: δ_t

Arbeit im Intervall ℓ: $W_\ell \equiv \vec{s}_\ell \cdot \vec{F}_\ell$ (2)

Verschiebung im Intervall ℓ:

$$\vec{s}_\ell = \vec{r}(t_\ell + \delta_t) - \vec{r}(t_\ell) \overset{(c.1)}{=} \delta_t \dot{\vec{r}}(t_\ell) \qquad (3)$$

Gesamtarbeit entlang der Kurve γ :

$$W[\gamma] \equiv \lim_{\delta_t \to 0} \sum_\ell \underbrace{W_\ell}_{\vec{s}_\ell \cdot \vec{F}_\ell} \qquad (1)$$

mit dieser symbolische Notation ist dies gemeint!

$$\overset{(k.2),(k.3)}{=} \lim_{\delta_t \to 0} \delta_t \sum_\ell \dot{\vec{r}}(t_\ell) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t_\ell)) \equiv \int_0^T dt\, \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) \equiv \int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{F} \qquad (2)$$

'Linienintegral der Kraft $\vec{F}$ entlang des Weges γ '

<u>Definition eines allgemeinen Linienintegrals:</u> (3 Konstruktionsschritte)

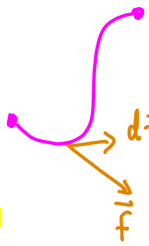
$$\vec{f} : \gamma \to \mathbb{R}^d, \quad \vec{r} \mapsto \vec{f}(\vec{r})$$ sei eine vektorwertige Funktion, definiert auf einer Kurve γ (3)

(i) Definiere Parametrisierung v. γ : $\vec{r} : (0,T) \to \mathbb{R}^d, \quad t \mapsto \vec{r}(t)$ (4)

(ii) Bilde die reell-wertige Funktion $\boxed{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{f}(\vec{r}(t)) \equiv \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}}$ (5)

(iii) Integriere über Definitionsbereich des Parameters: $\boxed{\int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{f} \equiv \int_0^T dt\, \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}}$ (6)

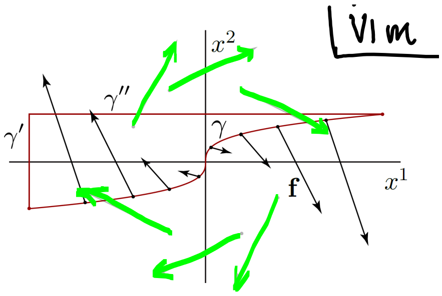
wird auf 'Wegelement' projiziert



Der Wert des Linienintegrals ist <u>unabhängig</u> von der Parametrisierung (analog zu Seite i)

Beispiel: Berechne das Linienintegral $\int_\gamma d\vec{r}\cdot\vec{f}(\vec{r})$

V1m



für Weg γ: $\vec{r}(t) = \overbrace{t^3}^{x(t)}\,\vec{e}_x + \overbrace{2t}^{y(t)}\,\vec{e}_y\,,\quad t\in(-1,1)$ (1)

und Funktion $\vec{f}(\vec{r}) = \underbrace{y}_{f_x(\vec{r})}\,\vec{e}_x + \underbrace{(-x)}_{f_y(\vec{r})}\,\vec{e}_y$ (Windstrudel) (2)

Was heißt das explizit?

Wegparametrisierung: $\vec{r}:(-1,1)\to\mathbb{R}^2,\quad t\mapsto\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} t^3\\ 2t\end{pmatrix}$ (3)

Vektorwertige Funktion: $\vec{f}:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad \vec{r}\mapsto\vec{f}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} f_x(\vec{r})\\ f_y(\vec{r})\end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} y\\ -x\end{pmatrix}$ (4)

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix}3t^2\\ 2\end{pmatrix},\quad \vec{f}(\vec{r}(t)) \overset{(4)}{=} \begin{pmatrix} y(t)\\ -x(t)\end{pmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix}2t\\ -t^3\end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{f}(\vec{r}(t)) \overset{(3,5)}{=} \begin{pmatrix}3t^2\\ 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2t\\ -t^3\end{pmatrix} = 6t^3 - 2t^3 = 4t^3 \quad (6)$$

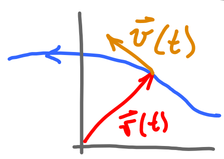
$$\int_\gamma d\vec{r}\cdot\vec{f}(\vec{r}) \overset{(\ell.6)}{=} \int_{-1}^{1} dt\ \dot{\vec{r}}\cdot\vec{F} = \int_{-1}^{1} dt\ 4t^3 = t^4\Big|_{-1}^{1} = 0 \quad (7)$$

Durch Windstrudel verrichtete Arbeit entlang ist $= 0$, denn Wind weht 'mal von vorne, mal von hinten'.

Arbeit entlang $\gamma'\cup\gamma''$ ist $\neq 0$

Zusammenfassung V1: Kurven

ZV1



'Kurve': $\gamma = \{\vec{r}(t)\mid t\in I\}$ wobei $\vec{r}:\ I=(0,\tau)\to\mathbb{R}^d,\quad t\mapsto\vec{r}(t)$

Ort entlang Kurve: $\vec{r}(t) = \vec{e}_j\, x^j(t)$

Kurvengeschwindigkeit: $\dot{\vec{r}}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{e}_j\,\dot{x}^j(t) = \vec{v}(t)$ liegt 'tangential' zur Kurve

Kurvenlänge: $L[\gamma] = \int_0^\tau dt\ \|\dot{\vec{r}}(t)\|$ unabhängig von Parametrisierung des Weges

Bogenlänge nach Zeit t: $s(t) \equiv \int_0^t du\ \|d_u\vec{r}(u)\|$

$\gamma = \vec{r}(0,\tau)$

Natürliche Parametrisierung durch Bogenlänge: $\vec{r}_L:(0,L(\gamma))\to\mathbb{R}^d,\quad s\mapsto\vec{r}_L(s)\equiv\vec{r}(t(s)),\quad \|d_s\vec{r}_L(s)\| = 1$

Für Vektorfeld:
(vektorwertige Funktion von $\vec{r}$) $\vec{f}:\ \gamma\to\mathbb{R}^d,\quad \vec{r}\mapsto\vec{f}(\vec{r})$

Linienintegral: $\int_\gamma d\vec{r}\cdot\vec{f} \equiv \int_0^\tau dt\ \dot{\vec{r}}\cdot\vec{f}$ unabhängig von Parametrisierung des Weges