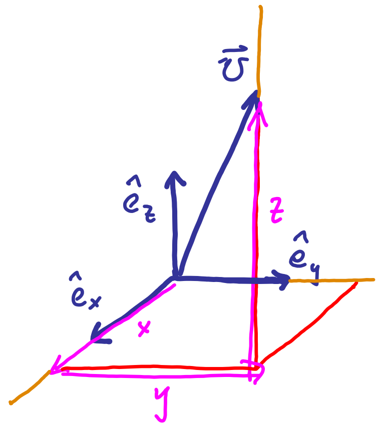
L3 Euklidische Geometrie: Längen, Winkel, senkrechte Vektoren...

L3.1a

(benötigt neue Struktur über Vektorraumaxiome hinaus)

Sei $\vec{v} = \hat{e}_x \, x + \hat{e}_y \, y + \hat{e}_z \, z$



Länge von $\vec{v}$ nach Pythagoras:

$$\text{Länge}^2 \equiv |\vec{v}|^2 = \underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{\text{quadratisch in Komponenten!}}$$

- Für $\mathbb{R}^n$: Skalarprodukt
- Mathematische Abstraktion: inneres Produkt
- Länge
- Winkel zwischen zwei Vektoren, Orthogonalität
- Orthonormalbasis (alle Basisvektoren sind normiert, und zueinander orthogonal)
- Inneres Produkt, Metrik, kovariante Notation

L3.1 Sklararprodukt in $\mathbb{R}^n$:

L3.1b

Def: Skalarprodukt ist eine Verknüpfung v. zwei Vektoren in $\mathbb{R}^n$ zu einer reellen Zahl:

Sei $\vec{v} = (v^1, \dots, v^n)^T = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$ $\quad \vec{w} = (w^1, \dots, w^n)^T = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$ (1)

Skalarprodukt:

$$\langle \, , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \overset{\text{Skalar}}{\mathbb{R}}, \quad (\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \equiv \sum_{ij} v^i \delta_{ij} w^j \qquad (2)$$

Notation verdeutlicht, dass diese Zahl von zwei Vektoren abhängt

Kronecker-delta Symbol: $\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ (3)

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v^1 w^1 + v^2 w^2 + \dots + v^n w^n = \vec{v} \cdot \vec{w} \qquad (4)$$

in Physik bevorzugte Notation

Beispiel (n=3):

$$\langle (1,2,0)^T, (3,-1,4)^T \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 = 1 \qquad (5)$$

Eigenschaften des Skalarprodukts: L3.1c

(i) Symmetrie: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ (1)

(ii) Linearität bzgl. Vektoraddition: $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (2)

(iii) Linearität bzgl. Skalarmultiplikation: $\langle a\vec{v}, \vec{w} \rangle = a \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (3)

(iv) Positiv definit: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0 \quad \forall\, \vec{v} \in V, \vec{v} \neq 0$ (4)

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$ (5)

'wenn, und nur wenn'

Eigenschaften (i) bis (iv) gelten offensichtlich:

(i) Symmetrie: per Konstruktion $\sum_i v^i w^i = \sum_i w^i v^i$ (1')

(ii) & (iii) Linearität: denn Skalarprodukt is linear in Komponenten v. $\vec{v}$ und $\vec{w}$

$\sum_i (u^i + v^i) w^i = \sum_i u^i w^i + \sum_i v^i w^i \quad , \quad \sum_i (a v^i) w^i = a \sum_i v^i w^i$ (2')

(iv) Positiv definit: denn $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \overset{(b.2)}{=} \sum_{i=1}^{n} (v^i)^2 \geq 0$ (6)

$\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit Skalarprodukt heißt 'Euklidischer Raum': $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle) = \mathbb{E}^n$ (7)

[derselbe Name wie für Vektorraum plus Ursprung ! Grund: sie sind isomorph!, siehe AD-L3.3]

L3.2 Norm, Orthogonalität

L3.2a

Definition: Norm [Länge] (Skalarprodukt zweier gleichen Vektoren)

$$\|\ \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{v} \longmapsto \|\vec{v}\| \equiv \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \quad (1)$$

$$= \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad (2)$$

Länge nach Pythagoras

$$\overset{(1b.2)}{=} \sqrt{v^1 v^1 + \ldots + v^n v^n} \equiv |\vec{v}| \quad (3)$$

alternative Notation für Norm in $\mathbb{R}^n$

Es gilt: $\|a\vec{v}\| \overset{(1c.3)}{=} \sqrt{a^2(v^1v^1 + \ldots + v^n v^n)} = |a| \|\vec{v}\|$ (4)

$|\ |$ = Betrag: $|a| = \begin{cases} +a & \text{falls } a > 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases} = a \cdot \underbrace{\mathrm{sgn}(a)}$ (5)

sign of a = Vorzeichen von a

Norm beantwortet die Frage: 'wie lang ist ein Vektor'?

Skalarprodukt beantwortet die Frage: 'wie parallel sind zwei Vektoren?'

Cauchy-Schwarz Ungleichung (CSU)

L3.2b

$$|\langle \vec v,\vec w\rangle| \le \|\vec v\|\,\|\vec w\| \qquad (1)$$

Beweis der CSU: Sei $\vec v,\ \vec w \neq \vec 0$ (ansonsten ist CSU trivial erfülllt)

Betrachte $0 \overset{(L3.1c4.5)}{\le} \langle \vec v - a\vec w,\ \vec v - a\vec w\rangle$ (2) mit $a \in \mathbb{R}$ (3)

$$\overset{(L3.1c2,3)}{=} \langle\vec v,\vec v\rangle \underbrace{- a\langle \vec v,\vec w\rangle - a\langle\vec w,\vec v\rangle}_{(1.c1):\ 2a\langle\vec v,\vec w\rangle} + a^2\langle\vec w,\vec w\rangle \qquad (4)$$

Wähle nun $a = \dfrac{\langle\vec v,\vec w\rangle}{\|\vec w\|^2}$ Skalare [denn diese Wahl führt zur gesuchten Ungleichung]

$$\overset{(3)}{=} \|\vec v\|^2 - 2\frac{\langle\vec v,\vec w\rangle}{\|\vec w\|^2}\langle\vec v,\vec w\rangle + \frac{\langle\vec v,\vec w\rangle^2}{\|\vec w\|^{\cancel{4}\,2}}\cancel{\|\vec w\|^2} \qquad (5)$$

$$0 \le \|\vec v\|^2 - \frac{\langle\vec v,\vec w\rangle^2}{\|\vec w\|^2} \qquad (6)$$

Umstellen:

$$\langle \vec v,\vec w\rangle^2 \le \|\vec v\|^2\,\|\vec w\|^2 \qquad (7) \qquad \sqrt{(7)} \Rightarrow \text{CSU} \checkmark$$

Geometrische Interpretation der CSU:

L3.2c

Für 'kolineare', d.h. 'parallele' Vektoren, $\vec w = \lambda \vec v$ gilt Gleichheitszeichen in CSU: (1)

Check: $|\langle\vec v,\vec w\rangle| = |\lambda\langle\vec v,\vec v\rangle| = |\lambda|\,\|\vec v\|^2 = \|\vec v\|\,\|\lambda\vec v\| = \|\vec v\|\,\|\vec w\|$ (2)

Umkehrschluss: $|\langle\vec v,\vec w\rangle| < \|\vec v\|\,\|\vec w\| \Rightarrow \vec v,\ \vec w$ sind nicht 'parallel'. (3)

Def: 'Winkel' zwischen Vektoren $\cos(\sphericalangle(\vec v,\vec w)) \equiv \dfrac{\langle\vec v,\vec w\rangle}{\|\vec v\|\,\|\vec w\|}$ (4) CSU (e.1) $\in [-1, +1]$ falls $\vec v = -\vec w,\ +\vec w$

$\sphericalangle(\vec v,\vec w) = \theta$

Begründung: einerseits gilt

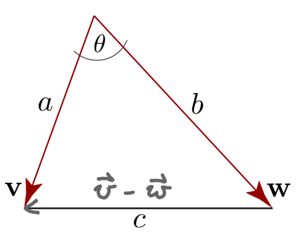
$$\overbrace{[\cancel{\langle\vec v,\vec v\rangle} + \cancel{\langle\vec w,\vec w\rangle} - \langle\vec v,\vec w\rangle - \langle\vec w,\vec v\rangle]}$$

$$\underbrace{\cancel{\langle\vec v,\vec v\rangle}}_{a^2} + \underbrace{\cancel{\langle\vec w,\vec w\rangle}}_{b^2} - \underbrace{\langle\vec v-\vec w,\ \vec v-\vec w\rangle}_{c^2} \overset{(1c.1)}{=} 2\langle\vec v,\vec w\rangle \qquad (5)$$

andrerseits gilt, aus geometrischer Anschauung in 2 Dimension:

$$\Longrightarrow\quad a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\theta \qquad (6)$$

'Cosinus-Satz'

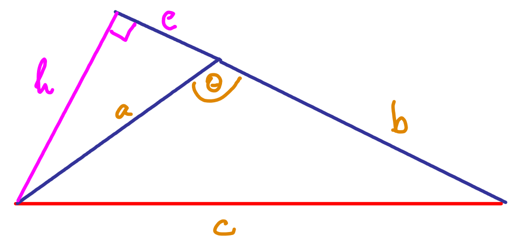


vergleiche (5), (6): $\langle\vec v,\vec w\rangle = ab\cos\theta = \|v\|\,\|w\|\cos\theta$ (7)

Geometrischer Beweis des Cosinus-Satz

L3.2d

$\theta > \pi/2$



$$\frac{e}{a} = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \qquad (1)$$

$$e = -a\cos\theta \qquad (2)$$

$$a^2 = h^2 + e^2 \qquad (3)$$

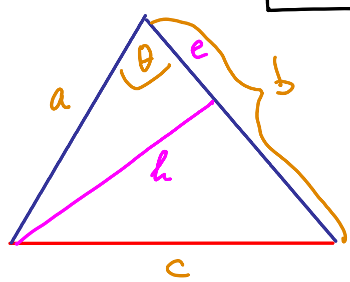
$$c^2 = h^2 + (e+b)^2 \qquad (4)$$

$$= h^2 + e^2 + 2eb + b^2 \qquad (5)$$

$$\stackrel{(3)}{=} a^2 + 2eb + b^2 \qquad (6)$$

$$\stackrel{(1)}{=} a^2 - 2ab\cos\theta + b^2 \qquad (7)$$

$\theta < \pi/2$



$$\frac{e}{a} = \cos\theta \qquad (1)$$

$$e = a\cos\theta \qquad (2)$$

$$a^2 = h^2 + e^2 \qquad (3)$$

$$c^2 = h^2 + (b-e)^2 \qquad (4)$$

$$= h^2 + b^2 - 2eb + e^2 \qquad (5)$$

$$\stackrel{(3)}{=} a^2 - 2eb + b^2 \qquad (6)$$

$$\stackrel{(1)}{=} a^2 - 2ab\cos\theta + b^2 \qquad (7)$$

Def. Einheitsvektor

(wir nutzen 'Hut' für Einheitsvektoren)

L3.2e

Für $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{w} \neq 0$ hat $\hat{w} \equiv \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$ Norm $\|\hat{w}\| = 1$ (1)

normiere einen Vektor' = 'bilde kolinearen Einheitsvektor', kolinear zu $\vec{w}$

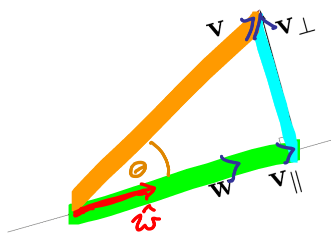
Falls $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ werden sie 'orthogonale Vektoren' genannt: $\vec{v} \perp \vec{w}$ (2)

$[\theta = \pi/2$ in (2d.1)$]$

Gegeben: zwei Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$,

Gesucht: 'Zerlegung' von $\vec{v}$ bezüglich $\vec{w}$: (3)

$$\vec{v} \stackrel{(5)}{=} \vec{v}_\parallel + \vec{v}_\perp \quad \text{mit} \quad \vec{v}_\parallel \parallel \vec{w}, \quad \vec{v}_\perp \perp \vec{w} \qquad (4)$$



'Projektion': $\vec{v}_\parallel = \hat{w}\, a$ (5)

a ist zu bestimmen

'Orthogonales Komplement': $\vec{v}_\perp \stackrel{(4)}{=} \vec{v} - \vec{v}_\parallel$ (6)

Forderung: $\vec{v}_\perp \perp \vec{w} \Rightarrow 0 \equiv \langle \hat{w}, \vec{v}_\perp \rangle \stackrel{(6)}{=} \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle - \overbrace{\langle \hat{w}, \hat{w} \rangle}^{(1):\ =1} a \Rightarrow a = \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle$ (7)

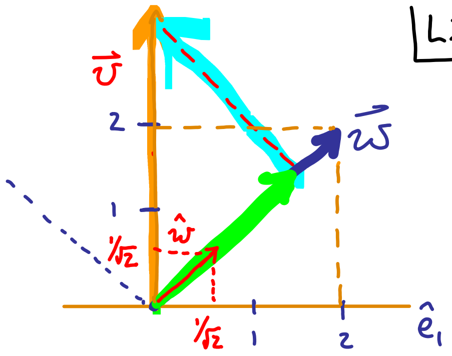
Projektion: $\vec{v}_\parallel \stackrel{(5,7)}{=} \hat{w} \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle \stackrel{(1)}{=} \hat{w} \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{w}\|} \stackrel{(1)}{=} \hat{w}\, \|\vec{v}\| \cos\theta$ (8)

[entspricht geometrischer Anschauung]

Orthogonales Komplement: $\vec{v}_\perp \stackrel{(6,8)}{=} \vec{v} - \hat{w} \langle \hat{w}, \vec{v} \rangle$ (9)

Beispiel (Selbststudium):

L3.2f



$$\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \qquad (1)$$

Aufgabe: Zerlege $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ (2)

Strategie: berechne zunächst $\|\vec{w}\|$, $\hat{w}$, $\langle \hat{w}, \vec{v}\rangle$:

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{(2)^2+(2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \qquad \hat{w} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$\langle \hat{w}, \vec{v}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad (4)$$

$$\vec{v}_{\parallel} \overset{(e.8)}{=} \langle \hat{w}, \vec{v}\rangle \hat{w} = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad ✓ \qquad \|\vec{v}_{\parallel}\| = \frac{3}{2}\sqrt{1+1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad (5)$$

$$\vec{v}_{\perp} \overset{(e.6)}{=} \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \quad ✓ \qquad \|\vec{v}_{\perp}\| = \frac{3}{2}\sqrt{1+1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad (6)$$

entspricht der Erwartung aus der Skizze !

Check: $$\|\vec{v}_{\parallel}\|^2 + \|\vec{v}_{\perp}\|^2 = \sqrt{9/2 + 9/2} = 3 = \|\vec{v}\|^2 \qquad (7)$$

Orthonormalbasis

L3.2g

Def: der Satz v. Vektoren $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$

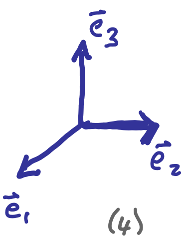
- ist 'orthogonal' falls $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ (1)
- ist 'orthonormal' falls (d.h. orthogonal und normiert) $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle = \delta_{ij} \overset{(L2.5h.4)}{=} \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ (2)
- bildet eine 'Orthonormalbasis' falls er orthonormal und vollständig ist.

Unsere Notationskonvention für Orthonormalbasis:
[manchmal auch ohne ']

$$\{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \dots, \vec{e}\,'_n\}, \quad \langle \vec{e}\,'_i, \vec{e}\,'_j\rangle = \delta_{ij} \qquad (3)$$

Kanonisches Beispiel: (L2.5h.2)

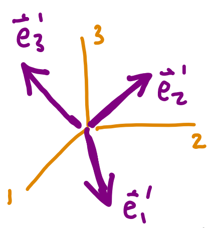
$$\vec{e}_1 = (1,0,0)^T$$
$$\vec{e}_2 = (0,1,0)^T$$
$$\vec{e}_3 = (0,0,1)^T$$



(4)

Jede rotierte Version von (4), z.B.:

$$\vec{e}\,'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$$
$$\vec{e}\,'_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T$$
$$\vec{e}\,'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^T$$



(5)

Berechnung der Komponenten bezüglich einer Orthonormalbasis

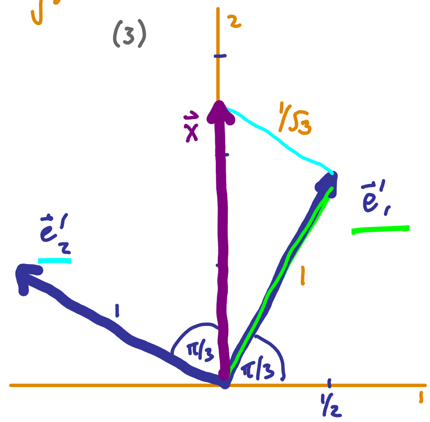
Gegeben eine Orthonormalbasis $\{\vec{e}'_i\}$ für $\mathbb{R}^n$, und ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Frage: wie lauten die Komponenten seiner Zerlegung nach dieser Basis: $\vec{x} = \vec{e}'_i x^i$? (1)

Strategie: 'projeziere' auf Basisvektoren: $\langle \vec{e}'_j, \vec{x} \rangle \overset{(1)}{=} \underbrace{\langle \vec{e}'_j, \vec{e}'_i \rangle}_{\delta_{ji}} x^i = x^j$ (2)

Zusammengefasst: $\vec{x} \overset{(1)}{=} \vec{e}'_i x^i \overset{(2)}{=} \sum_i \vec{e}'_i \langle \vec{e}'_i, \vec{x} \rangle$ (3)

[Indexstellung inkonsistent! Reparatur: siehe (3b.6)]



Beispiel: Betrachte eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$:

$\vec{e}'_1 = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})^T$, $\vec{e}'_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1)^T$, $\langle \vec{e}'_i, \vec{e}'_j \rangle_{\mathbb{R}^2} = \delta_{ij}$ (4)

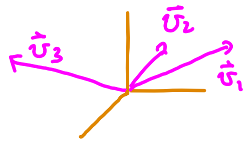
Finde die Komponenten von $\vec{x} = (0, \frac{2}{\sqrt{3}})^T = \vec{e}'_i x^i$ (5)
bezüglich dieser Basis!

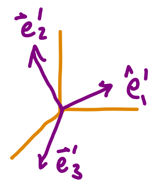
$$x^1 \overset{(5)}{=} \langle \vec{e}'_1, \vec{x} \rangle_{\mathbb{R}^2} = \left\langle \tfrac{1}{2}(1, \sqrt{3})^T, (0, 2/\sqrt{3})^T \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = \tfrac{1}{2} \cdot 0 + \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tfrac{2}{\sqrt{3}} = 1 \quad (6)$$

$$x^2 \overset{(5)}{=} \langle \vec{e}'_2, \vec{x} \rangle_{\mathbb{R}^2} = \left\langle \tfrac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1)^T, (0, \tfrac{2}{\sqrt{3}})^T \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \quad (7)$$

Gram-Schmidt-Verfahren

Gegeben einen Satz von Vektoren, $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$
linear unabhängig, aber nicht orthogonal, nicht normiert

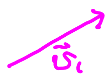




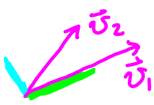
Konstruiere daraus eine orthonormalen Satz, $\{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$, $\langle \vec{e}'_i, \vec{e}'_j \rangle_V \overset{(9.3)}{=} \delta_{ij}$,
mit demselben Span: $\mathrm{span}\{\vec{e}'_j\} \equiv \mathrm{span}\{\vec{v}_j\}$ (1)

Strategie: orthogonalisiere, normalisiere, und wiederhole das iterativ:

$\vec{v}_{1,\perp} \equiv \vec{v}_1$, $\quad \vec{e}'_1 \equiv \dfrac{\vec{v}_{1,\perp}}{\|\vec{v}_{1,\perp}\|}$ (2)



$\vec{v}_{2,\perp} \overset{(e.9)}{\equiv} \vec{v}_2 - \overbrace{\vec{e}'_1 \langle \vec{e}'_1, \vec{v}_2 \rangle_V}^{\text{subtrahiere Anteil } \| \text{ zu } \vec{e}'_1}$, $\quad \vec{e}'_2 \equiv \dfrac{\vec{v}_{2,\perp}}{\|\vec{v}_{2,\perp}\|}$ $\quad (\perp \vec{e}'_1)$ (3)



$\vec{v}_{3,\perp} \overset{(e.9)}{\equiv} \vec{v}_3 - \vec{e}'_1 \langle \vec{e}'_1, \vec{v}_3 \rangle_V - \vec{e}'_2 \langle \vec{e}'_2, \vec{v}_3 \rangle_V$, $\quad \vec{e}'_3 \equiv \dfrac{\vec{v}_{3,\perp}}{\|\vec{v}_{3,\perp}\|}$ $\quad (\perp \vec{e}'_1, \perp \vec{e}'_2)$ (4)

$\vdots$

$\vec{v}_{n,\perp} \overset{(e.9)}{\equiv} \vec{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \vec{e}'_i \langle \vec{e}'_i, \vec{v}_n \rangle_V$. $\quad \vec{e}'_n \equiv \dfrac{\vec{v}_{n,\perp}}{\|\vec{v}_{n,\perp}\|}$ $\quad (\perp \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_{n-1})$ (5)

L3.3 Innere Produkträume (das werden Sie später brauchen) L3.3a

[Notation in L3.3: Hut auf $\hat{v}, \hat{w}$ bedeutet nicht Einheitsvektor, sondern Element v. allgemeinem Vektorraum V.]

Verallgemeinerung des Skalarprodukts für allgemeinen $\mathbb{R}$ - Vektorraum V ('reeller Vektorraum'):

'Inneres Produkt' ist eine bilineare Abbildung von zwei Vektoren auf eine Zahl, (1)

$$\langle\,,\rangle_V : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\hat{u}, \hat{v}) \longmapsto \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_V \quad \text{(Skalar)} \tag{2}$$

mit folgenden Eigenschaften [identisch zu Seite (L3.1c)]:

(i) Symmetrie: $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_V = \langle \hat{v}, \hat{u} \rangle_V$ (3)

(ii) Linearität bzgl. Vektoraddition: $\langle \hat{u} + \hat{v}, \hat{w} \rangle_V = \langle \hat{u}, \hat{w} \rangle_V + \langle \hat{v}, \hat{w} \rangle_V$ (4)

(iii) Linearität bzgl. Skalarmultiplikation: $\langle a\hat{u}, \hat{w} \rangle_V = a \langle \hat{u}, \hat{w} \rangle_V$ (5)

(iv) Positiv definit: $\langle \hat{v}, \hat{v} \rangle_V > 0 \quad \forall\, \hat{v} \in V, \hat{v} \neq 0$ (6)

$\langle \hat{v}, \hat{v} \rangle_V = 0 \iff \hat{v} = \hat{0}$ (7)

'wenn, und nur wenn'

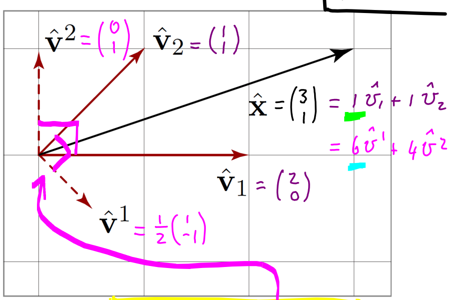
Vektorraum ausgestattet mit innerem Produkt, $(V, \langle\,,\rangle)$, heißt 'Euklidischer Vektorraum'.

[schon wieder derselbe Name wie vorhin! Grund: sie sind isomorph!, siehe AD-L3.3, Seite 47]

In Beispielen der folgenden Seiten: $V = E^2$, $\langle \hat{u}, \hat{w} \rangle_{E^2} \equiv \|\hat{u}\| \|\hat{w}\| \cos(\measuredangle(\hat{u}, \hat{w}))$ = geometrische Def. (8)

In Standardbasis, mit $\hat{u} = \hat{e}_i \tilde{u}^i \xrightarrow{\phi_{\hat{e}}} \begin{pmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 \end{pmatrix}$, $= \begin{pmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w}^1 \\ \tilde{w}^2 \end{pmatrix} = \tilde{u}^1 \tilde{w}^1 + \tilde{u}^2 \tilde{w}^2$ (9)

Nicht-orthonormale Basis L3.3b



Betrachte Basis $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n\}$ mit $\langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle_V \neq \delta_{ij}$ (1)

Jeder Vektor kann entwickelt werden als $\hat{x} = \hat{v}_i\, x^i$ (2)

aber (L3.2h.2) gilt nicht: $\langle \hat{v}_j, \hat{x} \rangle = \underbrace{\langle \hat{v}_j, \hat{v}_i \rangle}_{\neq \delta_{ji}} x^i \neq x^j$ (3)

denn mehr als ein Basisvektor hat $\hat{v}_i$ -Richtung!

Definiere eine zweite, 'duale Basis', $\{\hat{v}^1, \dots, \hat{v}^n\}$ mit Eigenschaft $\boxed{\langle \hat{v}^i, \hat{v}_j \rangle_V = \delta^i{}_j}$ (4)

(Wie findet man sie? Siehe L3.3d) Nur einer von ihnen hat Anteil in $\hat{v}_i$ -Richtung, nämlich $\hat{v}^i$!

Nomenklatur zur Unterscheidung: Index unten: 'kovariant', Index oben: 'kontravariant'

Jeder Vektor kann entwickelt werden als $\hat{x} = \hat{v}_i\, x^i = x_j\, \hat{v}^j$ (5)

'Basis: kovariant' 'duale Basis: kontravariant'

'Komponenten: kontravariant' 'duale Komponenten:

Rezept für Berechnung d. Komponenten:

kontravariant: $\langle \hat{v}^j, \hat{x} \rangle_V \overset{(5)}{=} \langle \hat{v}^j, \hat{v}_i \rangle_V x^i \overset{(4)}{=} \delta^j{}_i\, x^i = x^j$ (6) $\Rightarrow \hat{x} \overset{(5,6)}{=} \hat{v}_i \langle \hat{v}^i, \hat{x} \rangle_V$ (7)

kovariant: $\langle \hat{x}, \hat{v}_i \rangle \overset{(5)}{=} x_j \langle \hat{v}^j, \hat{v}_i \rangle \overset{(4)}{=} x_j\, \delta^j{}_i = x_i$ (8) $\Rightarrow \hat{x} \overset{(5,8)}{=} \langle \hat{x}, \hat{v}_j \rangle_V\, \hat{v}^j$ (9)

Verallgemeinerungen von (2h.3)

In Skizze, $V = E^2$: $x^1 \overset{(6)}{=} \langle \hat{v}^1, \hat{x} \rangle_{E^2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \underset{\text{nicht gleich!}}{\neq} x_1 \overset{(8)}{=} \langle \hat{v}_1, \hat{x} \rangle_{E^2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$

Metrik, inverse Metrik

L 3.3c

Gegeben (kovariante) Basis, wie findet man (kontravariante) duale Basis?
Berechne zunächst 'Metrik' und 'inverse Metrik' !

Definition: 'Metrik' g_{ij} : (innere Produkte aller kov. Basisvektoren)

$$i,j=1,\ldots,n: \quad \boxed{g_{ij} \equiv \langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle_V \overset{(a.3)}{=} g_{ji}} \quad \text{(symmetrisch)} \quad (1)$$

Metrik beschreibt 'Geometrie' der (kovarianten) Basis:

- Längen: $\|\hat{v}_i\| = \sqrt{\langle \hat{v}_i, \hat{v}_i \rangle_V} = \sqrt{g_{ii}}$ (2)
- Winkel: $\cos(\measuredangle(\hat{v}_i, \hat{v}_j)) = \dfrac{\langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle_V}{\|\hat{v}_i\| \|\hat{v}_j\|} = \dfrac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}$ (3)

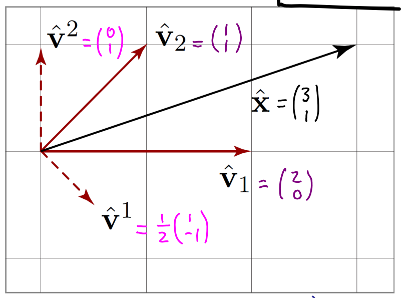
Definition: 'inverse Metrik' $g^{ij} = g^{ji}$ (symmetrisch) (4)

erfüllt $\boxed{g^{ik} g_{kj} = \delta^i{}_j \iff g_{jk} g^{ki} = \delta_j{}^i}$ (5)

(Wie findet man inverse Metrik? Vorlesung 13, L5: Matrixinvertierung)

4 Versionen des Kronecker-delta-Symbols:

$$\delta^{ij} \equiv \delta_i{}^j \equiv \delta^i{}_j \equiv \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (6)$$



$g_{11} = \langle \hat{v}_1, \hat{v}_1 \rangle = \binom{2}{0}\cdot\binom{2}{0} = 4$

$g_{12} = \langle \hat{v}_1, \hat{v}_2 \rangle = \binom{2}{0}\cdot\binom{1}{1} = 2$

$g_{21} = \langle \hat{v}_2, \hat{v}_1 \rangle = \binom{1}{1}\cdot\binom{2}{0} = 2$

$g_{22} = \langle \hat{v}_2, \hat{v}_2 \rangle = \binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1} = 2$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$g_{11} g^{11} + g_{12} g^{21} = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 1 = \delta_1{}^1$

$g_{11} g^{12} + g_{12} g^{22} = 4 \cdot (-\frac{1}{2}) + 2 \cdot 1 = 0 = \delta_1{}^2$

$g_{21} g^{11} + g_{22} g^{21} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 0 = \delta_2{}^1$

$g_{21} g^{12} + g_{22} g^{22} = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 2 \cdot 1 = 1 = \delta_2{}^2$

Bezug zwischen ko- und kontravarianten Basisvektoren / Komponenten

L 3.3d

$\{\hat{v}_j\}$ sei gegeben. Konstruktion von $\{\hat{v}^i\}$: $\boxed{\hat{v}^i \equiv g^{ij} \hat{v}_j}$ (1)

Check: erfüllt diese Konstruktion die Forderung (b.4) ? Ja! Denn

$$\langle \hat{v}^i, \hat{v}_j \rangle_V \overset{(1)}{=} g^{ik} \langle \hat{v}_k, \hat{v}_j \rangle_V \overset{(c.1)}{=} g^{ik} g_{kj} \overset{(c.5)}{=} \delta^i{}_j \overset{\checkmark}{=} (b.4) \quad (2)$$

Wie lautet Metrik der (kontravarianten) dualen Basis?

$$\langle \hat{v}^i, \hat{v}^j \rangle_V \overset{(1)}{=} g^{ik} \langle \hat{v}_k, \hat{v}^j \rangle \overset{(b4)}{=} g^{ik} \delta_k{}^j = g^{ij} \quad \text{inverse} \quad (3)$$

Umkehrung von (1): $g_{ji} \hat{v}^i \overset{(1)}{=} g_{ji} g^{ik} \hat{v}_k \overset{(c.5)}{=} \delta_j{}^k \hat{v}_k = \hat{v}_j$ (4)

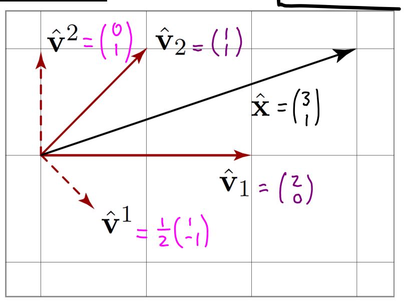
Analog für ko- und kontravar. Komponenten v. $\hat{x} \overset{(b.5)}{=} \hat{v}_j x^j = x_i \hat{v}^i$ (5)

Es gilt: $x_i \overset{(b.6)}{=} \langle \hat{v}_i, \hat{x} \rangle \overset{(5)}{=} \langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle x^j \overset{(c.1)}{=} g_{ij} x^j$ (6)

Umkehrung von (6): $g^{ji} x_i \overset{(6)}{=} g^{ji} g_{ik} x^k \overset{(c.1)}{=} \delta^j{}_k x^k = x^j$ (7)

Zusammengefasst:

$$\boxed{\begin{array}{llll} \hat{v}_j \overset{(3)}{=} g_{ji} \hat{v}^i = \hat{v}^i g_{ij} & (7) & x_i \overset{(6)}{=} g_{ij} x^j = x^j g_{ji} & (8) \\ \hat{v}^i \overset{(1)}{=} g^{ij} \hat{v}_j = \hat{v}_j g^{ji} & (9) & x^j \overset{(7)}{=} g^{ji} x_i = x_i g^{ij} & (10) \end{array}}$$



$\hat{v}^1 \overset{(1)}{=} g^{11} \hat{v}_1 + g^{12} \hat{v}_2 = \frac{1}{2}\binom{2}{0} - \frac{1}{2}\binom{1}{1} = \frac{1}{2}\binom{1}{-1}$

$\hat{v}^2 \overset{(1)}{=} g^{21} \hat{v}_1 + g^{22} \hat{v}_2 = -\frac{1}{2}\binom{2}{0} + 1 \cdot \binom{1}{1} = \binom{0}{1}$

$\hat{v}_1 \overset{(4)}{=} g_{11} \hat{v}^1 + g_{12} \hat{v}^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}\binom{1}{-1} + 2\binom{0}{1} = \binom{2}{0}$

$\hat{v}_2 \overset{(4)}{=} g_{21} \hat{v}^1 + g_{22} \hat{v}^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\binom{1}{-1} + 2\binom{0}{1} = \binom{1}{1}$

'g_{ij} zieht Index runter'

'g^{ij} zieht Index hoch'

Isomorphismus: $V \cong \mathbb{R}^n$

L3.3e

Entwicklung v. Vektoren in $\hat{V}$ $\overset{\phi_{\hat{v}}}{\Longleftrightarrow}$ Spaltenvektoren in $\mathbb{R}^n$:

$$\hat{x} = \hat{v}_i x^i \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x} = (x^1, \dots, x^n)^T, \qquad (1)$$

$$\hat{y} = \hat{v}_j y^j \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{y} = (y^1, \dots, y^n)^T \qquad (2)$$

Inneres Produkt in V: $\Longleftrightarrow$ Verallgemeinertes Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_V \overset{(1,2)}{=} x^i \underbrace{\langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle_V}_{\overset{(c.1)}{=} g_{ij}} y^j = x^i g_{ij} y^j \equiv \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad (3)$$

$$\overset{(d.8)}{=} x^i y_i \overset{(d.8)}{=} x_j y^j \qquad \text{'verstecke' Metrik durch Indexrunterziehen} \qquad (4)$$

Rechnungen in V können somit als Rechnungen in $\mathbb{R}^n$ ausgeführt werden. Grundlage für Numerik!

Metrik ist ' trivial' falls $\langle \hat{v}_i, \hat{v}_j \rangle_V = g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ Orthonormalbasis! (5)

Dann entspricht $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_V$
dem Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$: $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_V \overset{(3,5)}{=} x^i \delta_{ij} y^j = \sum_i x^i y^i =$ (1b.2) = (1b.4) (6)

Für Orthonormalbasis, mit $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g^{ij} \overset{(c.5)}{=} \delta^{ij}$, ist oben/unten Unterscheidung nicht nötig,

denn Basis und duale Basis sind identisch: $\hat{v}^i \overset{(d.9)}{=} \delta^{ij} \hat{v}_j = \hat{v}_i$ ✓ (7) $\quad x_i \overset{(d.8)}{=} \delta_{ij} x^j = x^i$ (8)

Kovariante Notation: allgemeine Anmerkungen

L3.3f

Kovariante Notation ist für viele Bereiche der Physik wichtig [Relativitätstheorie, Teilchenphysik, Quanteninformationstheorie...].

Sie ist auch hilfreich, die mathematische Struktur solcher physikalischen Theorien besser zu verstehen. Manche Objekte, die auf den ersten Blick 'Vektoren' zu sein scheinen, haben bei genauer Betrachtung eine kompliziertere mathematische Struktur: kovariante Notation bringt diese zum Vorschein. [Mehr dazu: siehe AD-Buch, Kapitel L10, insbesonder Abschnitt L10.2, 'Dual space', z.B. INFOs auf S. 152, 156.]

Für die meisten der Themen, die in einführenden Physiklehrbüchern behandelt werden, wird eine Orthonormalbasis benutzt. Dann ist kovariante Notation nicht essentiell. Folglich wird sie in solchen Lehrbüchern auch nicht benutzt. Allerdings wird ihre spätere Nutzung bei fortgeschrittenen Themen dann als Hürde empfunden.

Die Index-Philosophie der Rechenmethoden-Vorlesung ist 'radikale Rechtzeitigkeit':
je früher man kovariante Notation lernt, je besser! Folglich führen wir sie von Beginn an ein und nutzen sie durchwegs konsequent.

Wem das zu umständlich erscheint, kann, beim Rechnen bezüglich einer Orthonormalbasis, kovariante Notation getrotzt ignorieren: einfach alle Indizes unten schreiben! Allerdings verzichtet man dadurch auf das Verstehen mancher mathematischer Zusammenhänge, die später bei fortgeschrittenen Themen nützlich werden!

Zusammenfassung L3

ZL3a

Euklidische Vektorräume (V: reeller Vektorraum)

Inneres Produkt: $\langle\, , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, $(\vec u, \vec v) \mapsto \langle \vec u, \vec v \rangle$ Zahl

(i) Symmetrie, (ii-iii) Linearität bzgl. $+$ und $\cdot$ (iv) Positiv definit

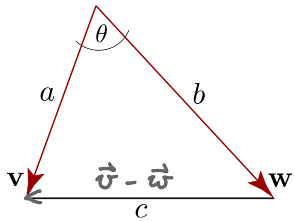
Wichtigstes Beispiel: Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \langle \vec u, \vec v \rangle \equiv v^i \delta_{ij} v^j = u^1 v^1 + \dots + u^n v^n = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i$$

Norm: $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$, $\vec v \mapsto \|\vec v\| \equiv \sqrt{\langle \vec v, \vec v \rangle}$

Cauchy-Schwarz Ungleichung (CSU): $|\langle \vec v, \vec w \rangle| \le \|\vec v\| \, \|\vec w\|$

Winkel: $\langle \vec v, \vec w \rangle \equiv \cos(\sphericalangle(\vec v, \vec w)) \, \|\vec v\| \, \|\vec w\|$

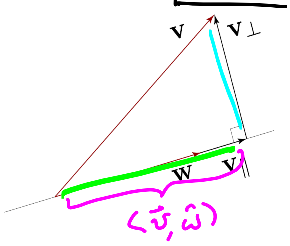


ZL3b

Einheitsvektor: $\hat w \equiv \frac{\vec w}{\|\vec w\|}$

'Projektion' v. $\vec v$ auf $\vec w$: $\vec v_\parallel \equiv \hat w \langle \hat w, \vec v \rangle \quad (\parallel \vec w)$

'Orthogonales Komplement' zu $\vec w$: $\vec v_\perp \equiv \vec v - \hat w \langle \hat w, \vec v \rangle \quad (\perp \vec w)$



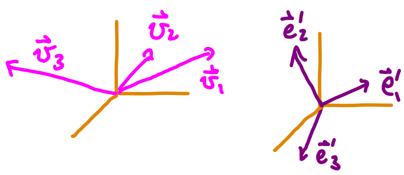
Orthonormalbasis: vollständig, normiert, orthogonal: $\{\vec e'_1, \dots, \vec e'_n\}$, $\langle \vec e'_i, \vec e'_j \rangle = \delta_{ij}$

Zerlegung nach Komponenten in Orthonormalbasis: $\vec x = \vec e_i x^i$, $x^i = \langle \vec e_i, \vec x \rangle$

Gram-Schmidt-Verfahren:

liefert orthonormale Vektoren mit demselben Span:

$\text{span}\{\vec e'_j\} \equiv \text{span}\{\vec v_j\}$



$\vec v_{1,\perp} \equiv \vec v_1$, $\qquad \vec e'_1 \equiv \frac{\vec v_{1,\perp}}{\|\vec v_{1,\perp}\|}$

$\vec v_{j,\perp} \equiv \vec v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \vec e'_i \langle \vec e'_i, \vec v_j \rangle_V$, $\qquad \vec e'_j \equiv \frac{\vec v_{j\perp}}{\|\vec v_{j\perp}\|}$

Kovariante Notation für nicht-orthonormale Basis

Index oben: kontravariant
Index unten: kovariant

ZL3c

Metrik einer Basis $\{\hat{v}_j\}$ von V: $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = g_{ij}$. Inverse Metrik erfüllt $g^{ik} g_{kj} \equiv \delta^i{}_j$

Kontravar. Basis: $\hat{v}^i \equiv g^{ij} \hat{v}_j$ ist orthonormal zur kovar. Basis: $\langle \hat{v}^i, \hat{v}_j \rangle = \delta^i{}_j$

Zerlegung nach Komponenten: $\hat{x} = \hat{v}_i \, x^i = \hat{v}_i \langle \hat{v}^i, \hat{x} \rangle_V$ — kovariante Basis, kontravariante Komponenten

$= x_j \, \hat{v}^j = \langle \hat{x}, \hat{v}_j \rangle_V \hat{v}^j$ — kontravariante Basis, kovariante Komponenten

$\hat{v}_j = g_{ji} \hat{v}^i = \hat{v}^i g_{ij}$, $\quad x_i = g_{ij} x^j = x^j g_{ji}$, $\quad g_{ij}$ zieht Index runter

$\hat{v}^i = g^{ij} \hat{v}_j = \hat{v}_j \, g^{ji}$, $\quad x^j = g^{ji} x_i = x_i \, g^{ij}$, $\quad g^{ij}$ zieht Index hoch

Inneres Produkt in V: $\Longleftrightarrow$ Verallgemeinertes Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_V = x^i g_{ij} \, y^j = x^i y_i = x_j \, y^j \equiv \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Für Orthonormalbasis, mit $g_{ij} = \delta_{ij}$, ist Unterscheidung zwischen Index oben/unten nicht nötig:

$x_i = \delta_{ij} x^j = x^i$, $\quad g^{ij} = \delta^{ij}$, $\quad \hat{v}^i = \delta^{ij} \hat{v}_j = \hat{v}_i$.

Deswegen: wenn möglich eine Orthonormalbasis wählen!