

Erläuterung der Seiten- und Gleichungsnummerierung:
 L: Teil "Lineare Algebra" in AD.
 L1: Kapitel L1, "Mathematics before Numbers", in AD
 a: erste Seite im handschriftlichen Skript zu Kapitel L1

Gleichungen die auf Seite L1a (Kapitel L1, Seite a) stehen, werden zitiert als
 (1), (2) falls die Zitate auf derselben Seite stehen;
 (a.1), (a.2) falls die Zitate auf anderen Seiten (z.B. b,c) desselben Kapitels L1 stehen;
 (L1a.1), (L1a.2) falls die Zitate auf Seiten anderer Kapitel (z.B. L2, C3) stehen.

L1a

L1 Mathematische Grundbegriffe

L1.1 Mengen und Abbildungen

Zwei Mengen:

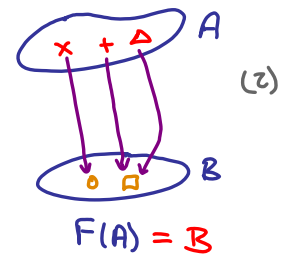
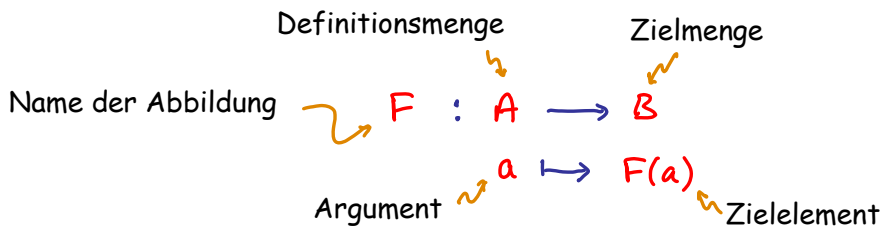
$$A = \{x, +, \Delta\} \quad B = \{o, \square\}$$

kartesisches Produkt:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} = \{(x, o), (x, \square), (+, o), (+, \square), (\Delta, o), (\Delta, \square)\} \quad (1)$$

'ist Element von'

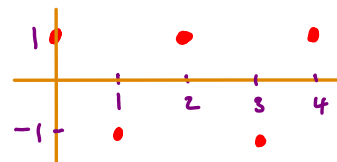
Abbildung:



Beispiel:

$$F : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{1, -1\}$$

$$n \mapsto F(n) = (-1)^n$$

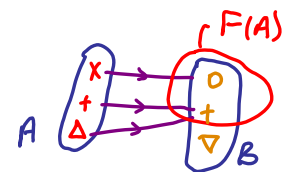


L1b

Bild v. A:

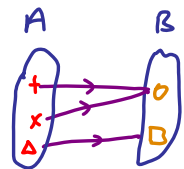
$$F(A) = \{F(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$

'ist eine Teilmenge von, oder ist gleich'

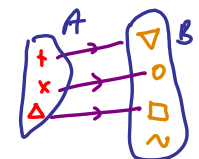


Eine Abbildung ist...

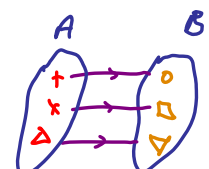
surjektiv falls $\forall b \in B$ gilt: $b = F(a)$ für mindestens ein $a \in A$
 'für alle' 'alle Elemente v. B werden erreicht'



injektiv falls $\forall b \in B$ gilt: $b = F(a)$ für höchstens ein $a \in A$
 'kein Element v. B wird mehr als einmal erreicht'



bijektiv falls $\forall b \in B$ gilt: $b = F(a)$ für genau ein $a \in A$
 (injektiv und surjektiv) '1-zu-1-Abbildung'



Verkettung / Komposition

Lic

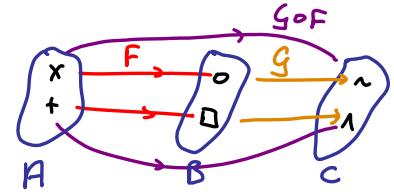
$$F : A \rightarrow B, \quad a \mapsto F(a)$$

$$g : B \rightarrow C, \quad b \mapsto g(b)$$

$$g \circ F : A \rightarrow C, \quad a \mapsto g(F(a))$$

Beispiel: $A, B, C = \mathbb{Z}$

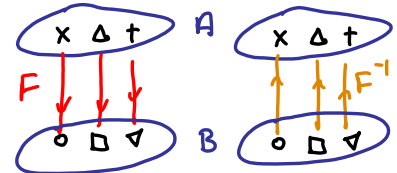
$$F(a) = a + 1, \quad g(b) = 2b, \quad (g \circ F)(a) = 2(a + 1)$$



Inverse einer bijektiven Abbildung:

$$F : A \rightarrow B, \quad a \mapsto F(a)$$

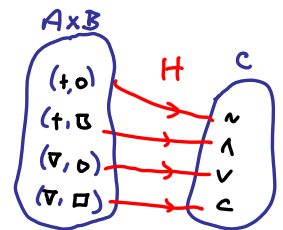
$$F^{-1} : B \rightarrow A, \quad F(a) \mapsto F^{-1}(F(a)) = a$$



Binäre Verknüpfung:
Definitionsmenge ist ein
kartesisches Produkt:

$$H : A \times B \rightarrow C$$

$$(a, b) \mapsto c = F(a, b)$$



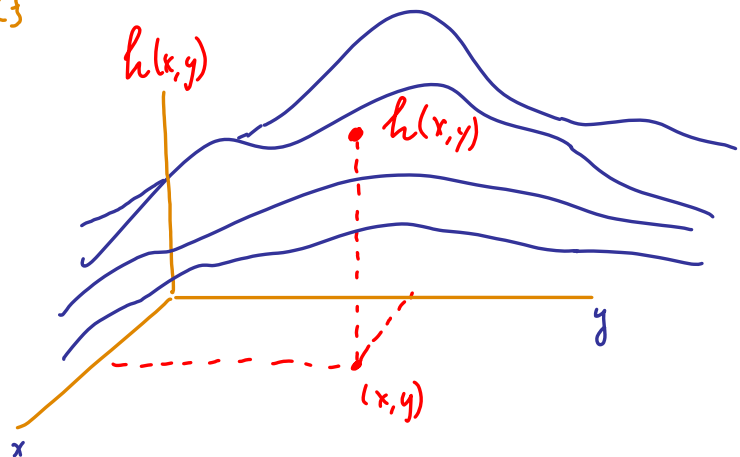
Beispiel einer binären Verknüpfung: Höhe eines Gebirges

Lid

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto h(x, y)$$



L1.2 Gruppe: (einfachste Struktur die 'Operationen' mit Elementen erlaubt)

L1e

Definition: Eine 'Gruppe' $G = (A, \bullet)$ ist eine Menge A ausgestattet mit einer binären Verknüpfung,
 $\bullet : A \times A \rightarrow A$ (1)
 $(a, b) \mapsto a \bullet b$ (2)

↑ kartesisches Produkt

und folgenden Eigenschaften ('Gruppenaxiome'):

i) Abgeschlossenheit: $\forall a, b \in A, a \bullet b \in A$ (3)
 ↑ 'für alle'

ii) Assoziativität: $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ (4)

iii) neutrales Element: $\exists e \in A, \text{ so dass } a \bullet e = e \bullet a = a, \forall a \in A$ (5)
 ↑ 'es existiert'

iv) inverses Element: $\forall a \in A \exists b \in A \text{ mit } a \bullet b = e = b \bullet a$ (6)

$a^{-1} \equiv b$

'links wird definiert durch rechts' (7)

Falls $a \bullet b = b \bullet a$ 'kommutative Gruppe', 'Abelsche Gruppe'

Falls $a \bullet b \neq b \bullet a$ 'nicht-kommutative Gruppe', 'nicht-Abelsche Gruppe' (8)

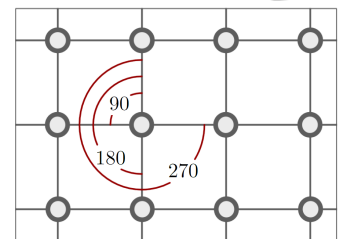
Beispiel 1: Rotationen eines Gitters um eine feste Achse um 0, 90, 180, 270 Grad

L1f

$\tau(\phi) \equiv$ Rotation um $\phi, \tau(\phi + 360) = \tau(\phi)$ (1)

$R_{90} \equiv \{ \tau(\phi) \mid \phi \in \{0, 90, 180, 270\} \}$ (2)

↑ 'linke Seite ist Kurznotation für rechte Seite, bzw. wird durch rechte Seite definiert'



Verknüpfung v. zwei Rotationen aus C sei die Rotation um die Summe der Winkel:

$\bullet : R_{90} \times R_{90} \rightarrow R_{90}$ (3)

z.B.: $(\tau(\phi), \tau(\phi')) \mapsto \tau(\phi) \bullet \tau(\phi') \equiv \tau(\phi + \phi')$ (4)

$\tau(0) \bullet \tau(90) = \tau(90)$ (5)

$\tau(90) \bullet \tau(180) = \tau(270)$ (6)

$\tau(270) \bullet \tau(180) = \tau(90)$ (7)

Verknüpfungstabelle:

\bullet	0	90	180	270
0	0	90	180	270
90	90	180	270	0
180	180	270	0	90
270	270	0	90	180

(bestimmt Gruppe vollständig)

(R_{90}, \bullet) ist eine kommutative Gruppe.

Neutrales element: $\tau(0)$ (Inverse von $\tau(\phi)$) = $\tau(360 - \phi)$

Beispiel 2: Addition ganzer Zahlen modulo q

L18

Definition: für $p, q \in \mathbb{Z}$ sei $p \bmod q \equiv$ positiver Rest v. (p geteilt durch q) (1)

Beispiele: $5 \bmod 4 = 1$ $9 \bmod 4 = 1$ (2)

$7 \bmod 4 = 3$ $-3 \bmod 4 = (-4+1) \bmod 4 = 1$ (3)

Definition: $\mathbb{Z}_q \equiv \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ (4)

Verknüpfung v. zwei Elementen v. \mathbb{Z}_q sei ihre Summe modulo q:

$\bullet: \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_q$ (5)

$(p, p') \mapsto p \bullet p' = (p+p') \bmod q$ (6)

z.B. für $q = 4$: $0 \bullet 1 = (0+1) \bmod 4 = 1$ (7)

$1 \bullet 2 = (1+2) \bmod 4 = 3$ (8)

$3 \bullet 2 = (3+2) \bmod 4 = 1$ (9)

Verknüpfungstabelle für $q = 4$:

\bullet	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

(bestimmt Gruppe vollständig)

(\mathbb{Z}_q, \bullet) ist eine kommutative Gruppe.

(10)

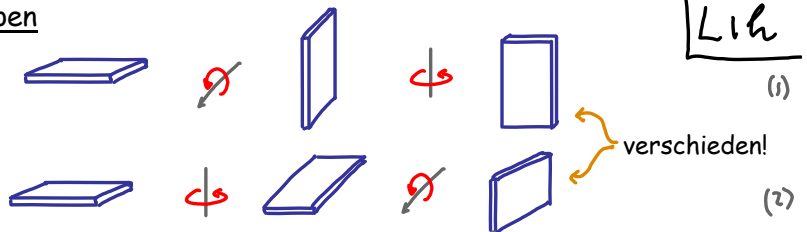
Ihre Verknüpfungstabelle hat dieselbe Struktur wie die von $(\mathbb{R}_{90}, \bullet)$

Folglich sind die beiden Gruppen 'isomorph': $(\mathbb{Z}_q, \bullet) \cong (\mathbb{R}_{90}, \bullet)$ [AD-Buch, S. 9-10]

Beispiele von nicht-kommutativen Gruppen

Rotationen in drei Dimensionen:

Rotationen um verschiedene Achsen sind nicht-kommutativ (Reihenfolge ist nicht egal):

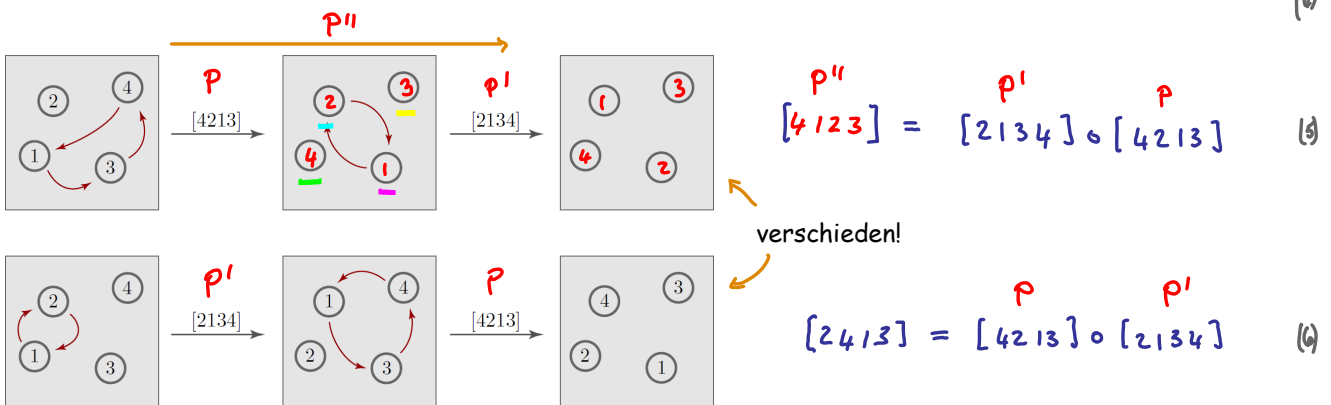


Permutationsgruppe z.B. von 4 unterscheidbaren (nummerierten) Objekten

Kurznotation:

Beispiel einer Permutation: 'Ersetze 1 durch 4, 2 durch 2, 3 durch 1, 4 durch 3': $[4 \underline{2} \underline{1} \underline{3}]$ (3)
 (Die Ersetzungsregel bezieht sich nur auf die Nummern der Kugeln; sie gilt, egal wo die Kugeln liegen!)

Permutationen bilden eine Gruppe, mit Verknüpfungsregel: $P'' = P' \circ P =$ erst P, dann P' (4)



L1.3 Körper

Li

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

Körper: $F = (A, +, \cdot)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation) (1)

- Addition: $(A, +)$ bildet eine kommutative Gruppe, mit neutralem Element = 0 . (2)

(additives Inverse v. a) $= -a$ Subtraktion: $a - b \equiv a + (-b)$ (3)

- Multiplikation: $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ bildet eine kommutative Gruppe, mit neutralem Element = 1 . (4)

Multiplik. Inverse v. $a = a^{-1}$ Division: $a/b \equiv a \cdot b^{-1}$ (5)

- Für das neutrale Element d. Addition, 0 gilt: $0 \cdot a \equiv 0 \quad \forall a \in A$ (6)

Also hat a kein multiplikatives Inverse ~~\neq~~ [sonst würde gelten: $0^{-1} \cdot 0 \cdot a = 0^{-1} \cdot 0$
 $\Rightarrow a = 1 \quad \forall a \in A$]

- Distributivitätsaxiom: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (7)

\mathbb{Z} (ausgestattet mit der üblichen Definition von Addition und Multiplikation ganzer Zahlen) ist kein Körper, denn Multiplikation hat kein Inverses in \mathbb{Z} (8)

Beispiele von Körpern:

Li

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} \equiv \{ q/p \mid q, p \in \mathbb{Z}, p \neq 0 \}$ (1)

Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \{ \text{alle Zahlen, die als Limes von 'Folgen von rationalen Zahlen' dargestellt werden können} \}$ (2)

z.B.: $\mathbb{Q} \not\ni \sqrt{2} = 1,4142\dots$

kann approximiert werden durch die Folge

$$\left\{ \begin{array}{l} 1,4 = \frac{14}{10} \in \mathbb{Q} \\ 1,41 = \frac{141}{100} \in \mathbb{Q} \\ 1,414 = \frac{1414}{1000} \in \mathbb{Q} \\ 1,4142 = \frac{14142}{10000} \in \mathbb{Q} \\ \vdots \end{array} \right. \quad (3)$$

$\mathbb{R} = \{ \text{alle Zahlen, die gebraucht werden, um eine Linie zu Parametrisieren} \}$



Komplexe Zahlen: \mathbb{C}

L1k

Ausgangsfrage: was sind die Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$? $x \notin \mathbb{R}$ (1)

Lösungsansatz: erweitere unser Zahlensystem um eine neue Zahl, die 'imaginäre Einheit', i .

Definiere i als eine Zahl, deren Quadrat -1 liefert: $i^2 \equiv -1$ (2a)

Dasselbe gilt für $-i$: $(-i)^2 = -1$ (2b)

$\pm i$ sind Wurzeln von -1. Notationskonvention: $i \equiv \sqrt{-1}$ ($\notin \mathbb{R}$) (3)

Wurzel von negativen Zahlen: Sei $r > 0$: $\sqrt{-r} \equiv \sqrt{-1} \sqrt{r} = i\sqrt{r}$ (4)

Menge aller komplexen Zahlen: $\mathbb{C} \equiv \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ (5)

jede kompl. Zahl wird dargestellt durch zwei reelle Zahlen: $\begin{cases} x \equiv \operatorname{Re}(z) = & \text{'Realteil v. } z' \end{cases}$ (6)

$\begin{cases} y \equiv \operatorname{Im}(z) = & \text{'Imaginärteil v. } z' \end{cases}$ (7)

Def. v. Addition: (analog den üblichen Regeln für einen Körper)

L1b

$$\underline{z + z'} = (x + iy) + (x' + iy') \equiv \underline{(x + x') + i(y + y')}$$
 (1)

Bsp: $(1 + 2i) + (2 - 3i) = 3 - i$

Def. v. Multiplikation: (analog den üblichen Regeln für einen Körper)

$$\underline{z z'} = (x + iy)(x' + iy') \equiv (xx' + xiy' + iyx' + \overset{(k.z.)}{i^2 yy'})$$
 (2)

$$= \underline{(xx' - yy') + i(xy' + x'y)}$$
 (3)

Bsp: $(1 + 2i)(2 - 3i) = (2 - (-6)) + i(-3 + 4) = 8 + i$

Neutrales Element der Addition: 0 Additives Inverse: $-z = -x - iy$ (4)

Neutrales Element der Multiplikation: 1 Falls $z \neq 0$, was ist das multiplikatives Inverse: $z^{-1} = ?$ (5)
Was sind $\operatorname{Re}(z^{-1})$, $\operatorname{Im}(z^{-1})$?

Definiere zunächst: 'komplex Konjugierte' von $z = x + iy$: $z^* \equiv \bar{z} \equiv x - iy$ Lim
(1)

dann:

$$\underline{z \bar{z}} \stackrel{(1)}{=} (x + iy)(x - iy) \stackrel{(0.3)}{=} (x \cdot x - y \cdot (-y)) + i(\cancel{x(-y)} + \cancel{yx}) = \underbrace{x^2 + y^2}_{\geq 0} \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$(2) \cdot \frac{1}{x^2 + y^2}: \quad z \cdot \bar{z} \underbrace{\frac{1}{x^2 + y^2}}_{\equiv z^{-1}} \stackrel{(2)}{=} 1 \quad (3)$$

$$\text{Inverse: } z^{-1} \stackrel{(3)}{\equiv} \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \quad \text{Re}(z^{-1}) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \text{Im}(z^{-1}) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad (4)$$

$$\text{Check: } z z^{-1} \stackrel{(4)}{=} (x + iy) \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \stackrel{(2)}{=} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1 \quad \checkmark \quad (5)$$

Merkregel für Inverse:

'mache den Nenner reell'!

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} \quad \checkmark \quad (6)$$

$$\text{Bsp: } z = 2 - 3i, \quad z^{-1} = \frac{1}{2 - 3i} \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{2 + 3i}{4 + 9} = \frac{1}{13} (2 + 3i) \quad (7)$$

Komplexe Ebene:

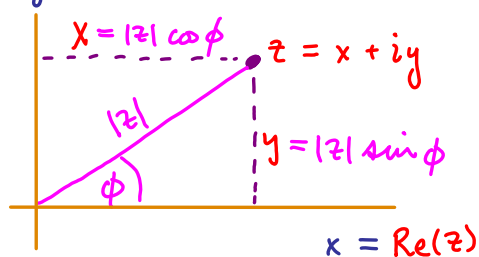
Lin

Identifikation einer komplexen Zahl mit 'geordnetem Paar' von zwei reellen Zahlen:

$$\mathbb{I}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

$$z \mapsto (x, y) = \text{Punkt in zwei-dimensionaler Ebene ('komplexe Ebene')} \quad (2)$$

$$iy = i \text{Im}(z)$$



Polardarstellung:

Betrag v. z (Abstand zum Ursprung):

$$\underline{|z| \equiv \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \bar{z}}} \quad (3)$$

$$z = x + iy \quad (4)$$

$$\underline{= |z| (\cos \phi + i \sin \phi)} \quad (5)$$

Reelle Achse: $z = x$ 'rein reell'

Imaginäre Achse: $z = iy$ 'rein imaginär'

Zusammenfassung: L1

L1

Gruppe: $G = (A, \cdot)$ Verknüpfung: $\cdot : A \times A \rightarrow A, (a, b) \mapsto a \cdot b$

(i) Abgeschlossenheit, (ii) Assoziativität, (iii) neutrales Element, (iv) inverses Element

Körper: $F = (A, +, \cdot)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation, beide liefern jeweils eine kommutative Gruppe)

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

Beispiele: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

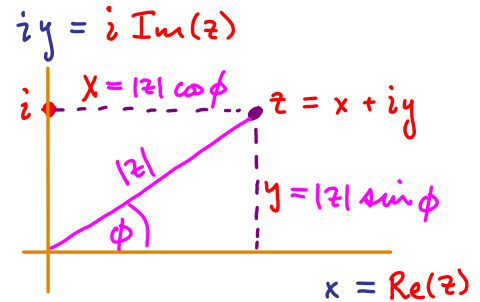
Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$i^2 = -1, i = \sqrt{-1}$

$z + z' = (x + x') + i(y + y')$

$z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

$z^* \equiv \bar{z} \equiv x - iy, z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

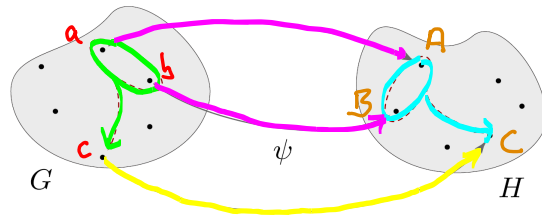


Optional: Homomorphismus

L10

(G, \cdot) und (H, \circ)
 $a \cdot b = c$ $A \circ B = C$

seien zwei Gruppen mit a priori unabhängigen Verknüpfungsregeln.



Def: Eine Abbildung $\psi : G \rightarrow H, a \mapsto \psi(a)$ (1)

ist ein 'Homomorphismus', falls $\psi(a \cdot b) = \psi(a) \circ \psi(b) \quad \forall a, b \in G$ (2)
 'bewahrt die Form'
verknüpfen, dann abbilden = abbilden, dann verknüpfen

Beispiel: $(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$, $(H, \circ) = (2\mathbb{Z}, +)$ (3)
 Addition ganzer Zahlen Addition gerader Zahlen

Die Abbildung $\psi : G \rightarrow H, n \mapsto \psi(n) = 2n$ ist ein Homomorphismus, (4)

denn $\psi(n+m) = 2(n+m)$ ist gleich $\psi(n) + \psi(m) = 2n + 2m = 2n + 2m$ (5)
verknüpfen, dann abbilden abbilden, dann verknüpfen

Die Abbildung $\phi : G \rightarrow H, n \mapsto \phi(n) = 2n^2$ ist kein Homomorphismus, (6)

denn $\phi(n+m) = 2(n+m)^2$ ist nicht gleich $\phi(n) + \phi(m) = 2n^2 + 2m^2 = 2n^2 + 2m^2$ (7)
verknüpfen, dann abbilden abbilden, dann verknüpfen

Optional: Isomorphismus

Def: Eine Abbildung $\psi: G \rightarrow H, a \mapsto \psi(a)$

LIP

(1)

'identische Form'
heisst ein 'Isomorphismus' zwischen den Gruppen G und H ist,
falls sie ein bijektiver Homomorphismus ist. Wir schreiben dann:

$$G \cong H$$

(2)

Isomorphe Gruppen sind praktisch 'identisch'.

$$(R_{90}, \circ) \cong (\mathbb{Z}_4, +)$$

Konkret: es existiert eine 1-zu-1 Zuordnung ihrer Elemente, die ihre Verknüpfungstabellen aufeinander abbildet (d.h. sie haben 'dieselbe' Verknüpfungstabelle, alle Eigenschaften der einen Gruppe gelten auch für die andere).

•	0	90	180	270
0	0	90	180	270
90	90	180	270	0
180	180	270	0	90
270	270	0	90	180

•	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Gruppentheorie: sehr wichtig in der Physik!

- Diskrete Translationen, Reflektionen (Kristallstrukturen)
- Translationen in Raum oder Zeit
- Rotationen (Quantenmechanische Theorie des Drehimpulses, Spin)
- Lorentz-Gruppe, Poincare-Gruppe (spezielle Relativitätstheorie)