

E3/E3p Thomas Udem LMU WS 22/23

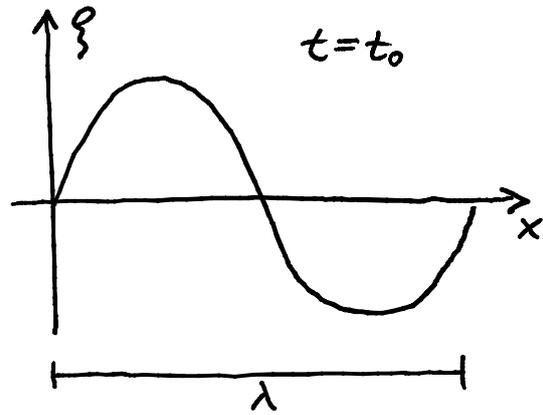
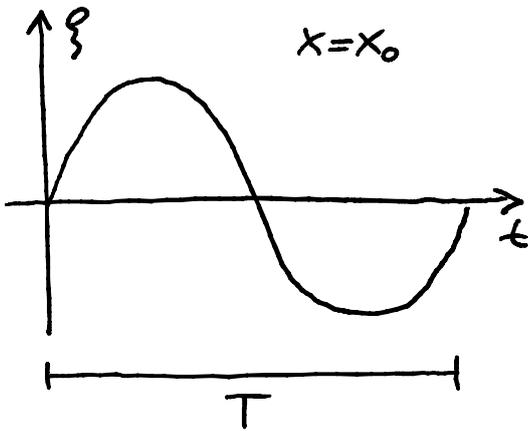
## Elektromagnetische Wellen und Optik

### Inhaltsangabe

1. Wellen
2. Elektromagnetische Wellen
3. Überlagerung von Wellen (Fourier)
4. Kohärenz
5. Licht-Materie Wechselwirkung
6. Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen
7. Wellenleiter
8. Streuung
9. Geometrische Optik
10. Aberrationen
11. Optische Instrumente
12. Beugung
13. Beugung an Blenden und Gitter
14. Räumliche Kohärenz
15. Interferenz an Schichtsystemen
16. Geometrische Optik als Näherung der Wellenoptik
17. Holographie
18. Laseroptik, Gauß'sche "Strahlen"
19. Polarisation und Doppelbrechung
20. Nichtlineare Optik
21. Quantenphänomene
22. Wärmestrahlung
23. Laser

# 1. Wellen

- Harmonische Schwingung:  $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \varphi)$
- Harmonische Welle:  $\varphi = \varphi_0 \sin(kx - \omega t)$



$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{Wellenzahl (Vektor)} = 2\pi \tilde{\nu} \quad [\tilde{\nu}] = \text{cm}^{-1}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{Kreis})\text{frequenz} = 2\pi \nu \quad [\nu] = \text{Hz}$$

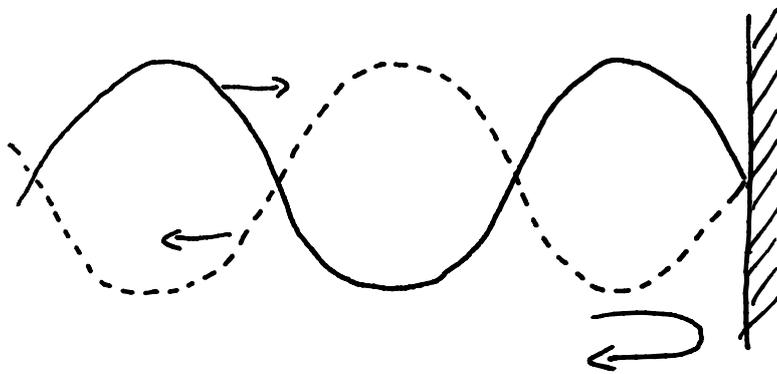
- Phasengeschwindigkeit: Geschwindigkeit mit der sich ein beliebiger Phasenwert  $\varphi_0$  bewegt:

$$\varphi_0 = kx_0 - \omega t \Rightarrow x_0 = \frac{\varphi_0 + \omega t}{k} \Rightarrow v_{\text{ph}} = \dot{x}_0 = \frac{\omega}{k}$$

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k}$$

Phasengeschwindigkeit

- Stehende Welle: Kohärente Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen



Reflexion am  
festen Ende

$$\varphi = \varphi_0 \sin(kx - \omega t) + \varphi_0 \sin(kx + \omega t)$$

$$= 2\varphi_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Amplitude hat "Knoten" und "Bäuche"

- Differentialgleichung der Wellenbewegung

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v_{ph}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}$$

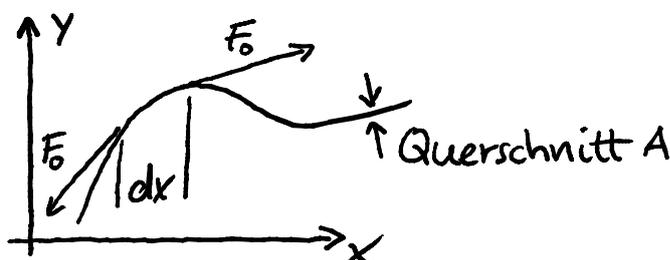
Wellengleichung  
d'Alembert Gleichung

Test:  $\varphi = \varphi_0 \sin(kx - \omega t)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\varphi_0 \omega^2 \sin(kx - \omega t) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -\varphi_0 k^2 \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{ph}^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

- Beispiele

(i) Seil: Kraft  $F_0$  tangential an jeder Stelle



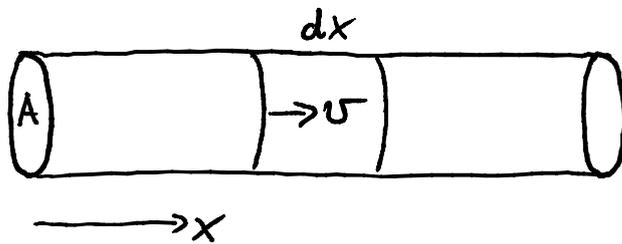
Kleine Winkel zwischen den Kräften:  $y'' dx$

$$F = ma \Rightarrow F_0 y'' dx = \rho A dx \ddot{y}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = \frac{\sigma}{\rho} y'' \quad \sigma = \frac{F_0}{A} \text{ Seilspannung}$$

Wellengleichung mit  $v_{ph} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$

(ii) Schallwelle (1 Dimensional)



$$v = v(x, t) \neq v_{ph}$$

$$p = p(x, t) \text{ Druck}$$

$$\dot{v} = \frac{F}{m} = - \frac{p' dx A}{A dx \rho} = - \frac{p'}{\rho} \quad (1)$$

außerdem  $dp = -\frac{1}{\alpha} \frac{dV}{V}$   $\alpha = \text{Kompressibilität}$   
für Flüssigkeit

$$\text{mit } \frac{dV}{V} = \frac{A v' dx dt}{A dx} = v' dt$$

$$\dot{p} = -\frac{1}{\alpha} v' \quad (2)$$

$$(1) \wedge (2): \frac{d}{dx} (\dot{v} = -\frac{p'}{\rho}) \wedge \frac{d}{dt} (\dot{p} = -\frac{1}{\alpha} v')$$

$\dot{v}'$  gleich setzen:

$$\Rightarrow \ddot{p} = \frac{1}{\alpha \rho} p'' \quad \text{Wellengleichung in } p$$

$$\Rightarrow v_{ph} = \sqrt{\frac{1}{\rho \kappa}}$$

Gase:  $\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$   $\gamma = \text{Adiabatenexponent}$

$$\Rightarrow v_{ph} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

kleine Druckänderungen

Festkörper:  $\frac{dF}{A} = E \frac{dV}{V}$   $E = \text{Elastizitätsmodul} = \frac{1}{\kappa}$

$$\Rightarrow v_{ph} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

longitudinal (Stahl 5,9 km/s)

$$\Rightarrow v_{ph} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

transversal (Stahl 3,2 km/s)

$\uparrow$   
G = Schermodul

(iii) Oberflächenwellen (ohne Ableitung)

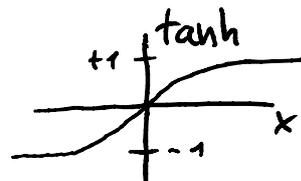
tiefes Wasser  $h \gg \lambda$

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

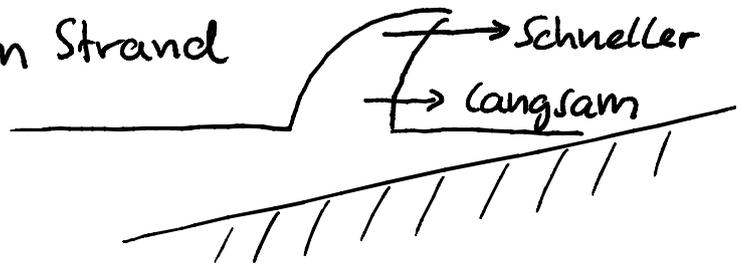
$v_{ph} = v_{ph}(\lambda)$  : Dispersion

beliebige Wassertiefe:

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{g \tanh(kh)}{k}}$$



⇒ Wellen brechen am Strand



- Allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v_{ph}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\varphi = f(x \pm v_{ph} t)$$

↑ irgendeine zweimal differenzierbare Funktion

$$\Rightarrow \ddot{f} = v_{ph}^2 f''$$

$$\varphi = a_1 f_1(x - v_{ph} t) + b_1 f_2(x + v_{ph} t)$$

$$+ a_2 f_2(x - v_{ph} t) + b_2 f_2(x + v_{ph} t)$$

+ ....

$a_1, b_1, \dots$  Konstanten

$$= A F(x - v_{ph} t) + B F(x + v_{ph} t)$$

$f_1, f_2, F, \dots$  Funktionen

Bestimmung von  $A, B, F$  aus

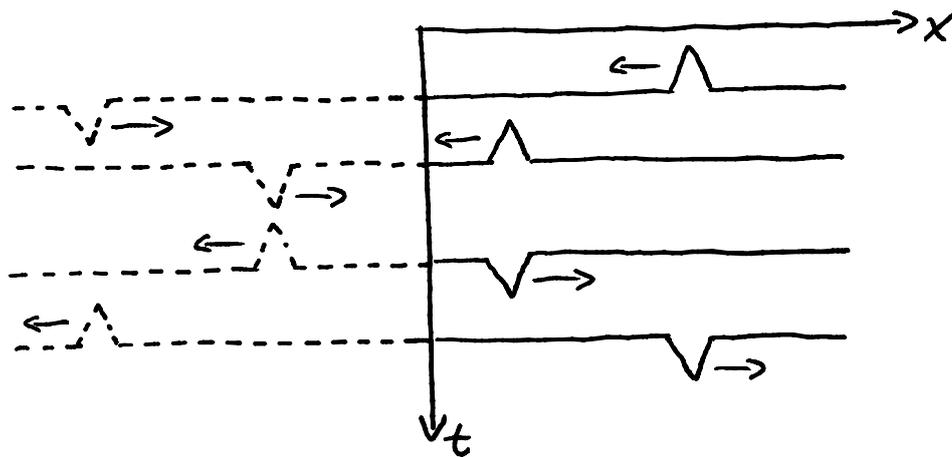
- Anfangsbedingung  $\varphi(t=0) = A F(x) + B F(x)$

- Randbedingung, z. B.  $\varphi(x=0) = 0$  für alle  $t$

## Beispiel: Reflexion eines Wellenpakets

mathematische Lösung

physikalische Lösung



Überlagerung von gegenläufigen Wellen

= Reflexion mit Vorzeichenwechsel

- beliebige Erregung  $F(x)$  propagiert
- Randbedingung durch  $\varphi = F(x - v_{ph}t) - F(x + v_{ph}t)$   
mit  $F(x) = F(-x)$
- Reflexion = "Phasenprung um  $\pi$ "

- Wellengleichung in 3 Dimensionen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{v_{ph}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Lösung:  $\varphi = f(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)$

Wellenzahlvektor  $\vec{k}$  mit  $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$   
zeigt in Ausbreitungsrichtung

⇒ "Richtungsabhängige Phasengeschwindigkeit"

$$\vec{F} \parallel \vec{k} \text{ wie gehabt } v_{ph} = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$$

$$\vec{F} \perp \vec{k} \text{ alle Punkte } \vec{r} \text{ in Phase } v_{ph} = \infty$$

aber:  $\frac{\omega}{|\vec{k}|}$  ist die Phasengeschwindigkeit

## 2. Elektromagnetische Wellen

Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \dot{\vec{D}} + \vec{j}(\vec{r})$$

keine freien Ladungen

keine freien Ströme

Medium:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \Delta \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = -\mu_0 \mu_r \vec{\nabla} \times \dot{\vec{H}} = -\mu_0 \mu_r \ddot{\vec{D}}$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ Laplace}$$

⇒

$$\Delta \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \ddot{\vec{E}}$$

3 dimensionale Wellengleichung

$$v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \equiv \frac{c}{n}$$

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Vakuum Lichtgeschwindigkeit

$$n \equiv \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

Brechungsindex

$$\epsilon_0 = 8,85 \dots 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 = 1,26 \dots 10^{-6} \text{ N/A}^2$$

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \quad \text{exakt!}$$

- Vakuum:  $\epsilon_r = \mu_r = 1 \Rightarrow n = 1$  Keine Dispersion

$$v_{\text{ph}} = c \quad \boxed{v = \frac{c}{\lambda} \quad \text{bzw.} \quad \omega = kc}$$

- Medium:  $n \neq 1$  andere Lichtgeschwindigkeit  
meist:  $n = n(\omega)$  Dispersion

- Komplexe Schreibweise

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}} = E_0 e^{i\omega t - ikx}$$

z.B.  $\vec{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Alle linearen Operationen durchführen und am Ende den Realteil verwenden.

- $|\vec{E}(\vec{r}, t)|^2$  gibt automatisch die zeitgemittelte

$$\text{Intensität an } I = \epsilon_0 n c |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 = \epsilon_0 n c E_0^2$$

$$\left( \text{aus Energiedichte } w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \right)$$

- Elektromagnetische Wellen im homogenen Medium sind transversal:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}} \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = -i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\vec{k} \times \vec{E} = -\mu_0 \mu_r \dot{\vec{H}} = -\dot{\vec{B}} = i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B}$$

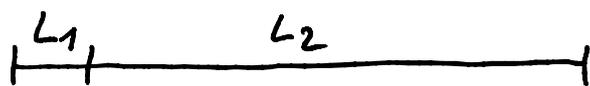
$\Rightarrow \vec{k}, \vec{E}$  und  $\vec{B}$  bilden ein rechtshändiges System

- "Messung" der Lichtgeschwindigkeit

(i) Luft (grob)

$$c = \frac{2L}{\text{Laufzeit}} = \frac{30\text{m}}{100\text{ns}} = 3,00 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(ii) Wasser mit Laserentfernungsmesser



$$\text{Anzeige} = \text{Länge} + \text{Gerätelänge} = L_2 + L_1 \quad \swarrow 1,42\text{m}$$

$$\text{Luft } L_{\text{Anz}} = 1,601\text{m} \quad \text{Wasser } L'_{\text{Anz}} = 2,088\text{m}$$

$$L'_{\text{Anz}} - L_{\text{Anz}} = L_2 (n-1) \quad (\text{Gerät misst Laufzeit})$$

$$n = \frac{L'_{\text{Anz}} - L_{\text{Anz}}}{L_2} + 1 = 1,35$$

Literaturwert 1,33

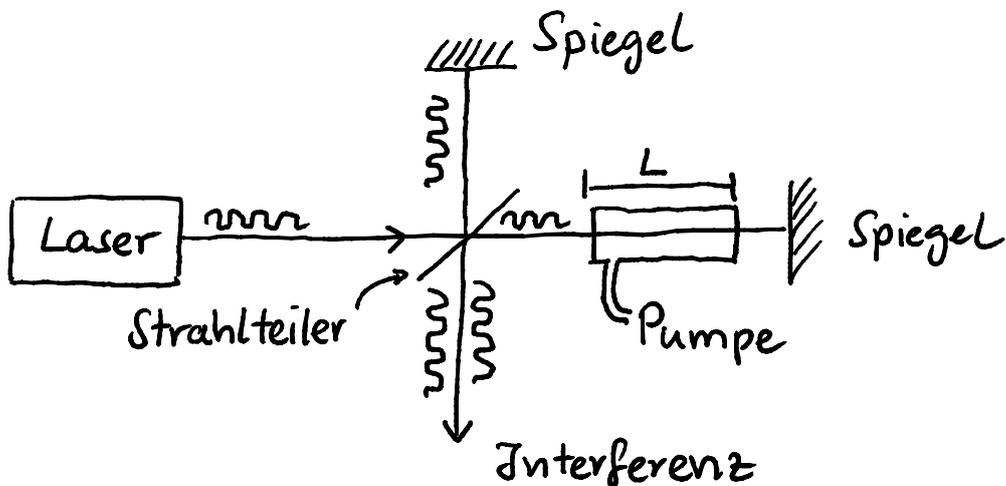
DC Messung z.B. mit Kondensator ergibt:

$$\epsilon_r = 80 \quad (\mu_r = 1) \quad (20^\circ\text{C})$$

$$\Rightarrow n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = 8,9 \quad \downarrow \quad \text{Dispersion } n(\omega=0) \neq n(\omega)$$

(iii) Luft (präzise)

Michelson Interferometer



$$\text{Luft einlassen: } c \rightarrow \frac{c}{n} \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow \nu = \frac{c}{n\lambda}$$

„ändert sich  $\lambda, \nu$  oder beides?“

$$\nu \text{ ändert sich nicht: } k = \frac{\omega}{c} \rightarrow k = \frac{\omega}{c} n$$

$$\text{Phasenverschiebung: } \Delta\varphi = 2k_{\text{Luft}} L - 2k_{\text{Vakuum}} L$$

$$= 2 \frac{\omega}{c} n L - 2 \frac{\omega}{c} L$$

$$= \frac{2\omega L}{c} (n-1)$$

$$\text{Zähler } \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{2\nu L}{c} (n-1) = \frac{2L}{\lambda} (n-1)$$

Vakuumwellenlänge  $\frac{c}{\nu}$

$$\Rightarrow n = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \frac{\lambda}{2L} + 1 = 1,000253$$

↖ 633nm  
↖ 25cm  
↖ 200

Literaturwert 1,00024

### 3. Überlagerung von Wellen

monochromatisches Licht → mehrere Frequenzen

$$E(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{-ik_m x + i\omega_m t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{i\omega_m t}$$

zunächst Beschränkung auf  $x=0$        $|a_m|^2 = \text{"Spektrum"}$

- Periodische Felder haben periodisches Spektrum:

$$\omega_m = m \Delta\omega \iff \text{Periode } T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

Beweis:  $E(t+T) = \sum_m a_m e^{i\omega_m(t+T)}$

$$= \sum_m a_m e^{im\Delta\omega t + im\Delta\omega \frac{2\pi}{\Delta\omega}}$$

$$= E(t)$$

-  $\omega_m = m \Delta\omega \Rightarrow$  Fourierreihe

- Bestimmung der Fourierkoeffizienten:

$$\text{Betrachte: } \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i(m-m')\Delta\omega t} dt = \frac{e^{i(m-m')\pi} - e^{-i(m-m')\pi}}{i(m-m')\Delta\omega}$$

↖  $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$

$$= \frac{2 \sin((m-m')\pi)}{(m-m')\Delta\omega} = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq m' \\ T & \text{für } m = m' \end{cases}$$

$$= T \delta_{m,m'}$$

$\int_{-T/2}^{+T/2} dt = T$

$$\Rightarrow E(t) = \sum_m a_m e^{im\Delta\omega t} \quad \times e^{-im'\Delta\omega t} \quad \text{und} \quad \int dt$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} E(t) e^{-im'\Delta\omega t} dt = \sum_m \int_{-T/2}^{+T/2} a_m e^{i(m-m')\Delta\omega t} dt$$

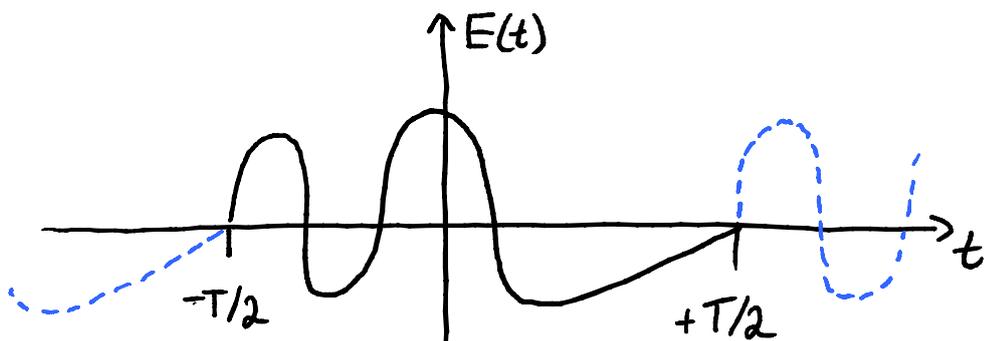
$$= T \sum_m a_m \delta_{m,m'}$$

$$= T a_{m'}$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} E(t) e^{-im\Delta\omega t} dt$$

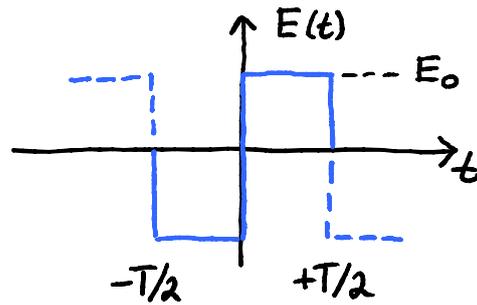
• Zeit wird "wegintegriert": Fourier/Frequenzraum

• Funktion  $E(t)$  nur innerhalb  $t \in [-T/2, +T/2]$   
wird außerhalb periodisch fortgesetzt:



• Ohne Beweis: Fourier Reihendarstellung ist vollständig.

-Beispiel:



$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} E(t) e^{-im \frac{2\pi}{T} t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} E(t) \left( \cos(-m \frac{2\pi}{T} t) + i \sin(-m \frac{2\pi}{T} t) \right) dt$$

gerade fkt

$$= -i \frac{(-E_0)}{T} \int_{-T/2}^0 \sin(m \frac{2\pi}{T} t) dt - i \frac{(+E_0)}{T} \int_0^{+T/2} \sin(m \frac{2\pi}{T} t) dt$$

$$= -i \frac{E_0}{2\pi m} \left[ \cos(0) - \cos(-m\pi) \right] + i \frac{E_0}{2\pi m} \left[ \cos(m\pi) - \cos(0) \right]$$

$$= -i \frac{2E_0}{2\pi m} \left[ \cos(0) - \cos(m\pi) \right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } m \text{ gerade} \\ -i \frac{2E_0}{\pi m} & \text{für } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{im \frac{2\pi}{T} t}$$

$\frac{1}{m} \cos(m\dots)$  gerade in m

$$= -i \frac{2E_0}{\pi} \sum_{\substack{m \\ \text{ungerade}}} \frac{1}{m} \left( \cos(m \frac{2\pi}{T} t) + i \sin(m \frac{2\pi}{T} t) \right)$$

$$= \frac{4E_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(m \frac{2\pi}{T} t\right)$$

ungerade

$$= \frac{4E_0}{\pi} \left( \frac{1}{1} \sin\left(1 \frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3 \frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5 \frac{2\pi}{T} t\right) + \dots \right)$$

$$= \frac{4E_0}{\pi} \left( \sin(\Delta\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\Delta\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\Delta\omega t) + \dots \right)$$

- Nichtperiodisches Signal  $T \rightarrow \infty$

$$E(t) = \sum_m a_m e^{im\Delta\omega t}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_m \int_{-T/2}^{+T/2} E(t') e^{-i2\pi \frac{m}{T} t'} dt' e^{i2\pi \frac{m}{T} t}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_m f\left(\frac{m}{T}\right) \frac{1}{T} = \int f(\nu) d\nu \quad \nu = \frac{m}{T}$$

$$\Rightarrow E(t) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t') e^{-i2\pi \nu t' + i2\pi \nu t} dt' d\nu$$

$$\omega = 2\pi \nu$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t') e^{-i\omega t'} dt' e^{i\omega t} d\omega$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t') e^{-i\omega t'} dt' e^{i\omega t} d\omega}_{\equiv \tilde{E}(\omega)}$$

⇒

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Fourier

Transformation

$$\tilde{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt$$

- Normierung und Vorzeichen der  $\omega$ 's Konvention
- Vollständig im Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen  $\int_{-\infty}^{+\infty} |E(t)|^2 dt = \text{endlich}$ .

mit  $\delta$ -Funktion:  $\delta(y-y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(y-y')x} dx$

im Raum der quadratisch integrierbaren  $f(y)$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-y') f(y) dy = f(y')$$

$$\Rightarrow E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \times e^{-i\omega' t} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega' t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i(\omega-\omega')t} dt d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) \delta(\omega-\omega') d\omega = \tilde{E}(\omega')$$

(wie oben)

- Eigenschaften der Fouriertransformation:

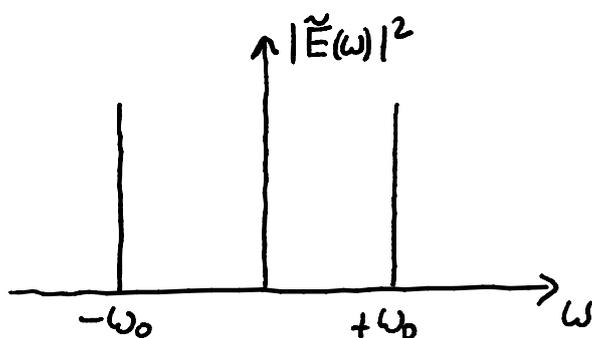
(i) Spektrum = spektrale Intensität

z.B. monochromatische Welle:

$$E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t) = \frac{E_0}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$$

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{E_0}{2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t'} dt' + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega_0)t'} dt' \right)$$

$$= \frac{E_0}{4\pi} (\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0))$$



Reelles Feld hat positive und "negative" Frequenzen.

(ii) Parseval Theorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E(t')|^2 dt' = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) \tilde{E}^*(\omega') e^{i\omega t' - i\omega' t'} dt' d\omega d\omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) \tilde{E}^*(\omega') \delta(\omega-\omega') d\omega d\omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\omega')|^2 d\omega' = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\nu)|^2 d\nu$$

man kann die Energie wahlweise im Zeit- oder Frequenzraum berechnen.

(iii) Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned} \text{F.T.} \{ E(t-\tau) \} &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t-\tau) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t') e^{-i\omega(t'+\tau)} dt' && t' = t - \tau \\ &= e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} E(t') e^{-i\omega t'} dt' \\ &= e^{-i\omega\tau} \text{F.T.} \{ E(t) \} \end{aligned}$$

Verschiebung im Zeitraum um  $\tau$

$\Leftrightarrow$  spektrale Phase  $e^{-i\omega\tau}$

(iv) Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [i\omega \tilde{E}(\omega)] e^{i\omega t} d\omega \\ &\quad \uparrow \text{F.T. der Ableitung} \end{aligned}$$

Ableiten im Zeitraum

$\Leftrightarrow \times i\omega$  im Fourierraum

(v) Integration analog:  $\times \frac{1}{i\omega}$

(vi) Faltungssatz:

$$\text{Faltung: } f(t) \otimes g(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \text{F.T. } \{ f(t) \otimes g(t) \} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) e^{-i\omega t} dt d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t') e^{-i\omega t'} e^{-i\omega \tau} dt' d\tau \\ &= \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) \end{aligned} \quad t' = t - \tau$$

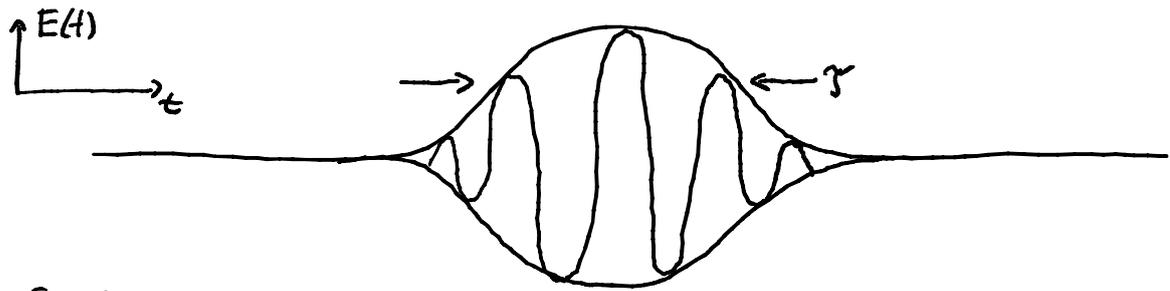
Faltung im Zeitraum = Produkt im Fourierraum  
(und umgekehrt)

- Anwendungen:

(i) Gauß'sches Wellenpaket

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\tau})^2 + i\omega_0 t}$$

$$\operatorname{Re}(E(t)) = E_0 e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\tau})^2} \cos(\omega_0 t)$$



• Spektrum:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= E_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\tau})^2 + i(\omega_0 - \omega)t} dt \\ &= \sqrt{2\pi} \tau E_0 e^{-\frac{1}{2} \tau^2 (\omega - \omega_0)^2} \end{aligned}$$

Gauß mit Breite  $\frac{1}{\tau}$  !

• volle Halbwertsbreite der Intensität FWHM:

$$e^{-x^2/\Delta x^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta t = 2\tau \sqrt{\ln(2)} \quad \Delta\omega = \frac{2}{\tau} \sqrt{\ln(2)}$$

• Bandbreitenprodukt:  $\tau \times \frac{1}{\tau} = 1$

Zeitraum  $\searrow$   $\swarrow$  Frequenzraum  
 $\tau \times \frac{1}{\tau} = 1$

$$\Delta t \Delta\omega = 4 \ln(2)$$

$$\Delta t \Delta\nu = \frac{4 \ln(2)}{2\pi} = 0,441\dots$$

inverse Breite im Fourierraum

(ii) Dispersion  $n = n(\omega)$

- Fouriertransformation
- jede Frequenz mit ihrer Geschwindigkeit laufen lassen
- Inverse Fouriertransformation

$$v_{ph} = \frac{c}{n(\omega)} = \frac{\omega}{k(\omega)}$$

$$\text{Taylor } k(\omega) = k(\omega_0) + \Omega \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} + \frac{1}{2} \Omega^2 \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} + \dots$$

$$\text{mit } \Omega \equiv \omega - \omega_0 \quad \omega_0 = \text{Trägerfrequenz}$$

$$= k_0 + \Omega k' + \frac{1}{2} \Omega^2 k'' + \dots$$

Propagation:

$$E(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t - ik(\omega)x} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{i\omega_0 t - ik_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega_0 + \Omega) e^{i\Omega(t - x k' - \frac{1}{2} x \Omega k'' + \dots)} d\Omega$$

Trägerwelle

Einhüllende

$\Rightarrow$  Phasengeschwindigkeit der Trägerwelle:

$$v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n(\omega_0)}$$

Betrachte zunächst "schwache Dispersion"

$$k' \neq 0 \quad \text{aber} \quad k'' = k''' \dots = 0$$

$$\Rightarrow \text{Einhüllende: } \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega_0 + \Omega) e^{i\Omega(t - xk')} d\Omega$$

$$\Rightarrow \text{Geschwindigkeit } v_{gr} = \frac{1}{k'}$$

$$\boxed{v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}} \quad \text{Gruppengeschwindigkeit}$$

$$\text{auch } \frac{1}{v_{gr}} = \frac{1}{v_{ph}} \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right)$$

$$\text{Gauß'sches Wellenpaket } E(t) = E_0 e^{-\frac{1}{2}(\epsilon/\delta)^2 + i\omega_0 t}$$

$k_0$ : Trägerwelle bewegt sich mit  $v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}$

$k'$ : Einhüllende bewegt sich mit  $v_{gr} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{\omega_0}$

$k^{(n)}$   $n > 1$ : verformen die Einhüllende

$$\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}_0 \sqrt{1 + \left( \frac{x k''}{\mathcal{I}_0^2} \right)^2} \quad \mathcal{I}_0 = \mathcal{I}(x=0)$$

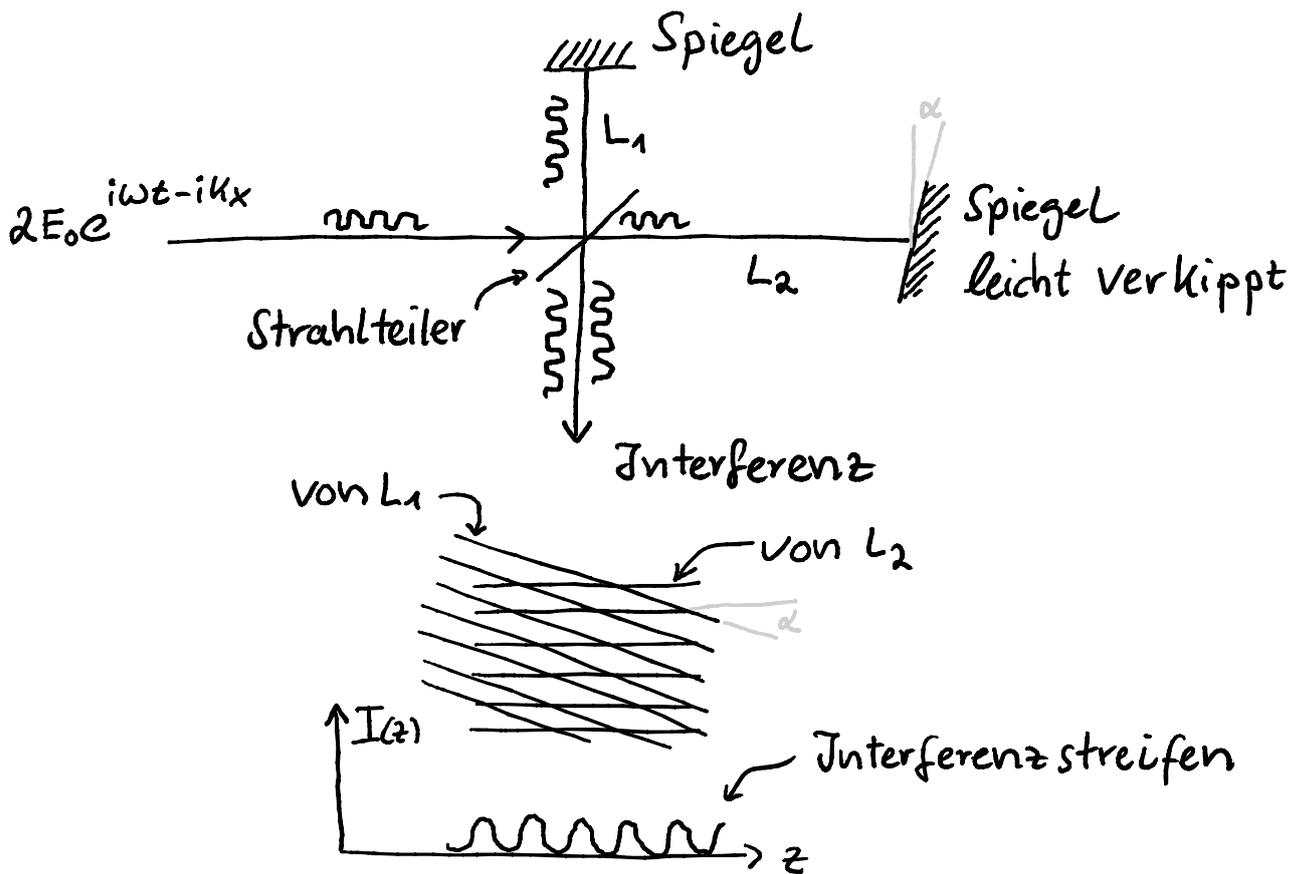
#### 4. Kohärenz

= Interferenzfähigkeit

- Inkohärenz bisher ignoriert (z.B. Laser)

- Wellen können interferieren, tun es aber nicht immer

# Michelson Interferometer



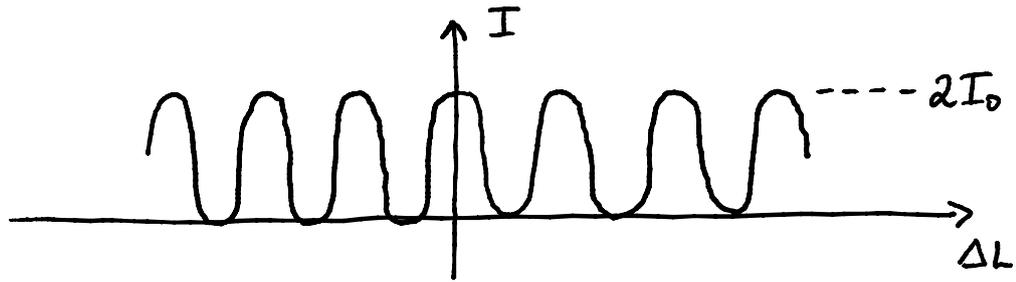
Feld am Ausgang, unverkippter Spiegel:

$$\begin{aligned}
 E &= E_0 (e^{i\omega t - ikL_1} + e^{i\omega t - ikL_2}) e^{-ikL} \quad \leftarrow \text{gemeinsamer Weg} \\
 &= E_0 (1 + e^{-ik\Delta L}) e^{-ik(L+L_1) + i\omega t} \quad \Delta L = L_2 - L_1
 \end{aligned}$$

Intensität am Ausgang (Auge, Film, Photodetektor, CCD...)

$$\begin{aligned}
 I &\sim |E|^2 = E E^* \\
 &= E_0^2 (1 + e^{-ik\Delta L}) (1 + e^{+ik\Delta L}) \\
 &= 2E_0^2 + 2E_0^2 \operatorname{Re}(e^{-ik\Delta L}) \\
 &= 2E_0^2 + 2E_0^2 \cos(k\Delta L)
 \end{aligned}$$

$$I = I_0 (1 + \cos(k\Delta L))$$



$$100\% \text{ Kontrast} \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad \text{für } -\infty < \Delta L < +\infty$$

- In Kohärenz durch fluktuierende Phase  $\varphi(t)$ :

viele Emittler, stoßende Atome, Doppler Effekt etc.

$$E = E_0 (e^{i\omega t - ikL_1} + e^{i\omega t - ikL_2}) e^{-ikL}$$

$$\rightarrow E_0 (e^{i\omega t - ikL_1 + i\varphi(t)} + e^{i\omega t - ikL_2 + i\varphi(t-\tau)}) e^{-ikL}$$

$$\tau = \frac{\Delta L}{c} \quad \text{Laufzeitunterschied}$$

$\varphi(t)$  = Zufallsvariable, nicht explizit bekannt

man kennt höchstens die spektrale Intensität

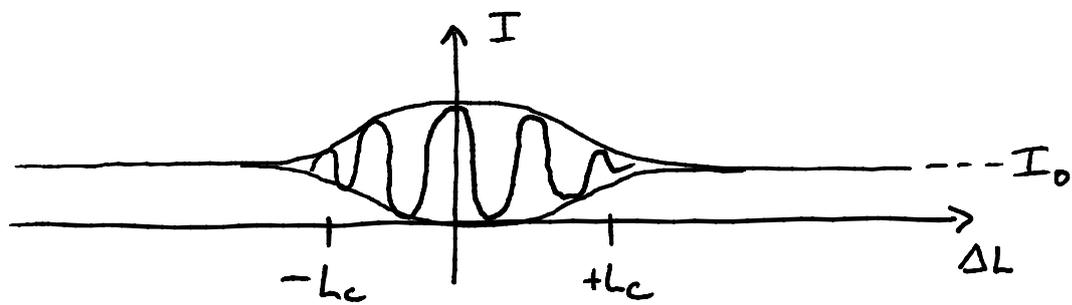
$$\Rightarrow I = I_0 (1 + \cos(k\Delta L + \varphi(t) - \varphi(t-\tau)))$$

Detektor mittelt über die Zeit:

$$\langle I \rangle = I_0 (1 + \langle \cos(k\Delta L + \varphi(t) - \varphi(t-\tau)) \rangle)$$

"großer" Laufzeitunterschied:

$$\varphi(t) \text{ und } \varphi(t-\tau) \text{ unkorreliert} \Rightarrow \langle \cos \rangle \rightarrow 0$$



für  $|\Delta L| \gg L_c$  verschwindet der Kontrast  
 Intensitäten addieren sich, nicht die Felder:  
 keine Interferenz.

Kohärenzlänge  $L_c$  (Zeit  $L_c = c \tau_c$ ) maximale  
 Weglängen (Laufzeit) Unterschied bei der  
 Licht aus gemeinsamer Quelle interferiert.

Beispiele:

- Glühbirne  $L_c \approx 4 \mu\text{m}$   $\Delta\lambda \approx 100 \text{ nm}$
- + Grünfilter  $L_c \approx 40 \mu\text{m}$   $\Delta\lambda \approx 6,5 \text{ nm}$
- bester Laser  $L_c \approx 10^8 \text{ m}$   $\Delta\lambda \approx 0$

- Autokorrelation des Feldes:

Interferenz

$$I \sim \langle |E(t) + E(t-\tau)|^2 \rangle \quad \text{mittlere Intensität}$$

$$= \langle |E(t)|^2 \rangle + \langle |E(t-\tau)|^2 \rangle + 2 \operatorname{Re}(\langle E(t) E^*(t-\tau) \rangle)$$

↖ gleich ↗

$$= 2 \langle |E(t)|^2 \rangle + 2 \operatorname{Re}(\langle E(t) E^*(t-\tau) \rangle)$$

↖ Summe der Intensitäten ↗  
↖ Interferenzterm ↗

Summe der Intensitäten

Feldautokorrelationsfunktion:

$$g_1(\tau) \equiv \frac{\langle E(t) E^*(t-\tau) \rangle}{\langle |E(t)|^2 \rangle} \sim \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} E(t) E^*(t-\tau) dt$$

↖  
Normierung bei  
∞ langen Signalen

= Faltung mit sich selbst

$$\text{mit } \tau = \frac{\Delta L}{c} \Rightarrow \omega \tau = \omega \frac{\Delta L}{c} = k \Delta L$$

$$g_1(\tau) \sim \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} \tilde{E}^*(\omega') e^{-i\omega'(t-\tau)} d\omega d\omega' dt$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) \tilde{E}^*(\omega') e^{\underbrace{i(\omega-\omega')t + i\omega'\tau}_{2\pi\delta(\omega-\omega')}} d\omega d\omega' dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) \tilde{E}^*(\omega') \delta(\omega-\omega') e^{i\omega'\tau} d\omega d\omega'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega$$

↖ inverse F.T.  $\omega \rightarrow \tau$

$\Rightarrow$  F.T.  $\left\{ \langle E(t) E^*(t-\tau) \rangle \right\}_{\tau \rightarrow \omega}$  = spektrale Intensität

(Wiener-Kinchine Theorem)

- Beispiel: Gauß'sches Spektrum

$$|\tilde{E}(\omega)|^2 \sim e^{-(\omega - \omega_0)^2 / \Delta\omega^2} \Rightarrow g_1(\tau) \sim e^{-\tau^2 / \tau_c^2} - i\omega_0 \tau$$

$$\text{mit } \tau_c = \frac{2}{\Delta\omega}$$

$$\Rightarrow \Delta\nu \tau_c = \begin{cases} \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \approx 1 \\ \frac{4 \ln(2)}{2\pi} = 0,441... \approx 1 \quad (\text{FWHM}) \end{cases}$$

Faustformel für alle gepeakte Spektren:

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau_c} \quad L_c = c \tau_c = \frac{c}{\Delta\nu}$$

• fluktuierende phase  $\dot{\varphi}(t) \neq 0$

$\Leftrightarrow$  spektrale Verbreiterung  $\frac{\partial}{\partial t} (\omega t - kx + \varphi(t)) = \omega + \dot{\varphi}(t)$

• Vergleich mit Messung:  $\approx 100 \text{ nm}$

Glühbirne  $\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda \approx 240 \text{ THz} \Rightarrow L_c = 2,5 \mu\text{m}$

+ Grünfilter  $\Delta\lambda \approx 6,5 \text{ nm} \Rightarrow L_c = 38 \mu\text{m}$

Na Lampe: Spektrum mit zwei Peaks!

## 5. Licht - Materie Wechselwirkung

(zurück zu den monochromatischen Wellen)

Ebene Wellen:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Laufende Welle im verlustfreien Medium:  $\vec{E}, \vec{B}$  in Phase

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Rightarrow -i\vec{k} \times \vec{E} = -i\omega \vec{B}$$

$$\vec{k} \perp \vec{E}, \vec{E} \perp \vec{B} \Rightarrow k |\vec{E}| = \omega |\vec{B}|$$

$$k = \frac{\omega n}{c} \Rightarrow \boxed{|\vec{B}| = \frac{n}{c} |\vec{E}|} \quad B = \text{relativistischer Effekt}$$

Energie und Impuls aus Poyntingvektor

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}$$

- Energieflußdichte = Intensität = Energie pro Fläche u. Zeit

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \epsilon_0 c^2 \langle |\vec{E} \times \vec{B}| \rangle = \epsilon_0 c n \langle |\vec{E}|^2 \rangle$$

$\uparrow$   
 $\vec{E} \perp \vec{B}$

Achtung: reelle / komplexe Felder

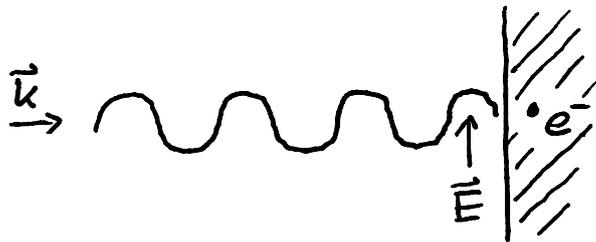
$$\text{reell: } E = E_0 \cos(\omega t - kx) \Rightarrow \langle |\vec{E}|^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2}$$

$$\text{Komplex: } E = E_0 e^{i\omega t - ikx} \Rightarrow \langle |\vec{E}|^2 \rangle = E_0^2$$

$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c n E_0^2 \quad \text{reelle Feld}$ $I = \epsilon_0 c n E_0^2 \quad \text{komplexes Feld}$
--

- Impulsdichte

betrachte absorbierte Welle:



Ladungen werden beschleunigt

Beschleunigung zunächst transversal  $\vec{E} \perp \vec{k}$

Leistung = Kraft  $\times$  Geschwindigkeit

$$L = q E v \quad q = \text{Ladung}$$

$v \neq 0 \Rightarrow$  Lorentzkraft longitudinal

$$F_L = q v |\vec{B}| = q v \frac{E}{c} = \frac{L}{c}$$

$v \ll c \Rightarrow qE \gg F_L$  (außer bei  $I \gtrsim 10^{18} \text{ W/cm}^2$ )

(Geschwindigkeit nur durch  $qE$ )

$$I = \frac{L}{A} \quad \text{Intensität} = \frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}}$$

$$P_s = \frac{F_L}{A} \quad \text{Druck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{L}{cA}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_s = \frac{I}{c}} \quad \begin{array}{l} \text{Strahlungsdruck} \\ \text{bei vollständiger Absorption} \end{array}$$

• Beispiele: Sonne  $I = \frac{1,4 \text{ kW}}{\text{m}^2} \Rightarrow P_s = 4,7 \frac{\mu\text{N}}{\text{m}^2}$

Taschenlampe  $I = \frac{2 \text{ W}}{\pi 5 \text{ cm}^2} \Rightarrow P_s = 850 \frac{\text{nN}}{\text{m}^2}$

• vollständige Reflexion:  $P_s = 2 \frac{I}{c}$

- Wechselwirkung mit Nichtleiter (Glas, Wasser, Luft...)

Wellengleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dot{\vec{E}} + \mu_0 \dot{\vec{P}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{mikroskopische} \\ \text{Beschreibung} \end{array}$$

zeitabhängige Dipoldichte  $\vec{P}$  ist Quelle

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \Delta \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} = \underbrace{-\mu_0 \epsilon_0 \ddot{\vec{E}}}_{=1/c^2} - \mu_0 \ddot{\vec{P}}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} = \mu_0 \ddot{\vec{P}} \quad \text{Wellengleichung mit Quellterm}$$

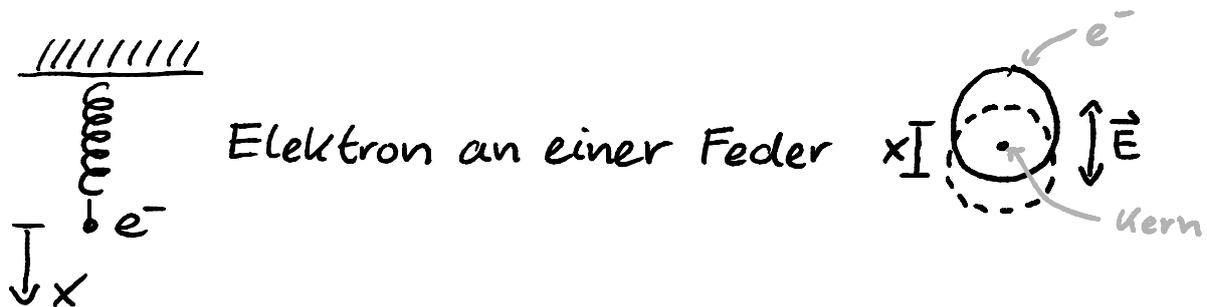
Polarisierbare Materialien:  $\vec{P} \sim \vec{E}$

Definiere  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$   $\chi = \text{Suszeptibilität}$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} = \frac{n^2}{c^2} \ddot{\vec{E}} \quad \boxed{n^2 = 1 + \chi} = \epsilon_r \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{makroskopische} \\ \text{Beschreibung} \end{array}$$

⇒ Polarisierbarkeit ändert lediglich die Phasengeschwindigkeit: Retardierung, Phasenverschiebung zwischen  $\vec{P}$  und  $\vec{E}$ .

- Berechnung der Suszeptibilität mit dem einfachsten Atommodell



erzwungene Schwingung im Feld  $E_0 e^{i\omega t}$

$$F = ma : -eE_0 e^{i\omega t} - m\omega_0^2 x - \gamma m \dot{x} = m \ddot{x}$$

$\uparrow$  Rückstellkraft       $\uparrow$  Dämpfung

phänomenologische Konstanten  $\omega_0, \gamma$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{e}{m} \frac{E_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

Dipoldichte = Dipolmoment  $\times$  Teilchendichte

$$P(t) = -x(t)e \times N$$

$$\Rightarrow P(t) = \underbrace{\frac{e^2 N}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}}_{= \epsilon_0 \chi = \epsilon_0 (n^2 - 1)} E(t)$$

$\chi$  ist komplex und frequenzabhängig

$$\chi = n^2 - 1 = (n_R + i n_I)^2 - 1 = n_R^2 - n_I^2 - 1 + 2i n_R n_I$$

$$\Rightarrow \chi_R = n_R^2 - n_I^2 - 1 \approx n_R^2 - 1 = (n_R + 1)(n_R - 1) \approx 2(n_R - 1)$$

$$\Rightarrow \chi_I = 2n_R n_I \approx 2n_I$$

Gas, Glas:  $n_R \approx 1, n_I \ll 1$

Brechungsindex

$$n_R = 1 + \frac{1}{2} \chi_R = 1 + \frac{e^2 N}{2 \epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}$$

$$n_I = \frac{1}{2} \chi_I = - \frac{e^2 N}{2 \epsilon_0 m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}$$

• oft auch  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = ((\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega))^2 \approx 4\omega^2 (\omega - \omega_0)^2$   
 $\underbrace{\omega_0 + \omega}_{\approx 2\omega}$

$$\Rightarrow \text{Lorentz} \sim \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (= \text{exaktes Ergebnis})$$

•  $k = \frac{\omega}{c} \rightarrow \boxed{k = n \frac{\omega}{c}}$

• monochromatische Welle:

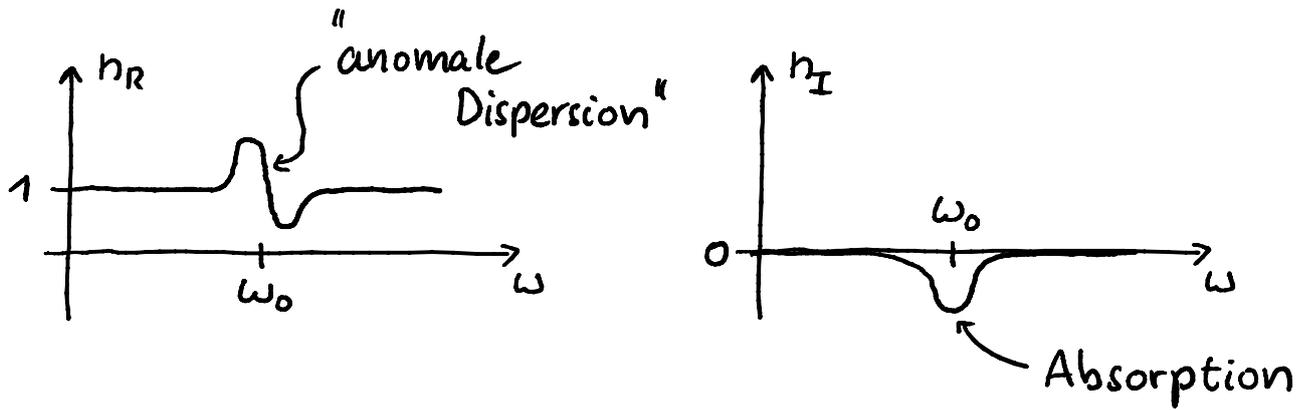
$$E(x, t) = E_0 e^{i\omega t - ikx} = E_0 e^{i\omega t - i \frac{\omega n}{c} x}$$

$$= E_0 e^{-\frac{1}{2} \alpha x + i\omega t - i \frac{\omega n_R}{c} x}$$

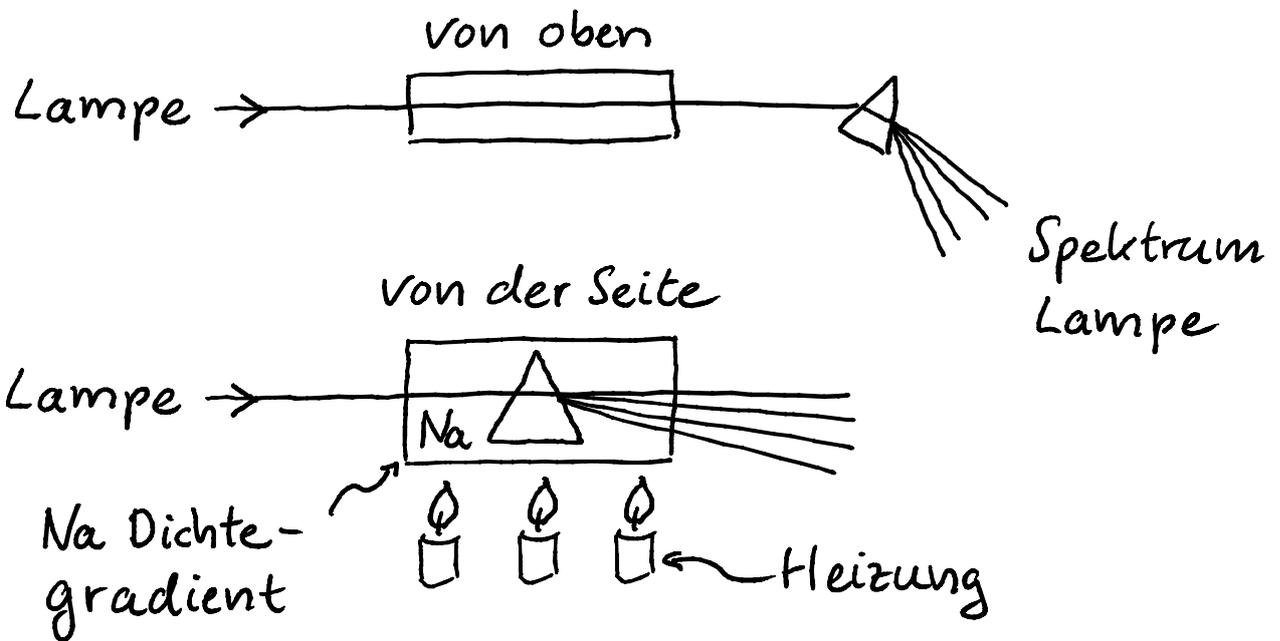
positiv ← negativ  
mit  $\alpha = -\frac{\omega}{c} \chi_I$

$$\Rightarrow \boxed{I = I_0 e^{-\alpha x}} \quad \text{Lambert-Beer}$$

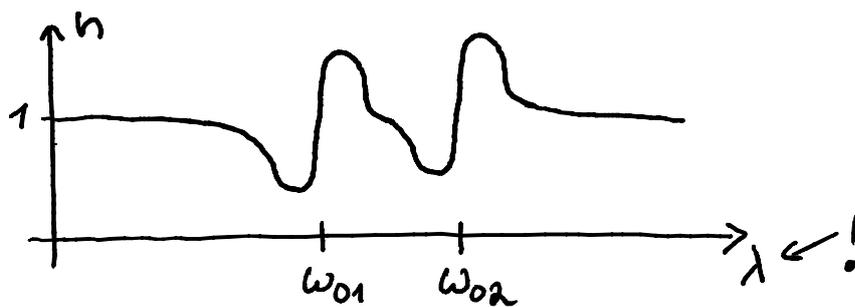
• graph



Dispersion mit Natrium Gasprisma



Natrium D Linien:



• Normale Dispersion:  $\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0$  ( $\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0$ )

überall, außer in der Nähe einer Resonanz

blaues Licht wird stärker gebrochen (siehe später)

• Anomale Dispersion:  $\frac{\partial n}{\partial \lambda} > 0$  ( $\frac{\partial n}{\partial \omega} < 0$ )

nur bei starker Absorption

- Lambert-Beer oft auch so:

•  $I(x) = I_0 e^{-\sigma N x}$   $N = \text{Teilchendichte } [\text{m}^{-3}]$

$\sigma = \text{Wirkungsquerschnitt } [\text{m}^2]$

Absorption  $\rightarrow$  Teilchendichte

•  $I(x) = I_0 10^{-\alpha \beta x}$   $[\beta] = \frac{\text{dB}}{\text{km}}$

beste Glasfasern:  $\beta < 0,2 \text{ dB/km}$

- In der Praxis hat man mehrere Resonanzen und interessiert sich für den Bereich dazwischen:

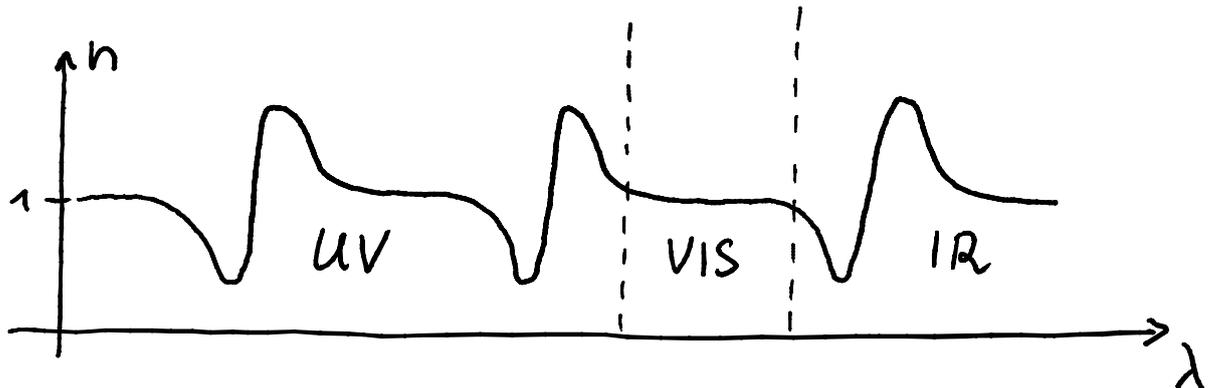
$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \gg (\gamma \omega)^2 \Rightarrow n_R^2 = 1 + \sum_j \frac{\rho_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2}$$

$\rho_j$  und  $\omega_{0j}$  phänomenologische Konstanten

meist in der Form von Sellmeier:

$$n^2(\lambda) = A + \sum_{j=1}^N \frac{B_j \lambda^2}{\lambda^2 - C_j}$$

Konstanten  $A$ ,  $B_j$  und  $C_j$  aus Messung (Fit)



Sellmeier im Sichtbaren (VIS)  $\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0$

- Brechungsindex von Metallen und Plasma

gebundene Elektronen:  $\omega_0 \neq 0$

freie Elektronen:  $\omega_0 = 0$ ; "Wenig Reibung"  $\gamma = 0$

$$\chi = n^2 - 1 = \frac{e^2 N}{m \epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega} \approx -\frac{e^2 N}{m \epsilon_0 \omega^2}$$

$$\Rightarrow n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{mit} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{m \epsilon_0}} \quad \text{Plasmafrequenz}$$

## Bedeutung der Plasmafrequenz:

$$\rho = e(N_+ - N) \quad N_+ = \text{Ionen, raumfest}$$

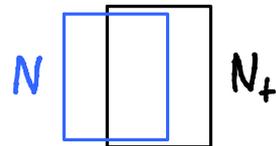
$$\text{Maxwell: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\text{Stromdichte: } \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -eN\dot{\vec{v}} = e^2 N \vec{E} / m$$

$$\text{Kontinuität: } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\dot{\rho} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\ddot{\rho}$$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} = -\omega_p^2 \rho$$

Dichteschwingung



$$\text{Brechungsindex: } n = \pm \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

- rein imaginär für  $\omega < \omega_p$ ; reell für  $\omega > \omega_p$
- Vorzeichen: raten, Wellengleichung nur  $n^2$
- Alle vier Möglichkeiten physikalisch erlaubt

- "nicht exotisch" sind nur:

$$\omega < \omega_p \text{ und "-" } \Rightarrow n_I < 0 \quad \alpha = -\frac{4\pi}{\lambda} n_I > 0$$

$$\omega > \omega_p \text{ und "+" } \Rightarrow n_R > 0$$

## - Beispiele

- Plasma in Leuchtstoffröhre

$$\text{aus Strom } N = 5 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3} \Rightarrow \omega_p = 2\pi \times 6,3 \text{ GHz}$$

- Silber

$$\text{aus Dichte } N = 6 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3} \Rightarrow \omega_p = 2\pi \times 2,2 \times 10^{15} \text{ Hz}$$
$$\stackrel{\wedge}{=} \lambda_p = 135 \text{ nm}$$

$\Rightarrow$  sichtbares Licht wird reflektiert ( $> 97\%$ )

$$n_I = \text{Im} \left( -\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right) = -\text{Im} \left( i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \right) = -3,53$$

$$e^{-ikx} = e^{-i \frac{n\omega}{c} x} = e^{\frac{n_I \omega}{c} x} = e^{\frac{2\pi n_I}{\lambda} x} = e^{-\frac{\alpha}{2} x}$$

$\uparrow$   
 $n_R = 0$

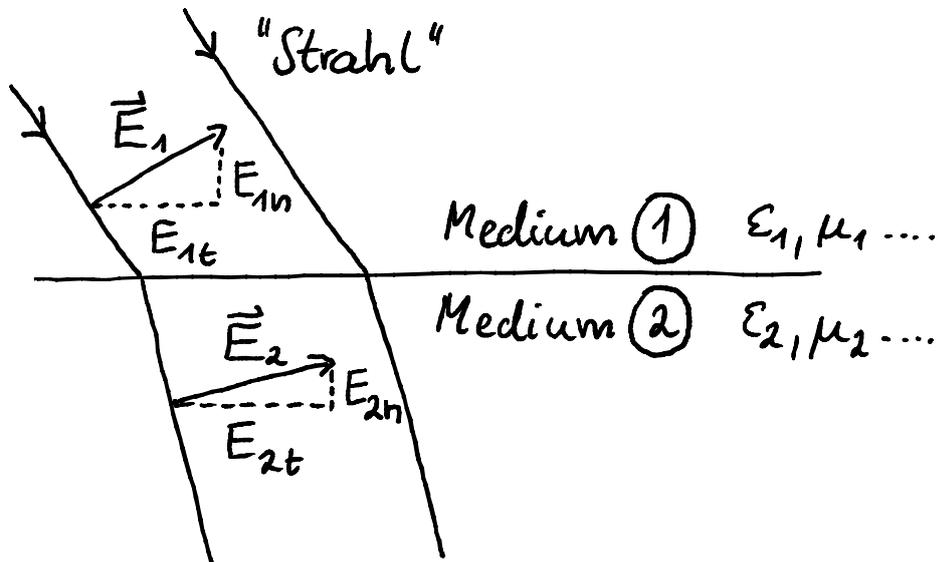
$$\text{Intensität auf } e^{-1} \text{ bei } x = \frac{1}{\alpha} = 11,3 \text{ nm}$$

$\uparrow$   
 $\lambda = 500 \text{ nm}$

$\Rightarrow$  Röntgenlicht wird transmittiert.

## 6. Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

- Stetigkeitsbedingungen (letztes Semester)



- Beschränkung auf Dielektrikum: Isolator,  $\mu_r = 1, \rho = 0$   
(aber polarisierbar)
- Tangentialkomponente  $\vec{E}$  stetig (Stokes)

$$E_{t1} = E_{t2}$$

- Normalkomponente  $\vec{D}$  stetig (Gauß &  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho = 0$ )

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

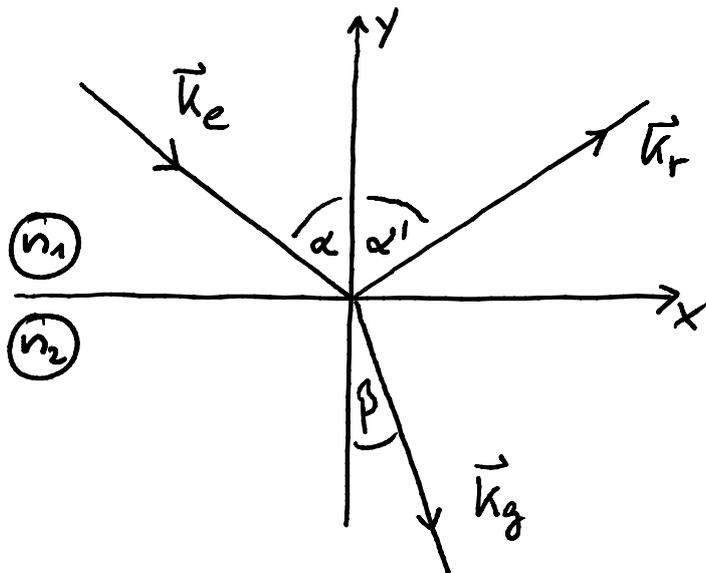
- Tangentialkomponente  $\vec{H}$  stetig (Stokes)

$$\frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1 \quad \text{Beschränkung auf } \mu_1 = \mu_2 = 1$$

- Normalkomponente  $\vec{B}$  stetig (Gauß &  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ )

$$B_{n1} = B_{n2}$$

# -Felder



e: einfallend  
 r: reflektiert  
 g: gebrochen

Wellenzahlvektoren  
 $\hat{=}$  Strahlen

$$\vec{E}_e = \vec{E}_{oe} e^{i(\omega_e t - \vec{k}_e \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{or} e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{E}_g = \vec{E}_{og} e^{i(\omega_g t - \vec{k}_g \cdot \vec{r})}$$

Stetigkeit  $E_t$ :  $E_{et} + E_{rt} = E_{gt}$  an  $y=0$

$$\Rightarrow E_{oe} e^{i(\omega_e t - \vec{k}_e \cdot \vec{r})} + E_{or} e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} = E_{og} e^{i(\omega_g t - \vec{k}_g \cdot \vec{r})}$$

für alle Zeiten  $\Rightarrow \boxed{\omega_e = \omega_r = \omega_g} \equiv \omega$   
 $\uparrow$  ab jetzt

für alle  $x, z$  ( $y=0$ )  $\Rightarrow \vec{k}_e \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_g \cdot \vec{r}$

$\vec{k}_e$  hat keine  $z$ -Komponente

$\Rightarrow \vec{k}_r$  und  $\vec{k}_g$  auch nicht

$$\Rightarrow k_{ex} x = k_{rx} x = k_{gx} x$$

$$\Rightarrow k_e \sin \alpha = k_r \sin \alpha' = k_g \sin \beta \quad (\text{Skizze})$$

$$\text{mit } k_e = k_r = n_1 \frac{\omega}{c} \quad \text{und} \quad k_g = n_2 \frac{\omega}{c}$$

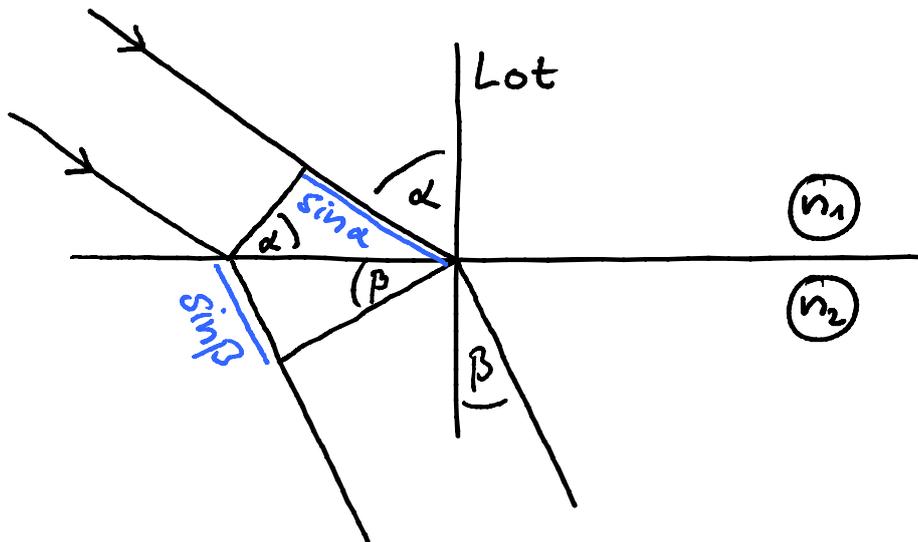
$$\Rightarrow n_1 \sin \alpha = n_1 \sin \alpha' = n_2 \sin \beta$$

$$\boxed{\alpha = \alpha'} \quad \text{Einfallswinkel} = \text{Ausfallswinkel}$$

Snellius'sches  
Brechungsgesetz

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}}$$

- nochmal Snell



$$\text{gleiche Laufzeiten: } \frac{n_1 \sin \alpha}{c} = \frac{n_2 \sin \beta}{c}$$

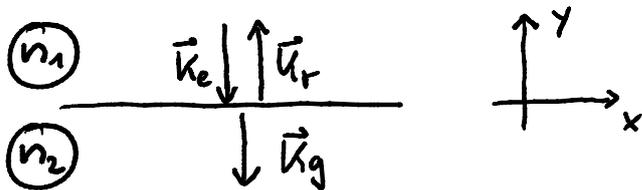
$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{wie gehabt}$$

(siehe auch Huygen'sches Prinzip)

für  $n_2 > n_1$

- Brechung zum Lot
- Blaues Licht wird stärker gebrochen ( $\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0$ )
- Strahldurchmesser vergrößert um  $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$

- Amplituden der reflektierten und "gebrochenen" Welle  
zunächst Vereinfachung: senkrechter Einfall  $\alpha = \beta = 0$



$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0 \Rightarrow \vec{B} \text{ stetig}$$

$$j = 0, E_n = 0 \Rightarrow \vec{E} \text{ auch stetig}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_e + \vec{B}_r = \vec{B}_g \quad \text{und} \quad \vec{E}_e + \vec{E}_r = \vec{E}_g$$

Ebene monochromatische Wellen:

$$-\dot{\vec{B}} = -i\omega \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\vec{k} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E})$$

$$\rightarrow \frac{1}{\omega} (\vec{k}_e \times \vec{E}_e) + \frac{1}{\omega} (\vec{k}_r \times \vec{E}_r) = \frac{1}{\omega} (\vec{k}_g \times \vec{E})$$

$$\vec{k} \perp \vec{E} \quad \text{und} \quad \vec{k}_e = -\vec{k}_r \Rightarrow$$

$$\frac{k_e}{\omega} E_{oe} - \frac{k_e}{\omega} E_{or} = \frac{k_g}{\omega} E_{og} \quad k = n \frac{\omega}{c} \Rightarrow$$

$$n_1 E_{oe} - n_1 E_{or} = n_2 E_{og} = n_2 (E_{oe} + E_{or})$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{or} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_{oe} \equiv r E_{oe}}$$

$r$  = Feldreflexionskoeffizient

- $n_1 = n_2$  keine Reflexion
- reelle  $n_1, n_2$ : "Phasensprung" 0 oder  $\pi$  ( $r < 0$ )
- Komplexe  $n_1, n_2$ : andere Phasensprünge
- mit  $n = \frac{kc}{\omega}$  auch  $r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$

- Allgemein läßt sich für jede Welle ein Wellenwiderstand  $z$  definieren für den gilt:

$$r = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \quad (\text{anderes Vorzeichen!})$$

i) Elektromagnetische Wellen

$$z \equiv \frac{E}{H} \quad (\hat{=} \frac{U}{I} = R) \quad [z] = \text{Ohm}$$

$$z = \mu_0 \mu_r \frac{E}{B} = \mu_0 \mu_r \frac{c}{n} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \quad \left( \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \right)$$

• Optik ( $\mu_r = 1$ ):  $r = \frac{1/n_2 - 1/n_1}{1/n_2 + 1/n_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$

• Radio Frequenz ( $\mu_r \neq 1$ ):  $z = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \dots = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$

$L'$ ,  $C'$  Induktivität und Kapazität pro Länge

BNC Kabel  $z = 50 \Omega$ ; Vakuum  $z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$

ii) Schallwellen (Festkörper)

$$z \equiv \rho v_{ph} = \begin{cases} \sqrt{\rho E} & \text{longitudinal} \\ \sqrt{\rho G} & \text{transversal} \end{cases}$$

iii) Quantenmechanik

Masse  $m \neq 0$

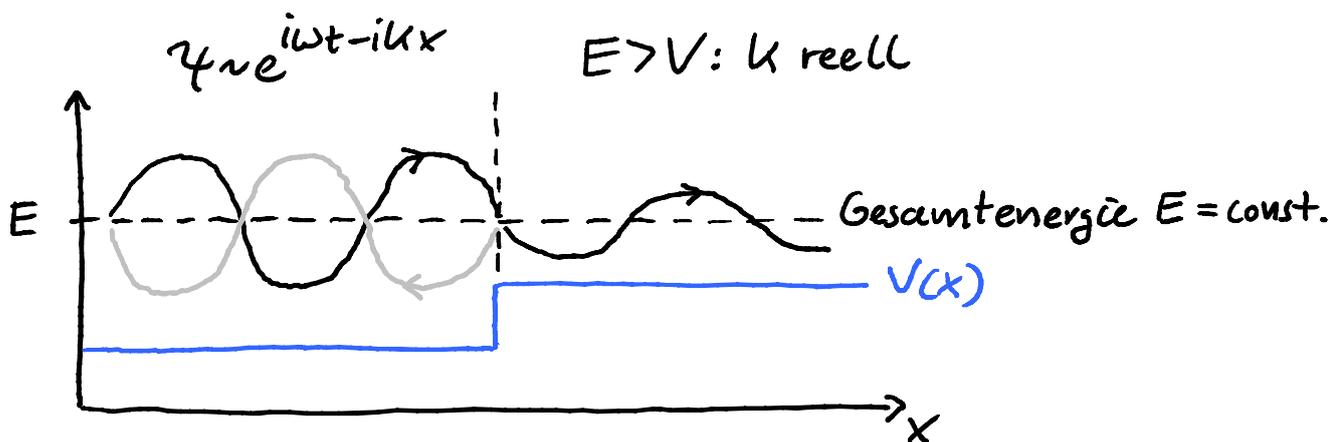
Potential

$$= \text{Wellengleichung } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + V \psi$$

und  $p = \hbar k$  (de Broglie);  $E = \hbar \omega$  (Einstein)

$$\Rightarrow \text{Dispersionsrelation } k = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$$

Potentialstufe = Grenzfläche,  $z$  ändert sich



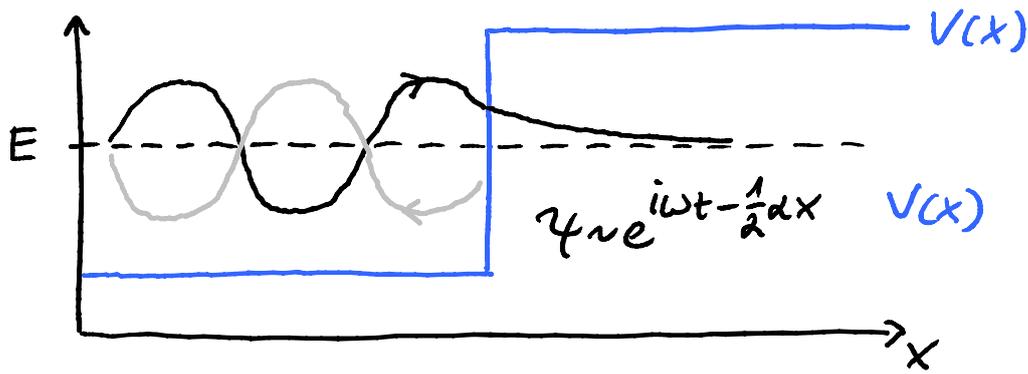
$\psi, \psi'$  stetig  $\Rightarrow$

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$$

$E < V$ :  $k$  imaginär



Evaneszente Welle; hier Tunneleffekt

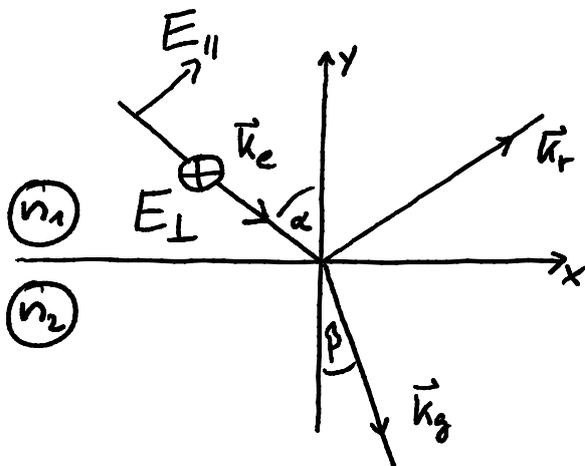
$$\alpha = \alpha \sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$$

Klassische Physik:  $\hbar^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha = \infty \quad \psi = 0$

Zurück zur Optik:

- Amplituden bei beliebigem Einfallswinkel:

•  $\vec{E}_e$ : Zerlegung in  $\parallel$  und  $\perp$  Komponente:



$\parallel$  parallel und senkrecht  $\perp$   
zur Einfallsebene

• Berücksichtigung der Querschnittsänderung

• Detaillierte Herleitung z.B. im Zinthe und Bergmann Schaefer

## Fresnel'sche Formeln:

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = -\frac{(\sqrt{n_r^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha)^2}{n_r^2 - 1}$$

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} = \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} = \frac{n_r^2 \cos \alpha - \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \alpha}}{n_r^2 \cos \alpha + \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \alpha}}$$

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{2 \cos \alpha \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \alpha} - 2 \cos^2 \alpha}{n_r^2 - 1}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} = \frac{2n_r^2 \cos \alpha}{n_r^2 \cos \alpha + \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \alpha}}$$

- mit  $n_r \equiv \frac{n_2}{n_1}$
- zweite und dritte Spalte aus erster mit  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_r$
- $t_{\parallel}$  und  $t_{\perp}$  = transmittierte Welle  
= gebrochene Welle

$$E_{g\perp} = t_{\perp} E_{e\perp} \quad E_{g\parallel} = t_{\parallel} E_{e\parallel}$$

- Formeln gelten auch für komplexe  $n_1$  und  $n_2$

## - Eigenschaften der Fresnel'schen Formeln

i) Energieerhaltung ( $n_1, n_2$  reell)

$$\text{Feld / Intensität: } I = \epsilon_0 n c |\vec{E}|^2$$

(Medium speichert Energie)

Reflektierte und transmittierte Intensität:

$$R^I \equiv \frac{I_r}{I_e} = \frac{\epsilon_0 n_1 c |E_e|^2}{\epsilon_0 n_1 c |E_r|^2} = \frac{|E_e|^2}{|E_r|^2} = |r_i|^2 \quad i = \perp \text{ oder } \parallel$$

$$T^I \equiv \frac{I_g}{I_e} = \frac{\epsilon_0 n_2 c |E_g|^2}{\epsilon_0 n_1 c |E_r|^2} = \frac{n_2}{n_1} \frac{|E_g|^2}{|E_r|^2} = \frac{n_2}{n_1} |t_i|^2$$

Energieerhaltung z.B. für  $\alpha = \beta = 0$ :

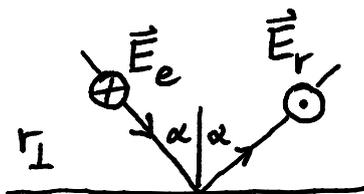
$$\begin{aligned} R^I + T^I &= \left( \pm \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 + \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 \\ &= \frac{(n_1 - n_2)^2 + 4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} = \frac{(n_1 + n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

ii) Senkrechter Einfall ( $n_1, n_2$  reell)

$$r_{\perp} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{Wie gehabt, aber } r_{\parallel} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}$$

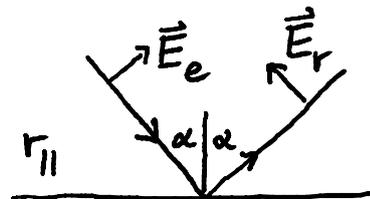
warum  $r_{\perp} = -r_{\parallel}$  ?

wegen Definition der Geometrie:



$$\alpha \rightarrow 0 \quad n_2 > n_1 \quad r_{\perp} < 0$$

Phasensprung von  $\pi$

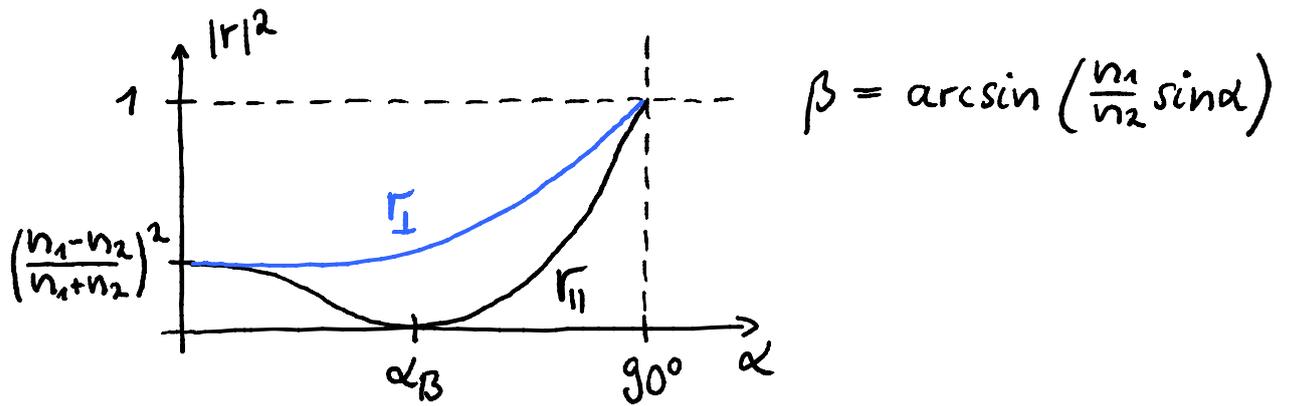


$$\alpha \rightarrow 0 \quad n_2 > n_1 \quad r_{\parallel} > 0$$

Phasensprung von  $\pi$

(immer bei Reflexion am dichteren Medium)

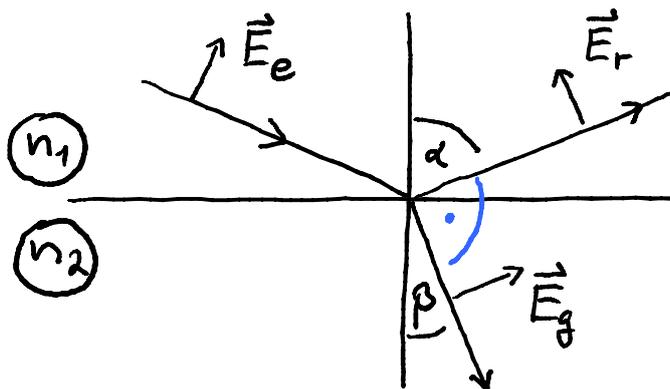
iii) Reflexion am optisch dichteren Medium  $n_2 > n_1$



- 100% Reflexion bei streifendem Einfall  $\alpha = 90^\circ$
- Reflexion verschwindet für  $\alpha_B$  und  $\parallel$
- Reflexion fast immer teilweise polarisiert.

iv) Brewster Winkel

$$r_{\parallel} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \epsilon \tan(\alpha + \beta) = \infty \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$



$$\Rightarrow \vec{E}_t \perp \vec{E}_r$$

Keine Abstrahlung der Oberflächen dipole entlang ihrer Schwingungsrichtung.

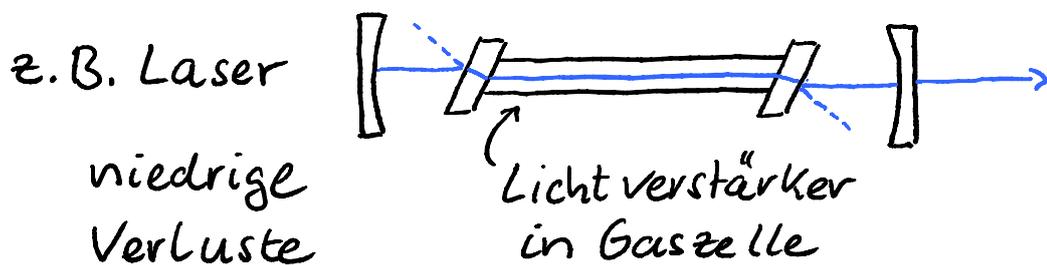
Snell:  $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$

$$\stackrel{!}{=} n_2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = n_2 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

$\Rightarrow$   $\alpha_B = \arctan \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$  Brewster Winkel

- meist  $n_1 = 1$ ;  $n_2 = n$   $\alpha_B = \arctan(n)$
- auch für  $n_1 > n_2$
- Anwendung: Polarisator; Reflexunterdrückung



v) Reflexion an Metallen:  $n_1 = 1$ ;  $n_2 = i n_I$

$$r_{\perp} = \frac{\cos \alpha - i n_I \cos \beta}{\cos \alpha + i n_I \cos \beta} \quad r_{\parallel} = \frac{i n_I \cos \alpha - \cos \beta}{i n_I \cos \alpha + \cos \beta}$$

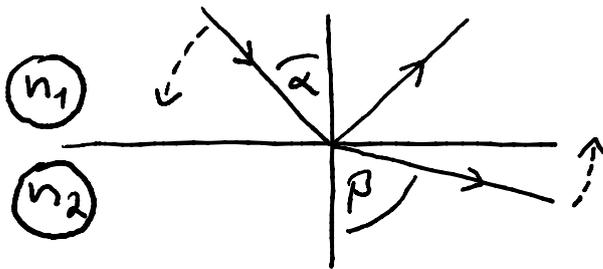
beides von der Form:  $|r_i|^2 = \left| \frac{a-ib}{a+ib} \right|^2 = \frac{|a-ib|^2}{|a+ib|^2} = 1$

$\Rightarrow$  100% Reflexion trotz starker Dämpfung

- evaneszente Welle (z.B. Silber  $R^{\perp} \approx 97\%$ )

- $n_R = 0$   $n_I \neq 0$  Dämpfung durch Reflexion
- $n_R \neq 0$   $n_I \neq 0$  Absorption und Reflexion
- $n_R \neq 0$   $n_I = 0$  nur Reflexion

vi) Totalreflexion  $n_1 > n_2$



$$\beta \stackrel{!}{=} 90^\circ \Rightarrow \sin \beta = 1 = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_T = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)} \quad \text{Totalreflexion}$$

- Grenzwinkel: Totalreflexion für  $\alpha > \alpha_T$
- Unabhängig von der Polarisation ( $\alpha_T$  aus Snell)
- Fresnel:

$$r_{||} = \frac{n_r^2 \cos \alpha - \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \alpha}}{n_r^2 \cos \alpha + \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \alpha}} \quad r_{\perp} = -\frac{(\sqrt{n_r^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha)^2}{n_r^2 - 1}$$

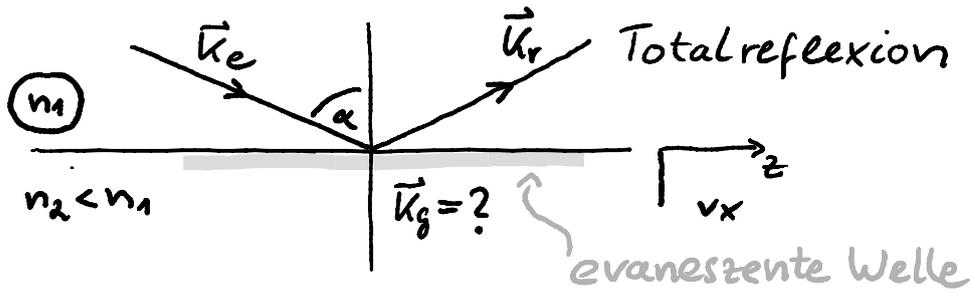
$$\alpha > \alpha_T = \arcsin(n_r) \Rightarrow n_r^2 - \sin^2 \alpha < 0$$

$$\Rightarrow r_{||} \text{ von der Form } \frac{a-ib}{a+ib} \Rightarrow |r_{||}|^2 = 1$$

(analog für  $|r_{\perp}|^2$ ; mehr Rechnerei)

- transmittierte Welle wird evaneszent

- Evaneszente Welle durch Totalreflexion



Stetigkeit  $E_z \Rightarrow k_{ez} = k_{rz} = k_{gz} \equiv k_z$  (Herleitung Snell)

$$\text{mit: } k_g = \sqrt{k_z^2 + k_{gx}^2} = \frac{\omega n_2}{c}$$

$$\Rightarrow k_{gx}^2 = \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2} - k_z^2 = \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2} - \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2} \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow k_{gx} = -\frac{\omega n_2}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \alpha} \equiv -i\gamma$$

$< 0$  für  $\alpha > \alpha_T$

$$\gamma = \frac{\omega n_2}{c} \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \alpha - 1}$$

$$\Rightarrow \vec{k}_g = \begin{pmatrix} -i\gamma \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \Rightarrow E_g(x, z, t) = E_{0g} e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$= E_{0g} e^{i\omega t - \gamma x - ik_z z}$$

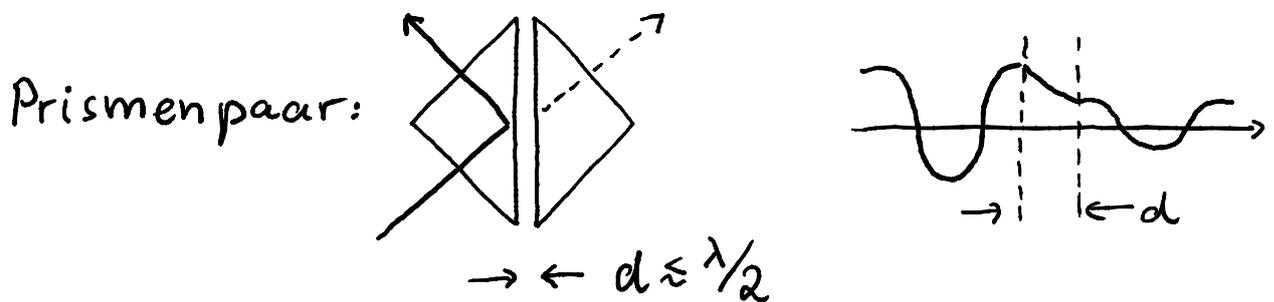
- Evaneszente Welle oszilliert zeitlich überall, räumlich aber nur in  $z$ -Richtung
- fällt in  $x$ -Richtung schnell ab  $\frac{1}{\gamma} \approx \lambda$

- Räumliche Phase in  $z$ -Richtung in beiden Medien gleich:  $\sim e^{-ik_z z}$

Beispiel:  $n_1 = 1,5$   $n_2 = 1$   $\Rightarrow \alpha_T = 41,8^\circ$

mit  $\alpha = 45^\circ$   $\lambda = 600 \text{ nm}$   $\gamma = 3,7 \times 10^6 \text{ m}^{-1} \approx \frac{2}{\lambda}$

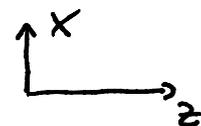
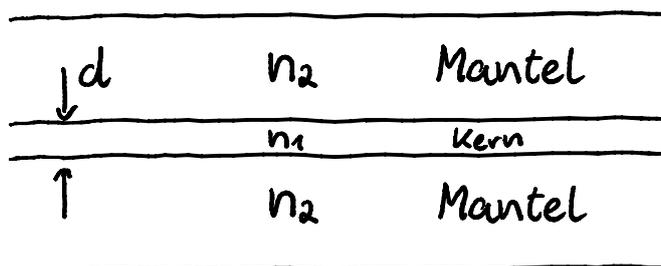
- Frustrierte Totalreflexion



$\Rightarrow$  Evaneszente Wellen: Abweichung von der Strahlenoptik (Klassische Trajektorie) in Raumbereichen von der Größe  $\approx \lambda$ .

## 7. Wellenleiter

Schichtwellenleiter  $n_1 > n_2$



$\vec{k}$  in  $x, z$  Ebene

- Annahmen:
- Ebene Welle entlang  $z$
  - irgend etwas entlang  $x$
  - Polarisation  $\parallel \vec{e}_y$

$$\Rightarrow \text{Ansatz: } \vec{E} = \vec{e}_y E(x) e^{i\omega t - ik_z z}$$

mit  $\epsilon_M(x)$  und  $\epsilon_K(x)$  im Mantel und Kern

Stetigkeit:

$$\bullet E_t: \epsilon_M\left(\pm \frac{d}{2}\right) \stackrel{!}{=} \epsilon_K\left(\pm \frac{d}{2}\right)$$

$$\bullet B_t: \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial E_z / \partial y - \partial E_y / \partial z \\ \partial E_x / \partial z - \partial E_z / \partial x \\ \partial E_y / \partial x - \partial E_x / \partial y \end{pmatrix} = i\omega \vec{B}$$

$$E_x = E_z = 0 \quad B_z \text{ stetig} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} \text{ stetig}$$

$$\frac{\partial \epsilon_M(x)}{\partial x} \Big|_{\pm \frac{d}{2}} \stackrel{!}{=} \frac{\partial \epsilon_K(x)}{\partial x} \Big|_{\pm \frac{d}{2}}$$

$$\text{Symmetrie: Ansatz} = \begin{cases} \epsilon_K(x) \sim \sin(k_{Kx} x), \cos(k_{Kx} x) \\ \epsilon_M(x) \sim e^{\pm \gamma x} \end{cases}$$

Cos - Lösung:

$$E_t: B e^{-\gamma d/2} = A \cos(k_{ux} d/2) \quad \text{für } x = +\frac{d}{2}$$

$\swarrow$  A, B Konstanten

$$B_t, \frac{\partial E_y}{\partial x}: -\gamma B e^{-\gamma d/2} = -k_{ux} A \sin(k_{ux} d/2)$$

---

$$\div k_{ux} \tan(k_{ux} d/2) = \gamma \quad \text{für } x = \pm \frac{d}{2}$$

Sin - Lösung:

$$E_t: B e^{-\gamma d/2} = C \sin(k_{ux} d/2) \quad \text{für } x = +\frac{d}{2}$$

$\swarrow$   $x > 0$

$$B_t, \frac{\partial E_y}{\partial x}: -\gamma B e^{-\gamma d/2} = k_{ux} C \cos(k_{ux} d/2)$$

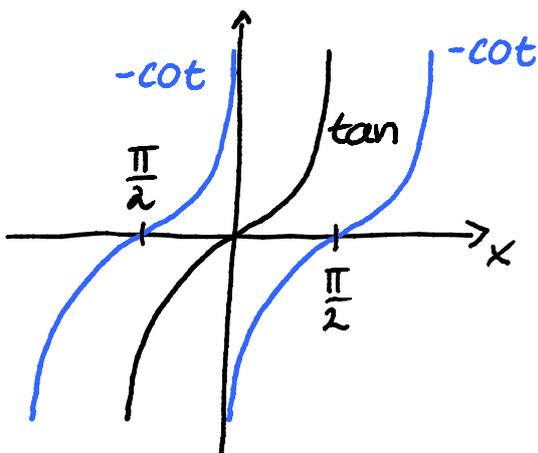
---

$$\div k_{ux} \cot(k_{ux} d/2) = -\gamma \quad \text{für } x = \pm \frac{d}{2}$$

$\swarrow$   $1/\tan$

transzendente Gleichung für  $k_{ux}$ !

i) Betrachte zunächst  $\gamma = \infty$



$$\tan x = \infty \quad \text{für } x = (2m+1) \frac{\pi}{2}$$

$$-\cot x = \infty \quad \text{für } x = 2m \frac{\pi}{2}$$

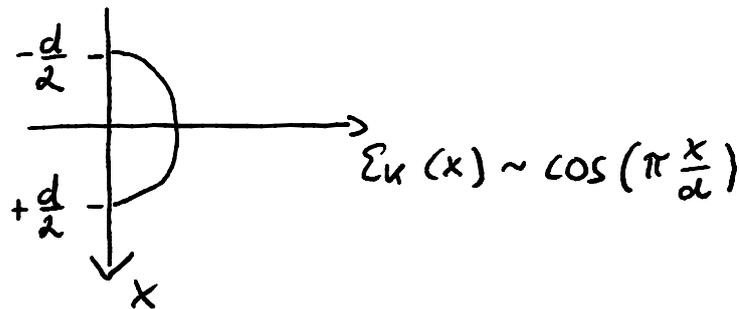
$$m \in \mathbb{Z}$$

⇒ "Quantisierung"  $k_{kx} = m \frac{\pi}{d}$  Moden

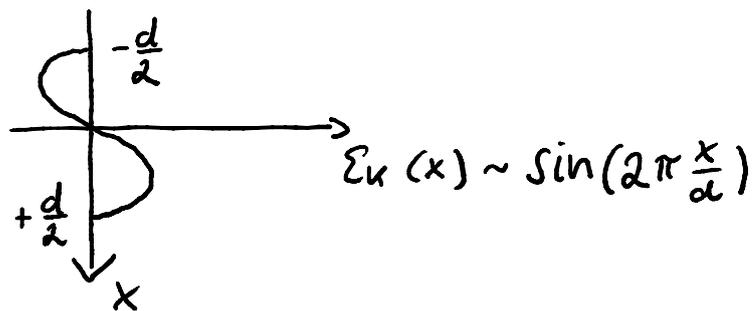
Moden aus Randbedingung:

$m=0$ :  $E_k(x) \sim \sin(0) = 0$  nicht brauchbar

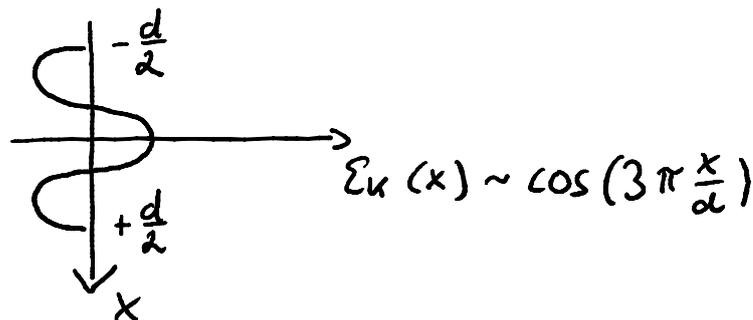
$m=1$ :



$m=2$ :



$m=3$ :



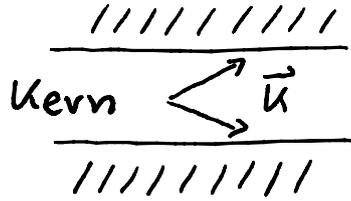
usw.

Vergleiche: Saitenschwingen, Wasserstoffatom ....

$$E(x) e^{i\omega t - ik_z z} \sim \begin{cases} \frac{1}{2} (e^{im\frac{\pi}{d}x} + e^{-im\frac{\pi}{d}x}) e^{i\omega t - ik_z z} & m=1, 3, \dots \\ \frac{1}{2i} (e^{im\frac{\pi}{d}x} - e^{-im\frac{\pi}{d}x}) e^{i\omega t - ik_z z} & m=2, 4, \dots \end{cases}$$

$\swarrow \cos(m\frac{\pi}{d}x)$   
 $\nwarrow \sin(m\frac{\pi}{d}x)$

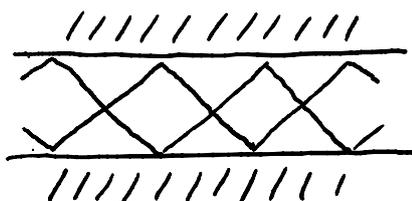
⇒ Jeder Mode Überlagerung zweier  $\vec{k}$  Vektoren:

$$\vec{k}_k = \begin{pmatrix} \pm m \frac{\pi}{d} \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$$


⇒ stehende Welle entlang  $x$

laufende Welle entlang  $z$  (per Ansatz)

Beschreibung mit "Strahlen":



Wiederholte  
Totalreflexion

Allgemeine Lösung, Superposition:

$$E(x, z, t) = \sum_m e^{i\omega t - ik_z z} (a_m \cos(m\frac{\pi}{d}x) + b_m \sin(m\frac{\pi}{d}x))$$

hängt von  $m$  ab  $\swarrow$   
 $= 0$  für  $m$  gerade  $\swarrow$   
 $= 0$  für  $m$  ungerade  $\nwarrow$

(Fourier-Reihe für  $x$ -Abhängigkeit)

Anzahl der geführten Moden:

$$\vec{k}_k = \begin{pmatrix} \pm m \frac{\pi}{d} \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \quad k_z = \sqrt{k_k^2 - k_{kx}^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega n_1}{c}\right)^2 - m^2 \frac{\pi^2}{d^2}}$$

$\Rightarrow k_z$  imaginär für  $m > \frac{d}{\pi} \frac{\omega n_1}{c} = \frac{d}{\pi} \frac{2\pi n_1}{\lambda_0}$   
 $\swarrow$  im Vakuum

$\Rightarrow m_{\max} = \frac{2d}{\lambda_k}$   $\swarrow$  im Kern

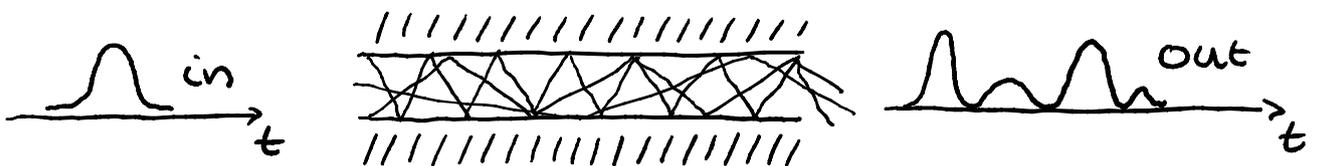
• keine Moden für  $d < \frac{\lambda_k}{2}$

$\Rightarrow$  geometrische Optik versagt

• genau eine Mode für:  $1 < \frac{2dn_1}{\lambda_0} < 2$

$\Rightarrow$  Einmoden Wellenleiter

$\Rightarrow$  Datenübertragung



ii) Realistischer:  $\gamma < \infty$

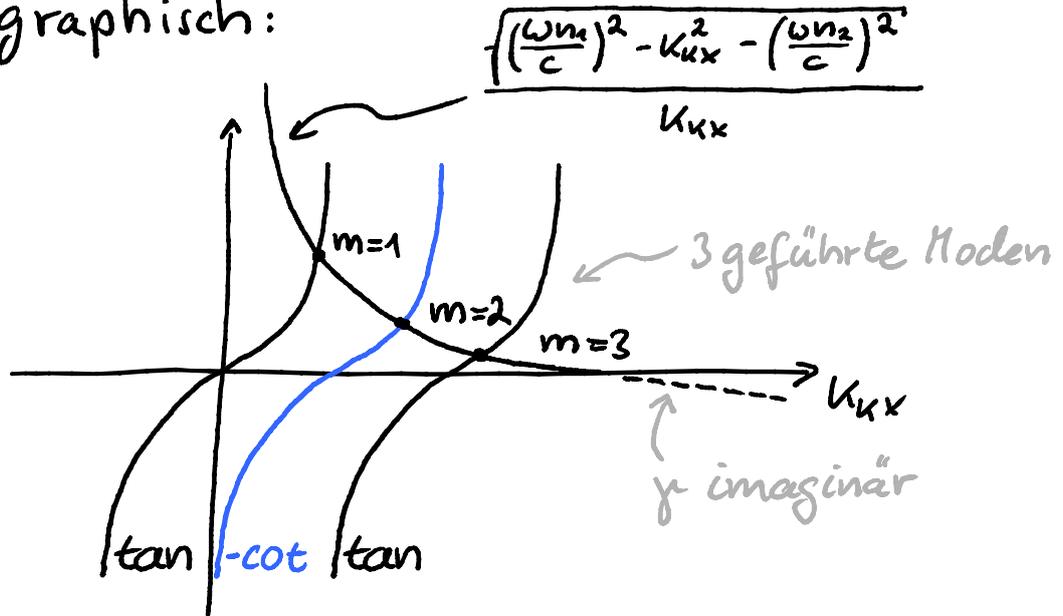
$$\left. \begin{array}{l} k_{kx} \tan(k_{kx} d/2) \\ -k_{kx} \cot(k_{kx} d/2) \end{array} \right\} = \gamma$$

$$\gamma = i k_{Mx} = i \sqrt{k_M^2 - k_z^2} = \sqrt{k_z^2 - k_M^2}$$

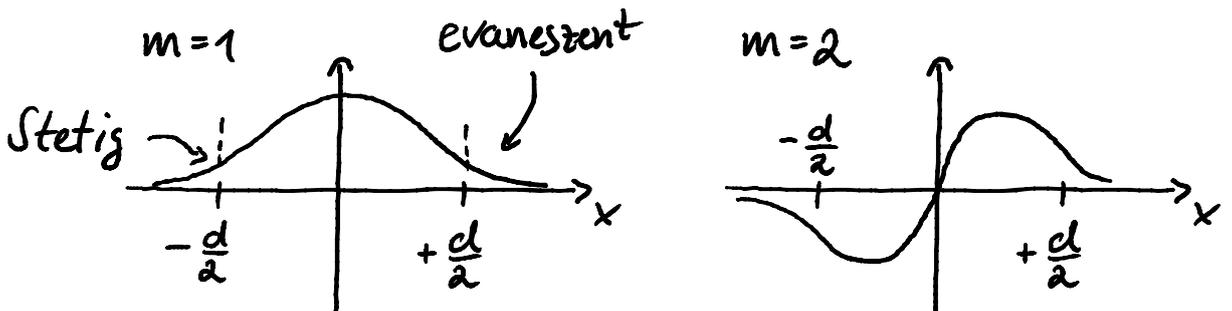
$\uparrow k_M^2 = k_{Mx}^2 + k_z^2$                        $\uparrow k_k^2 = k_{kx}^2 + k_z^2$

$$= \sqrt{k_k^2 - k_{kx}^2 - k_M^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega n_2}{c}\right)^2 - k_{kx}^2 - \left(\frac{\omega n_1}{c}\right)^2}$$

Lösung graphisch:



=> Moden etwas anders:

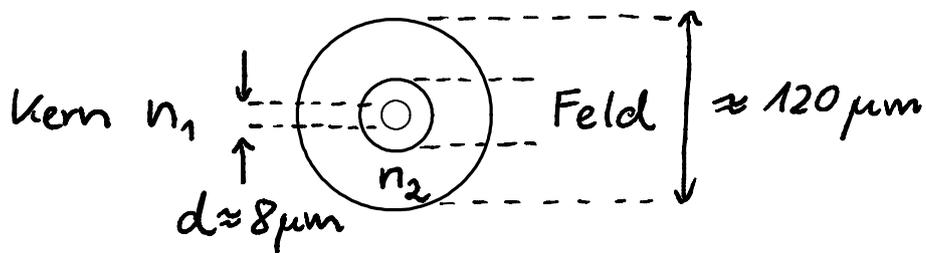


ansonsten keine wesentlichen Änderungen

- Optische Fasern

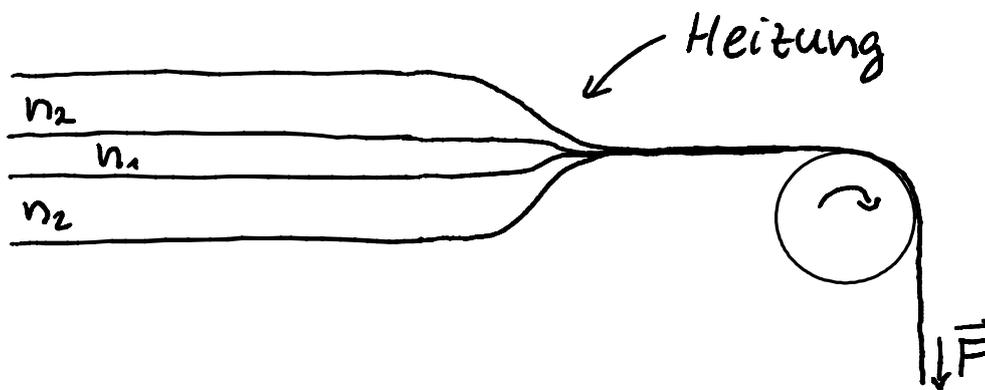
rotationssymmetrisch  $n = n(r)$





Einmodig für:  $d < \frac{0,76 \dots \lambda_0}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$

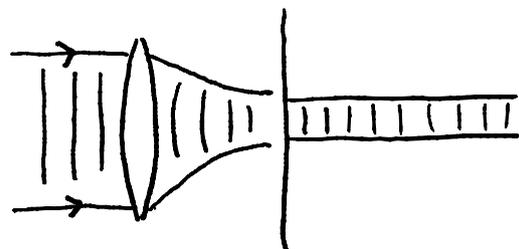
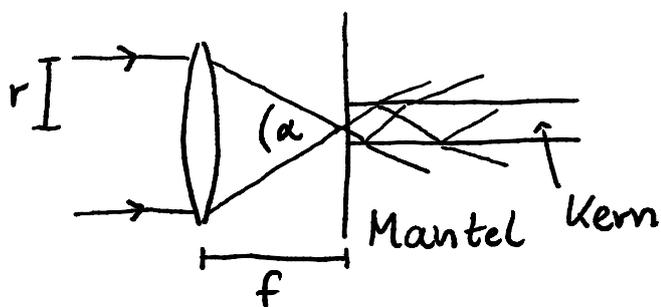
Wird aus Präform gezogen:



- 100 Tb/s über 1000 km möglich (WDM)
- Einkopplung

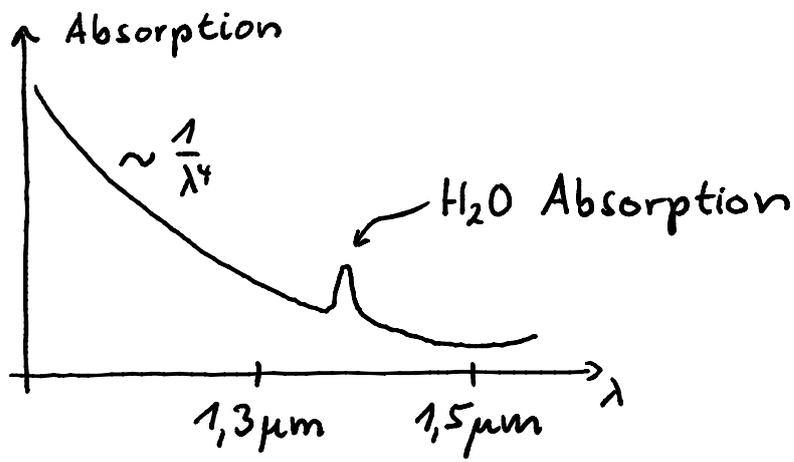
"Strahlen"

Wellen (Kapitel 18)



in die  $m=1$  ( $TE_{00}$ ) Mode mit richtigen  $\alpha$

Numerische Apertur  $NA = \frac{r}{f} \approx \alpha$



Gruppengeschwindigkeitsdispersion (GVD) = 0 bei 1,3 μm. Durch  $n(\omega)$  kann GVD = 0 auf 1,5 μm verschoben werden. Erbium dotierte Faser Laser bei 1,46 μm - 1,64 μm.

## 8. Streuung

Strahlen/Teilchen

Wellen



Einteilung in • elastisch / inelastisch

• nach Streuteilchen Größe

- Elastische Streuung

1.) Streuteilchen  $r \ll \lambda$  (Atome, Moleküle...)

Erzwungene Dipolschwingung (Kapitel 5)

Abgestrahlte Leistung:

$$P_d = \frac{Ne^2 x_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \nu$$

$$\Rightarrow P_d = \frac{Ne^4 E_0^2 \sin^2 \nu}{32\pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} \quad \text{unabhängig von } \omega$$

1d) Mie Streuung  $r \approx \lambda$ ,  $\omega \ll \omega_0$

- Maxwellgleichungen lösen
- Kompliziertes Abstrahlmuster
- Beispiel: stark verdünnte Milch

1e)  $r \gg \lambda \Rightarrow$  Fresnel'sche Formeln

- Inelastische Streuung

2a) Raman/Brillouin  $r \ll \lambda$  ( $\omega$  irgendwas)

- Frequenzverschiebung durch Streuung am schwingendem Dipol:

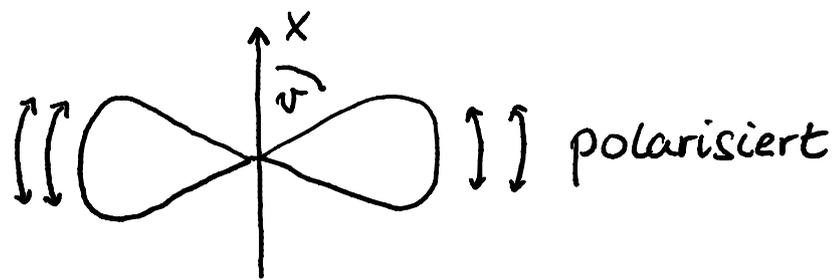
Raman: optische Schwingung  $\approx 100 \text{ THz}$

Brillouin: akustische Schwingung  $\approx 16 \text{ Hz}$

Quanten: Photon - Phonon Streuung

2b) Compton Streuung  $r \ll \lambda$ ;  $\omega \gg \omega_0$

wie Thompson ( $P_d \sim \sin^2 \nu$ ) aber  $h\omega \approx mc^2$



$$x_0^2 = \left| -\frac{e}{m} \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right|^2 = \frac{e^2 E_0^2}{m^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$$\Rightarrow P_d = \frac{Ne^4 E_0^2 \sin^2 \nu}{32\pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

1a) Rayleigh Streuung  $r \ll \lambda$ ;  $\omega \ll \omega_0$

$$\Rightarrow P_d \sim \omega^4 \sin^2 \nu$$

- blau wird 16 mal stärker gestreut als rot
- Himmelsblau, Abendrot

1b) Resonante Streuung  $r \ll \lambda$ ;  $\omega \approx \omega_0$

- sehr stark, Stoffnachweis, Laserspektroskopie
- Fraunhofer Linien

1c) Thomson Streuung  $r \ll \lambda$ ;  $\omega \gg \omega_0$ ;  $\gamma \approx 0$

Streuung an freien Elektronen  $\hbar\omega \ll mc^2$

↑  
Klassisches Feld

- Feld quantisiert  $\Rightarrow$  Photon ruckstoß

relativistischer Stoß  $E = \hbar\omega$ ;  $p = \hbar k$

$$\Rightarrow \Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\varphi)$$

$\uparrow$  Compton Wellenlänge des Elektrons  
 $\nwarrow$  Streuwinkel

- Streuquerschnitt

Dichte der Streuzentren

Streurate  $n_s = \frac{I}{\hbar\omega} N \sigma$  effektive Fläche

$\uparrow$  Photonen pro Sekunde und  $m^2$

$$\text{Streuleistung} = \hbar\omega n_s = N \sigma I = N \sigma \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \stackrel{!}{=} P_d$$

$$\text{Dipol: } \sigma = \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^4} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$= Q^2$

$$= 7,9 \times 10^{-20} m^2 \text{ klassischer Elektronenradius}^2$$

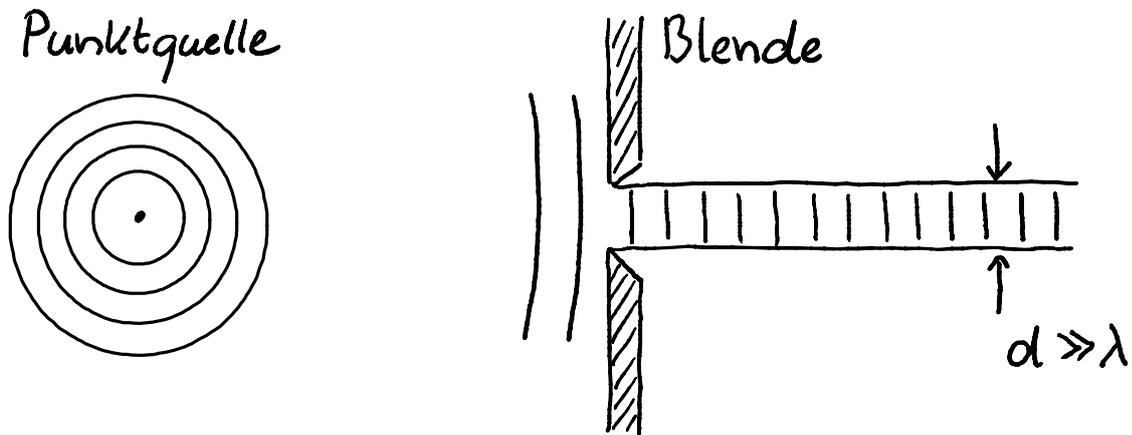
$$\text{Resonanz: } \omega = \omega_0 \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \approx \frac{10^{15} \text{ Hz}}{10^7 \text{ Hz}} \text{ typisch}$$

$$\Rightarrow \sigma \approx 10^{-13} m^2 \approx \lambda^2 \gg \text{Bohr radius}^2$$

(Quantenmechanik  $\sigma = \frac{3\lambda^2}{2\pi}$  exakt)

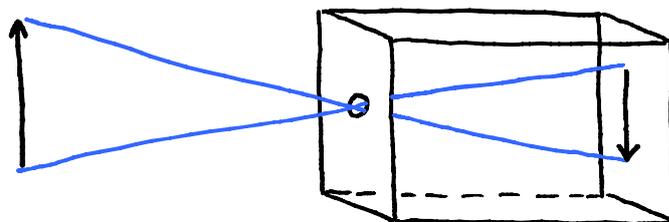
# 9. Geometrische Optik

- "Definition" eines Lichtstrahls (Lichtbündel)

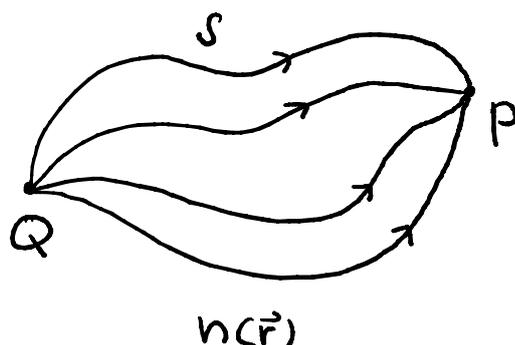


Beispiel für Lichtstrahlen:

Lochkamera (Camera Obscura)



- Fermat'sches Prinzip



S: denkbare Wege

- phasengerechte Summe über Weg  $S$ :

$$W(s) \equiv \int_S n(\vec{r}) ds \quad \text{optische Weglänge}$$

$$2\pi \frac{W(s)}{\lambda} = \text{Phasenverschiebung von } Q \rightarrow P$$

- nummeriere (parametrisiere) denkbare Wege  $S_j$

Fermat: nur Wege mit  $\frac{\partial W(s_j)}{\partial s_j} = 0$  tragen bei

Lichtstrahlen nehmen den schnellsten (meist) oder langsamsten Weg.

- viele benachbarte optische Weglängen gleich:

Konstruktive Interferenz

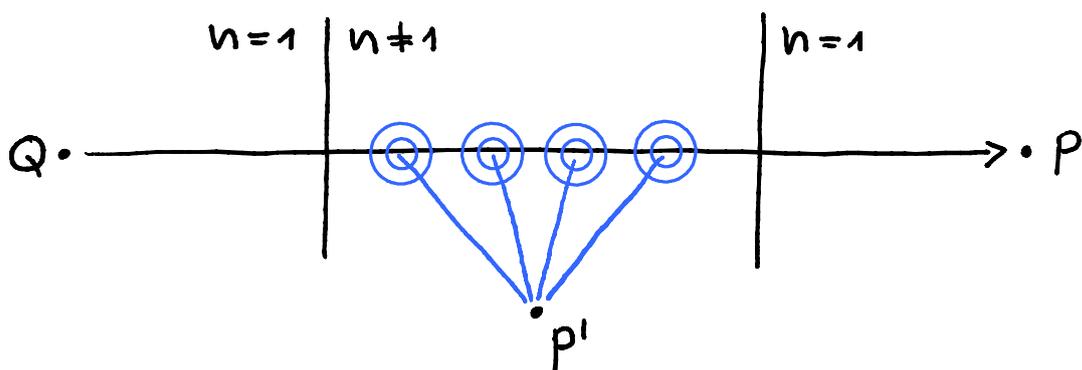
- Strahlenoptische Näherung:

Alle nicht-extremalen Wege interferieren sich weg

- Lichtstrahlen geradlinig im homogenen Medium

- Lichtweg umkehrbar

i) Lichtstrahl durch Glasscheibe

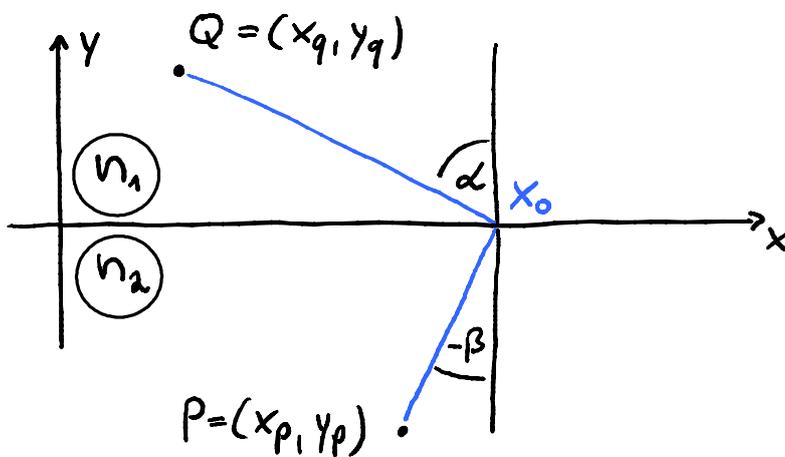


(auch Huygen'sches Prinzip)

$\Rightarrow$  gestreute Wellen erreichen  $P'$  mit allen denkbaren Phasen, etwa  $\sum_n e^{i\varphi_n} \approx 0$

$\Rightarrow$  gestreute Wellen erreichen  $P$  mit identischen Phasen  $\sum_n e^{i\varphi} = e^{i\varphi} \sum_n 1 \neq 0$

ii) Brechungsgesetz mit Fermat:



Parametrisierung der Wege durch Punkt auf der Oberfläche  $(x_0, 0)$ :

$$W = n_1 \sqrt{(x_q - x_0)^2 + y_q^2} + n_2 \sqrt{(x_p - x_0)^2 + y_p^2}$$

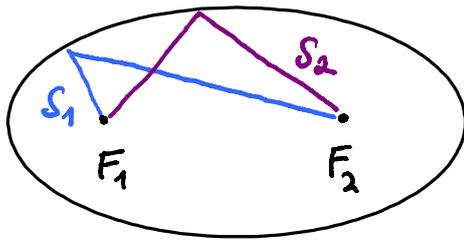
$$\frac{\partial W}{\partial x_0} = n_1 \frac{x_q - x_0}{\sqrt{(x_q - x_0)^2 + y_q^2}} + n_2 \frac{x_p - x_0}{\sqrt{(x_p - x_0)^2 + y_p^2}} \stackrel{!}{=} 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{= \sin \alpha} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{= \sin(-\beta)}$

$$\Rightarrow n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \text{Snell}$$

(ähnlich für Reflexion  $\alpha = \alpha'$ )

### iii) Beispiel für "langsamsten Weg"

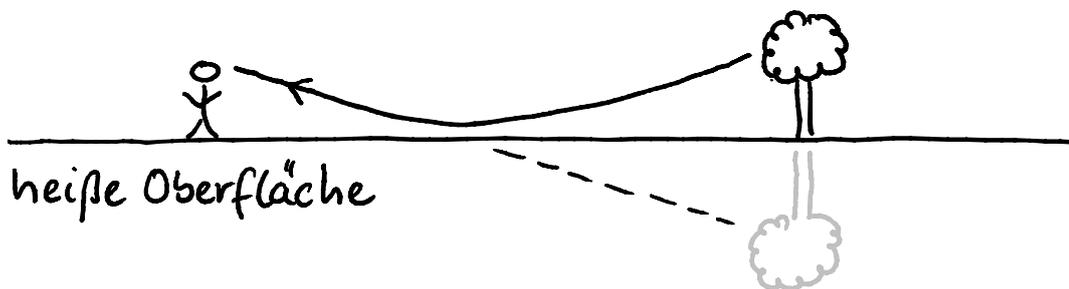


Ellipse

Brennpunkte  $F_1, F_2$

Alle Wege  $S_j$  gleich lang  $\Rightarrow$  konstruktive Interferenz

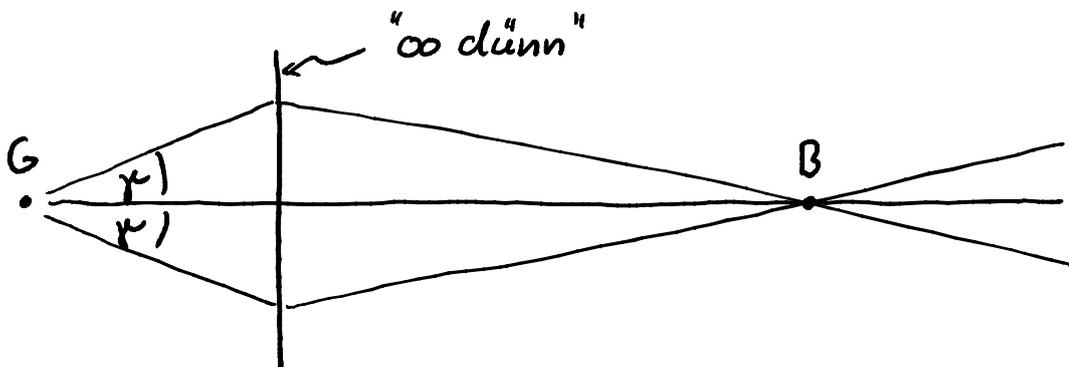
### iv) Kontinuierlicher Brechungsindex $n(\vec{r})$



- Quantenmechanik: Fermat = Feynman Pfadintegral  
Klassische Näherung (Lagrange  $n \rightarrow E - V$ ):  
Alle nicht-extremalen Wege interferieren sich weg

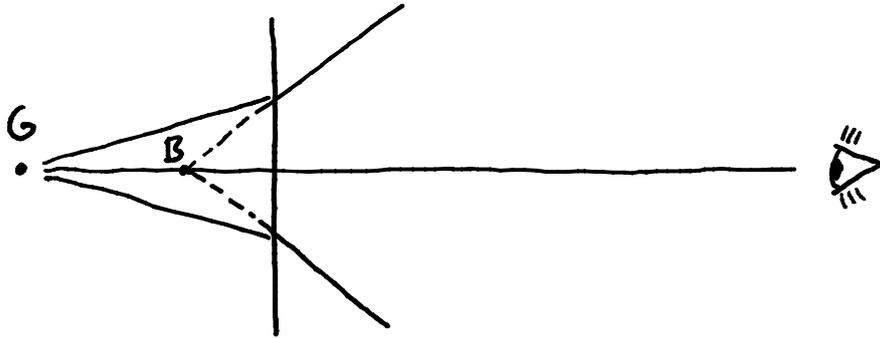
### - Abbildungen

Optische Systeme:

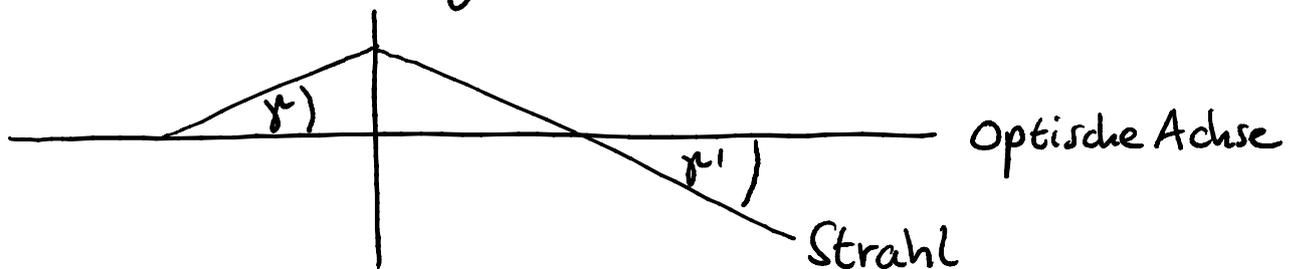


- unabhängig von  $\gamma \Rightarrow$  alle von G kommenden Strahlen kommen in B an = Abbildung.

- reelle Abbildung; auf Schirm sichtbar
- virtuelle Abbildung; nur direkt sichtbar



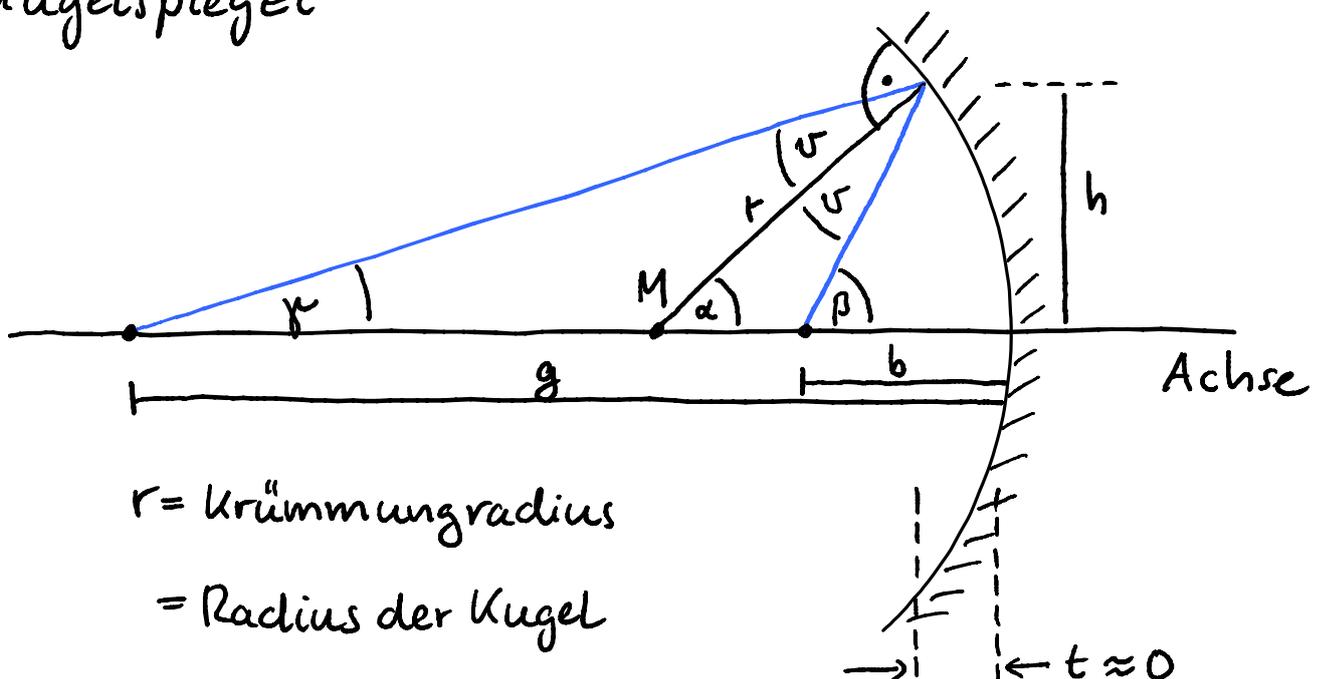
### - Paraxiale Näherung



$$\tan \gamma \approx \sin \gamma \approx \gamma; \quad \cos \gamma \approx 1 \quad \text{ebenso für } \gamma'$$

$$\Rightarrow \text{Snell: } n_1 \alpha = n_2 \beta$$

### - Kugelspiegel



$$\Rightarrow \begin{aligned} \gamma + \nu + (180^\circ - \alpha) &= 180^\circ \\ -(\alpha + \nu + (180^\circ - \beta)) &= 180^\circ \end{aligned}$$


---


$$\gamma - 2\alpha + \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma + \beta = 2\alpha$$

mit

$$\frac{h}{g} = \tan \gamma \approx \gamma \quad \frac{h}{r} = \sin \alpha \approx \alpha \quad \frac{h}{b} = \tan \beta \approx \beta$$

$$\Rightarrow \frac{h}{g} + \frac{h}{b} = \frac{2h}{r}$$

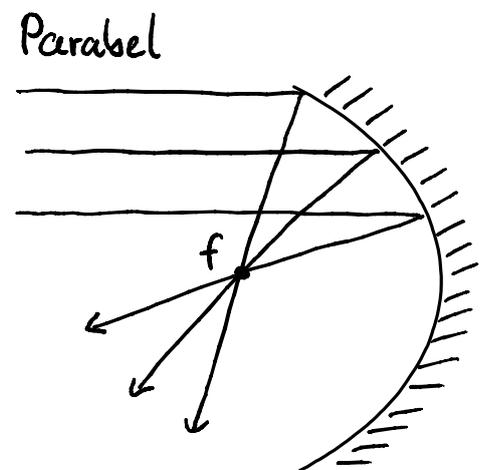
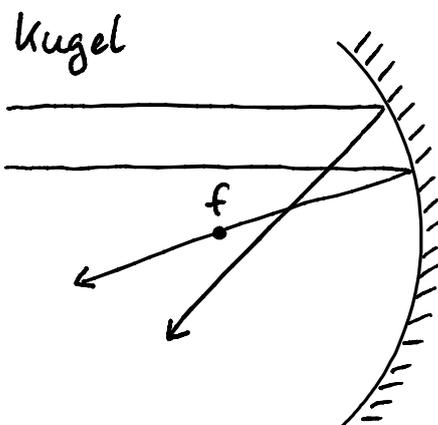
Bedingung für die Abbildung

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}$$

$$\boxed{f = \frac{r}{2}}$$

Abbildungsgleichung\*      Brennweite

- sphärische Aberration (später mehr dazu)

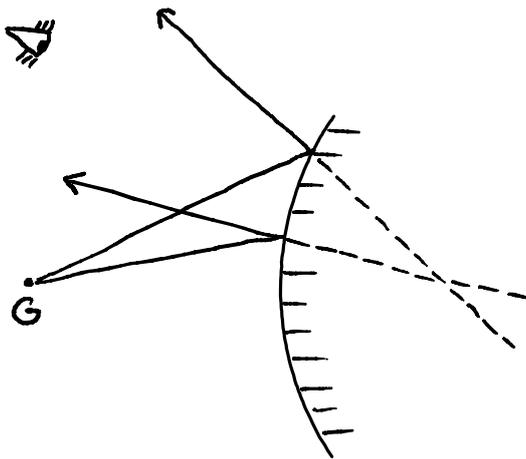


$\Rightarrow$  kleine Öffnung oder Parabolspiegel

\* auch Linsengleichung

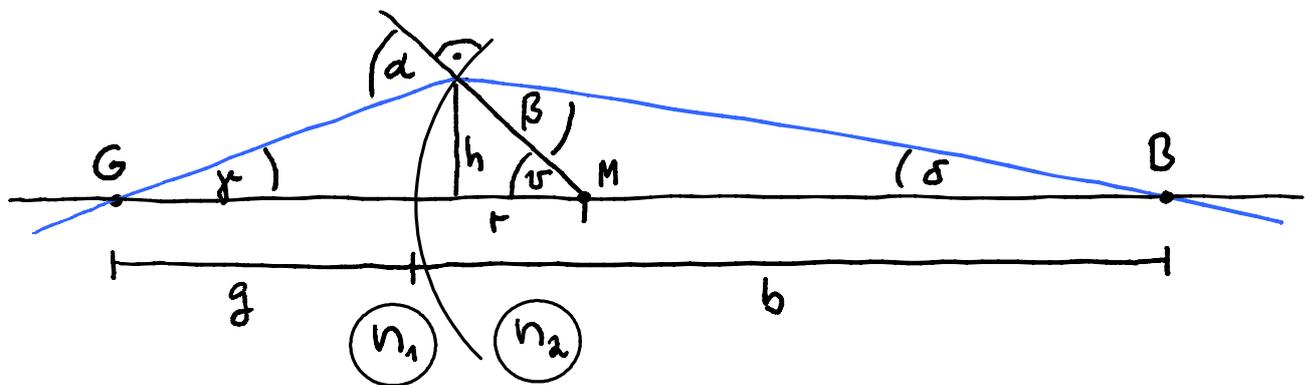
Fermat: Parabolspiegel vereint alle achsparallele Strahlen im Fokus. Nicht achsparallele Strahlen: Astigmatismus (später mehr)

- Virtuelle Abbildung am konvexen Spiegel



negative  
Brennweite

- Abbildung an brechender Kugel fläche



$$\text{Snell: } n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \Rightarrow n_1 \alpha = n_2 \beta$$

$$\gamma + 180^\circ - \alpha + \nu = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \gamma + \nu$$

$$\beta + 180^\circ - \nu + \delta = 180^\circ \Rightarrow \beta = \nu - \delta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow n_1 \alpha &= n_1 (\gamma + \vartheta) = n_1 \left( \frac{h}{g} + \frac{h}{r} \right) \\ &= n_2 \beta = n_2 (\vartheta - \delta) = n_2 \left( \frac{h}{r} - \frac{h}{b} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}} \quad \text{Abbildungsgleichung für brechende Kugelfläche}$$

- unabhängig von  $\gamma \Rightarrow$  alle von G kommenden Strahlen kommen in B an: Abbildung
- Bildseitige Brennweite:  $g \rightarrow \infty \Rightarrow b = f_B \equiv \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}$
- Gegenstandseitige Brennweite:  $b \rightarrow \infty \Rightarrow g = f_G \equiv \frac{n_1 r}{n_2 - n_1}$

- Vorzeichenkonvention:

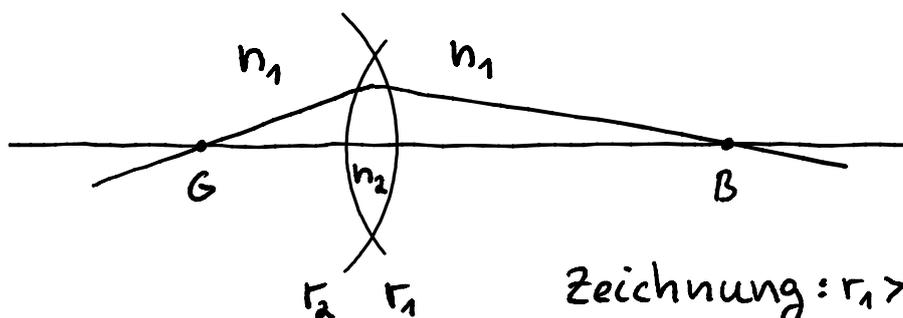
G links:  $g > 0$

B rechts:  $b > 0$

M rechts:  $r > 0$



- Dünne Linse



Zeichnung:  $r_1 > 0; r_2 < 0$

sukzessive Anwendung der Abbildungsgleichung:

$$1. \text{ Fläche: } \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b_1} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}$$

$$2. \text{ Fläche bildet } b_1 \text{ ab: } g_2 = -b_1$$

$$-\frac{n_2}{b_1} + \frac{n_1}{b} = \frac{n_1 - n_2}{r_2}$$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{g} + \frac{n_1}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_1 - n_2}{r_2}$$

Linse in Luft:  $n_1 = 1$ ;  $n_2 = n$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}$$

$$\boxed{\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

Abbildungsgleichung  
Brennweite  
für dünne Linsen

Beispiel, Konkavlinse mit  $n = 1,5$ :



$$r_1 = \infty \quad r_2 = -50 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{-50 \text{ mm}} \right) = \frac{1}{100 \text{ mm}}$$



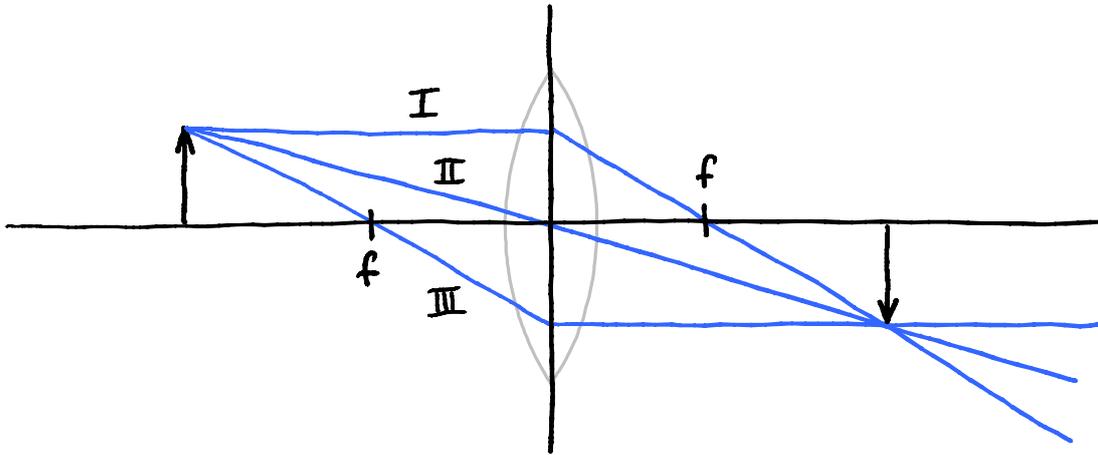
$$r_1 = +50 \text{ mm} \quad r_2 = \infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{50 \text{ mm}} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{1}{100 \text{ mm}}$$

rechts und linkseitige Brennweite gleich.

(die Aberrationen nicht!)

- Konstruktion der Abbildung



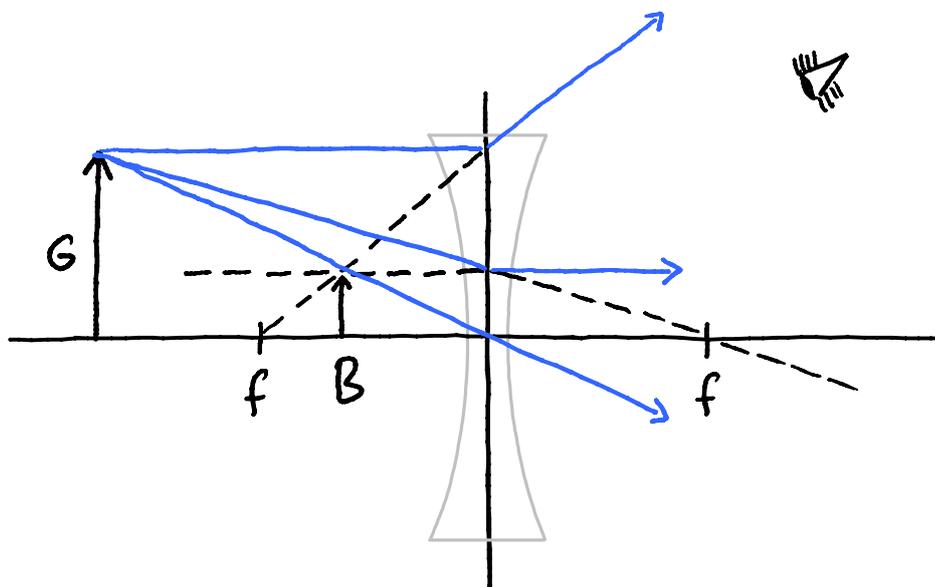
I: paralleler Strahl durch Fokus (auf anderer Seite)

II: Strahl durch Linsenzentrum wird nicht abgelenkt

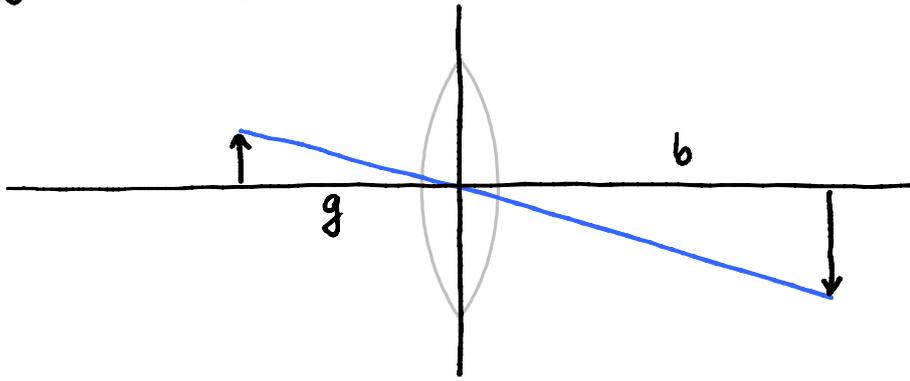
III: Durch Fokus wird achsparallel (auf anderer Seite)

Zwei Strahlen reichen; der Dritte zur Kontrolle

- Konstruktion der virtuellen Abbildung



-Vergrößerung



Strahlensatz:  $V_T = -\frac{b}{g}$  (Bild steht auf dem Kopf)

$$\text{mit } \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \Rightarrow b = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}} = \frac{fg}{g-f}$$

$$\text{analog } g = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{b}} = \frac{fb}{b-f}$$

$$\boxed{V_T = \frac{f}{f-g} = \frac{f-b}{f}} \quad \text{transversale Vergrößerung}$$

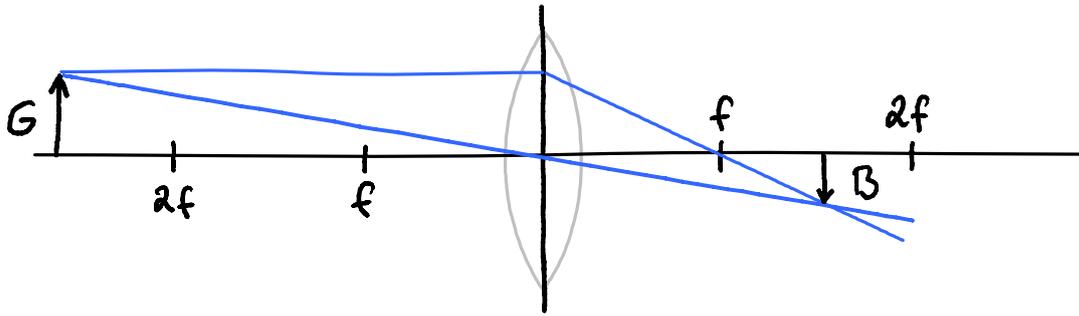
- $|V_T| < 1$ : Verkleinerung

Longitudinal:

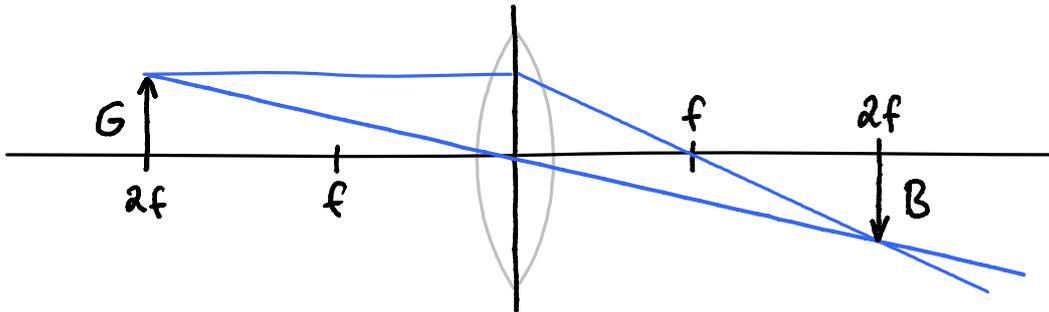
$$V_L = \frac{\partial b}{\partial g} = \frac{\partial}{\partial g} \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}} = \frac{-\frac{1}{g^2}}{\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{g}\right)^2}$$

$$\boxed{V_L = \frac{-f^2}{(g-f)^2} = -V_T^2} \quad \text{Longitudinale Vergrößerung}$$

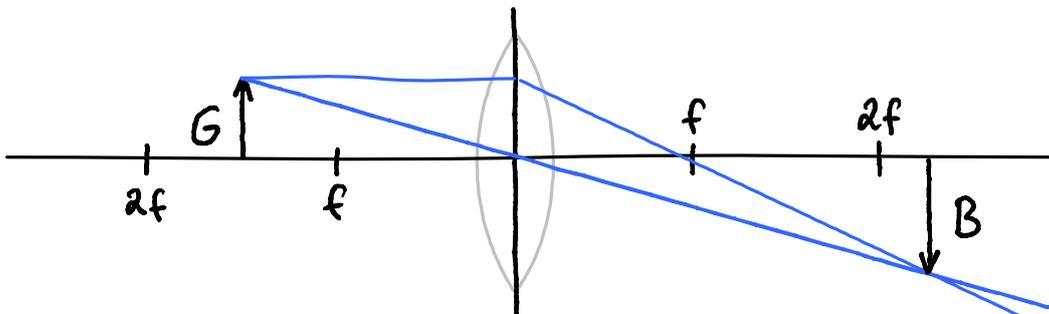
- Abbildungszonen



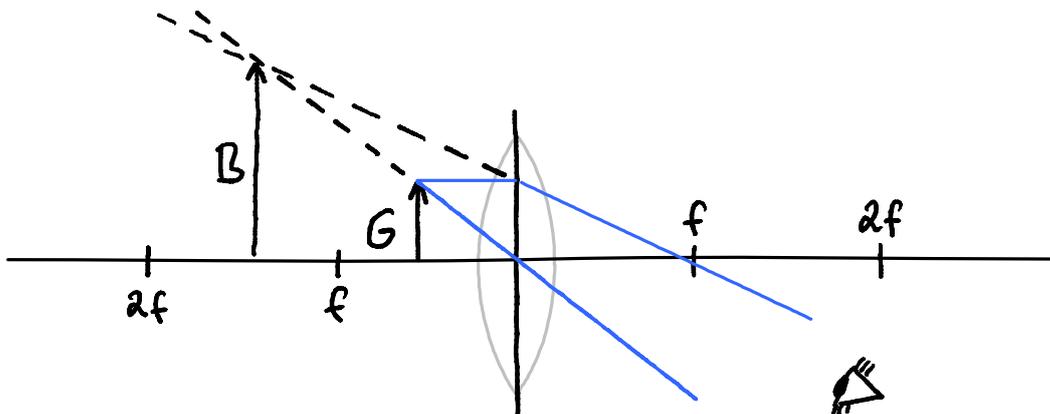
$2f < g < \infty \Rightarrow f < b < 2f$  Kopfstehend, verkleinert



$g = 2f \quad b = 2f$  1:1 Abbildung (4f-Anordnung)



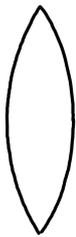
$f < g < 2f \Rightarrow 2f < b < \infty$  Kopfstehend, vergrößert



virtuell  $0 < g < f \Rightarrow b < -g$  aufrecht, vergrößert

$g$	Abb.typ	$b$	$V_T = \frac{f}{f-g}$
$2f < g < \infty$	reell	$f < b < 2f$	$-1 < V_T < 0$
$g = 2f$	reell	$b = 2f$	$V_T = -1$
$f < g < 2f$	reell	$2f < b < \infty$	$V_T < -1$
$g = f$	-	$b = \infty$	$\infty$
$0 < g < f$	virtuell	$b < -g$	$V_T > 1$

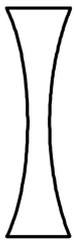
### - Linsentypen



bikonvex



plankonvex



bikonkav



plankonkav



konvex-konkav



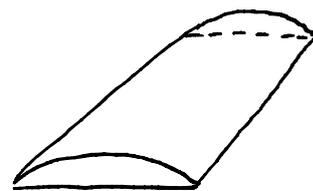
aspherisch

teuer



Fresnel Linse

Leuchtturm



Zylinderlinse

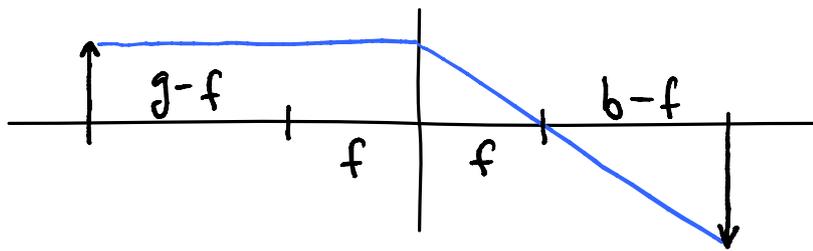
- Newton'sche Form der Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{\frac{1}{g} + \frac{1}{b}} = \frac{gb}{g+b} \Rightarrow -fg - fb + gb = 0$$

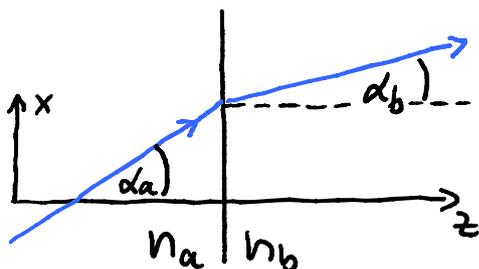
$$\Rightarrow f^2 - fg - fb + gb = f^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(g-f)(b-f) = f^2} \quad \text{Newton'sche Abbildungsgleichung}$$



- Optische Systeme "ABCD-Matrizen"

Definition des Strahlenvektors:



$$\vec{S} \equiv \begin{pmatrix} n \alpha \\ x \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} S_1 &= n \alpha \\ S_2 &= x \end{aligned}$$

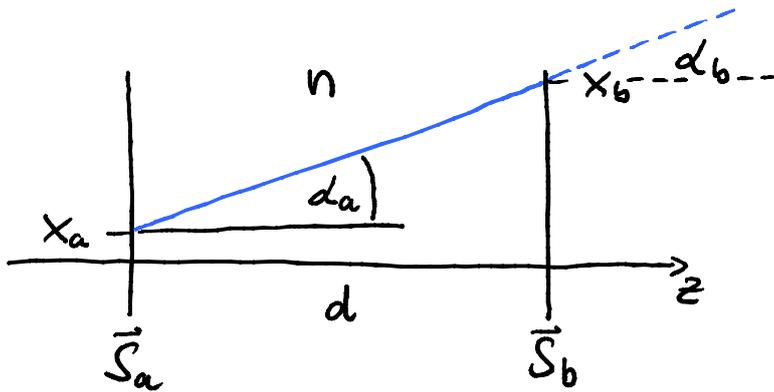
$$\text{Snell: } n_a \alpha_a = n_b \alpha_b$$

i) Brechung an ebener Grenzfläche:  $\vec{S}_b = \vec{S}_a$

Transformation mit Einheitsmatrix

$$\vec{S}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{S}_a$$

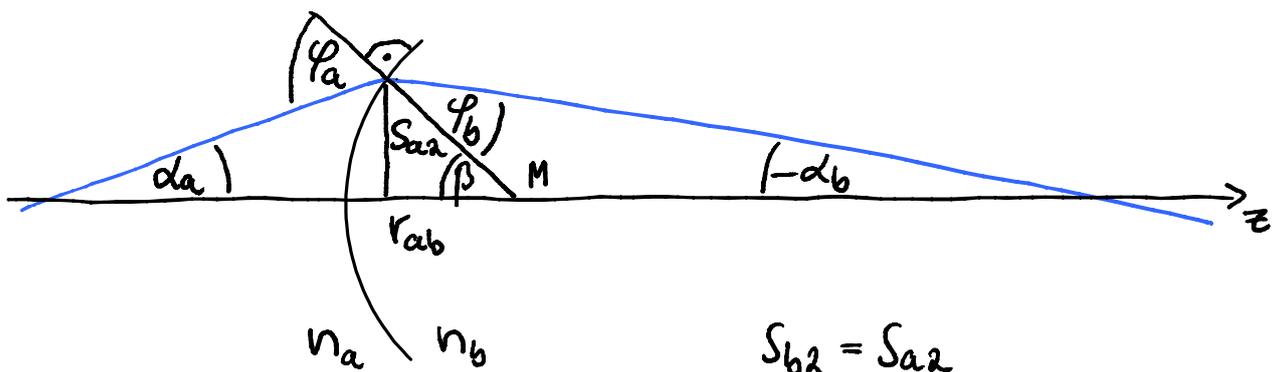
ii) Propagation um Länge  $d$



$$n \alpha_b = n \alpha_a \quad x_b = x_a + d_a d = x_a + \frac{S_{a1}}{n} d$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{d}{n} & 1 \end{pmatrix}} \quad \text{Translation}$$

iii) Brechende Kugelfläche



$$\alpha_a + (180^\circ - \varphi_a) + \beta = 180^\circ \Rightarrow \varphi_a = \alpha_a + \beta$$

$$\varphi_b + (180^\circ - \beta) - \alpha_b = 180^\circ \Rightarrow \alpha_b = \varphi_b - \beta$$

$$S_{b1} = n_b \alpha_b = n_b \varphi_b - n_b \beta \stackrel{\text{Snell}}{=} n_a \varphi_a - n_b \beta = n_a \alpha_a + \beta (n_a - n_b)$$

$$= S_{1a} - (n_b - n_a) \frac{S_{a2}}{r_{ab}}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & -P_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

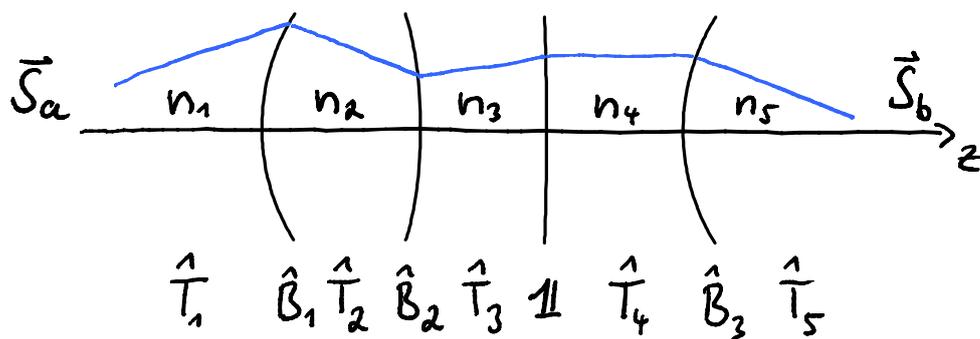
brechende  
Kugelfläche

mit

$$P_{ab} = \frac{n_b - n_a}{r_{ab}}$$

Brechkraft  
Kugelfläche  
(in  $\text{m}^{-1}$  = Dioptrin)

iv) Zentriertes optisches System



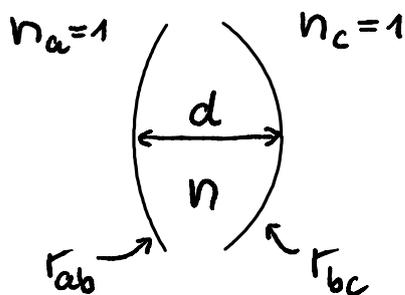
$$\vec{S}_b = \hat{M} \vec{S}_a$$

Reihenfolge!

$$\text{mit } \hat{M} = \hat{T}_5 \hat{B}_3 \hat{T}_4 \hat{T}_3 \hat{B}_2 \hat{T}_2 \hat{B}_1 \hat{T}_1$$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ "ABCD" Matrix des Systems}$$

Beispiel: dicke Linse



$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & -P_{bc} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d/n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -P_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - P_{bc} \frac{d}{n} & -P_{ab} - P_{bc} + P_{ab} P_{bc} \frac{d}{n} \\ \frac{d}{n} & 1 - P_{ab} \frac{d}{n} \end{pmatrix}$$

v) dünne Linse  $d=0$ :

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & -P_{ab} - P_{bc} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(n-1) \left( \frac{1}{r_{ab}} - \frac{1}{r_{bc}} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1/f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dünne Linse}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_b \\ x_b \end{pmatrix} = \hat{D} \begin{pmatrix} \alpha_a \\ x_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_a - x_a/f \\ x_a \end{pmatrix} \Rightarrow x_b = x_a ; \Delta d = x_a/f$$

Strahlablenkung  $\Delta d \sim$  zum Abstand zur Achse  $x_a$

## - Abbildende Systeme

$$\vec{s}_b = \hat{M} \vec{s}_g \quad g = \text{Gegenstand} \quad b = \text{Bild}$$

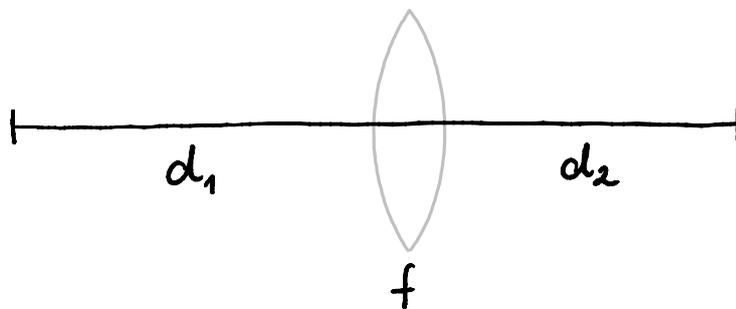
$$\begin{aligned} s_{b1} &= M_{11} s_{g1} + M_{12} s_{g2} \\ s_{b2} &= M_{21} s_{g1} + M_{22} s_{g2} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

Abbildung  $\Leftrightarrow$  Bildpunkt  $s_{b2}$  unabhängig  
Emissionswinkel  $s_{g1}$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{M} \text{ bildet ab} \Leftrightarrow M_{21} = 0}$$

$$\text{au\ss}erdem: M_{21} = 0 \Rightarrow v_T = \frac{s_{b2}}{s_{g2}} = M_{22}$$

Beispiel



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - d_1/f & -1/f \\ d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} & 1 - d_2/f \end{pmatrix}$$

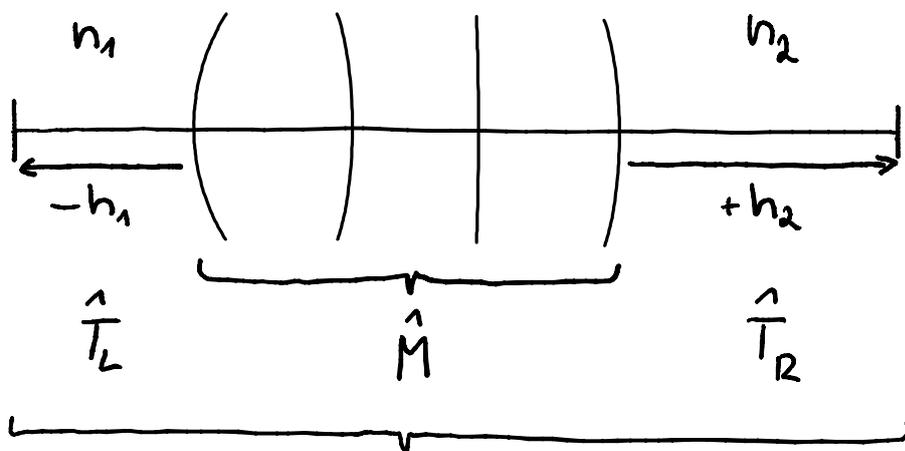
Abbildung falls  $d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$$

Abbildungsgleichung  
mit  $d_1 = g$   $d_2 = b$

$$\Rightarrow V_T = M_{22} = 1 - \frac{d_2}{f} = 1 - d_2 \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) = -\frac{d_2}{d_1} = -\frac{b}{g}$$

- Behauptung: Jedes zentrierte optische System kann durch Anfügen zweier Translationen auf die Form einer dünnen Linse gebracht werden.



$$\hat{L} = \hat{T}_R \hat{M} \hat{T}_L$$

↑ Translation immer positiv nach rechts

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} M_{11} - \frac{M_{12} h_1}{n_1} & M_{12} \\ M_{21} - \frac{M_{22} h_1}{n_1} + \frac{M_{11} h_2}{n_2} - \frac{M_{12} h_1 h_2}{n_1 n_2} & M_{22} + \frac{M_{12} h_2}{n_2} \end{pmatrix}$$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & M_{12} \\ L_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit:}$$

Def:

$$h_1 = -\frac{n_1}{M_{12}} (1 - M_{11})$$

$$h_2 = +\frac{n_2}{M_{12}} (1 - M_{22})$$

Hauptebenen  
und Hauptpunkte

$$\Rightarrow L_{11} = L_{22} = 1$$

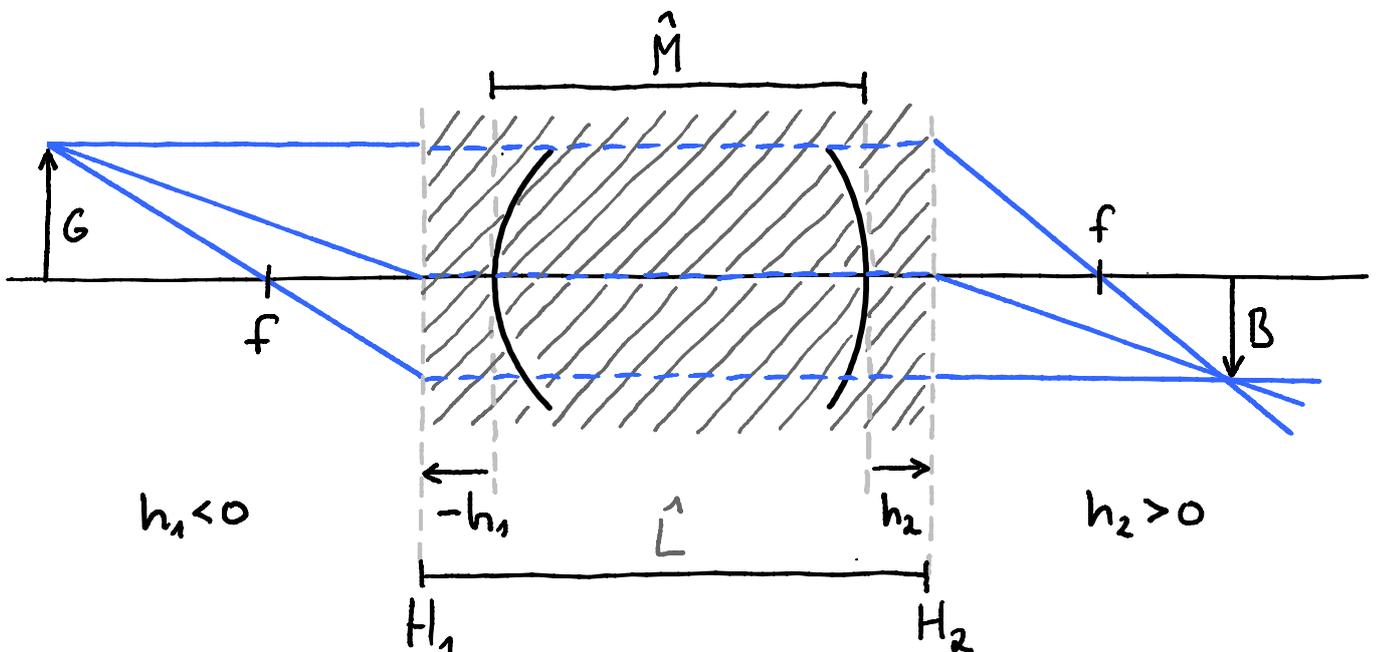
$$\text{mit } |\hat{B}| = |\hat{T}| = 1 \text{ (Determinante)} \Rightarrow |\hat{L}| = 1$$

$$\Rightarrow |\hat{L}| = L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21} = 1 - M_{12} L_{21} = 1$$

$$\Rightarrow M_{12} L_{21} = 0 \Rightarrow L_{21} = 0 \quad \checkmark$$

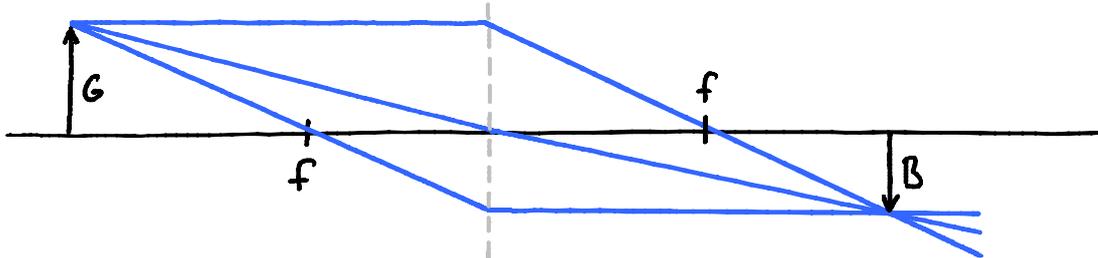
$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & M_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{dünne Linse mit } M_{12} = -\frac{1}{f}$$

- Konstruktion mit Hauptebenen

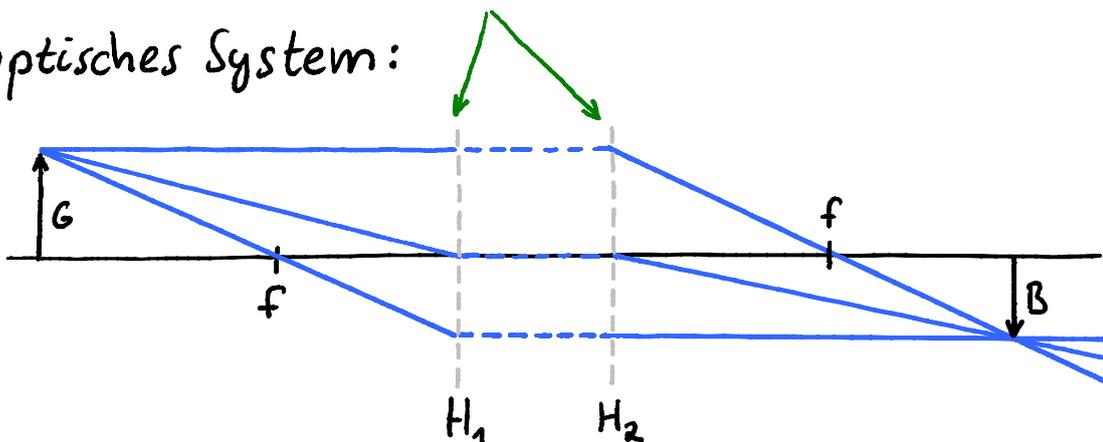


$\hat{L}$  transformiert Bereich zwischen Hauptebenen  
 wie dünne Linse mit Brennweite  $f = -\frac{1}{M_{12}}$   
 d.h. ohne Änderung von  $x$  ( $V_T = M_{22} = 1$ ).

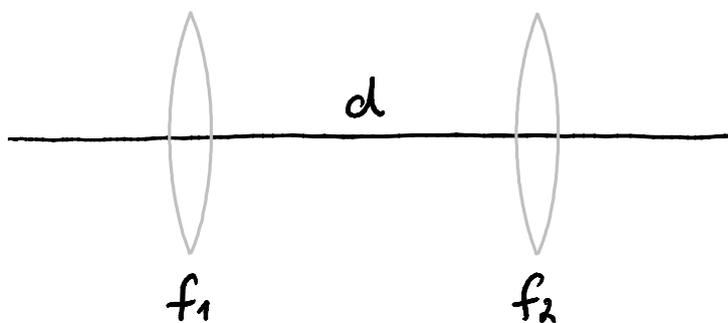
- dünne Linse:  $M_{11} = M_{22} = 1 \Rightarrow h_1 = h_2 = 0$



- optisches System:



- Kombination dünner Linsen



$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1/f_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_2} & -\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}\right) \\ d & 1 - \frac{d}{f_1} \end{pmatrix}$$

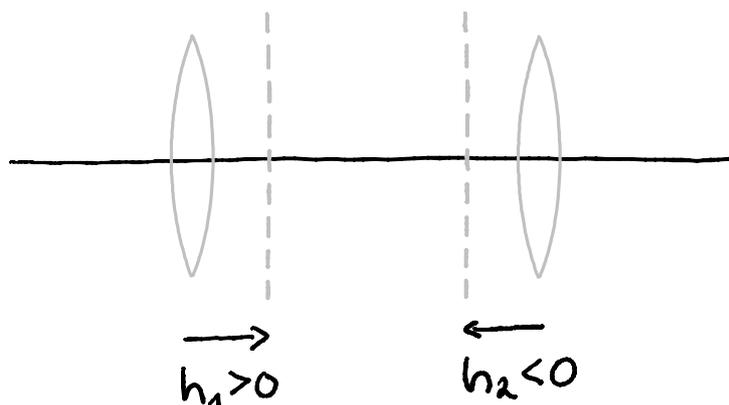
$$M_{12} = -p = -\frac{1}{f} \quad f: \text{Gesamtbrennweite}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}} \quad \begin{array}{l} \text{Brennweite} \\ \text{Linsepaar} \end{array}$$

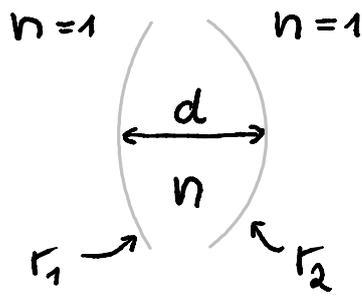
- für  $d \ll f_1, f_2 \Rightarrow \frac{1}{f} \approx \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$
- Brechkräfte addieren sich  $[P] = m^{-1} = \text{Dioptrien}$
- Hauptpunkte ( $n_1 = n_2 = 1$ )

$$h_1 = \frac{1 - M_{11}}{M_{12}} = -\frac{1 - 1 + d/f_2}{-1/f} = +\frac{fd}{f_2}$$

$$h_2 = \frac{1 - M_{22}}{M_{12}} = +\frac{1 - 1 + d/f_1}{-1/f} = -\frac{fd}{f_1}$$



- noch einmal die dicke Linse



wie zuvor

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n-1}{r_2} \frac{d}{n} & - \left( \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} - \frac{(n-1)^2}{r_1 r_2} \frac{d}{n} \right) \\ \frac{d}{n} & 1 - \frac{n-1}{r_1} \frac{d}{n} \end{pmatrix}$$

⇒

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{n-1}{r_1 r_2} \frac{d}{n} \right)$$

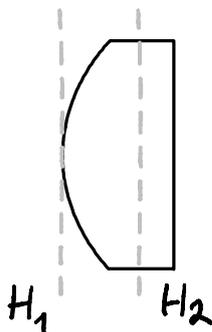
$$h_1 = - \frac{f(n-1)}{r_2} \frac{d}{n} \quad h_2 = - \frac{f(n-1)}{r_1} \frac{d}{n}$$

Linsenschleifer

Formel

Geometrie

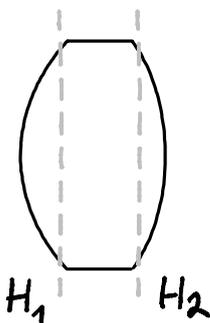
Beispiele



plankonvex

$$r_1 > 0, r_2 = \infty, f > 0$$

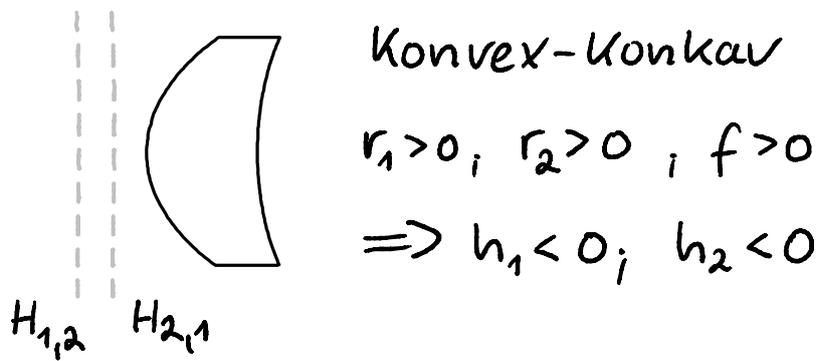
$$\Rightarrow h_1 = 0, h_2 < 0$$



bikonvex

$$r_1 > 0, r_2 < 0, f > 0$$

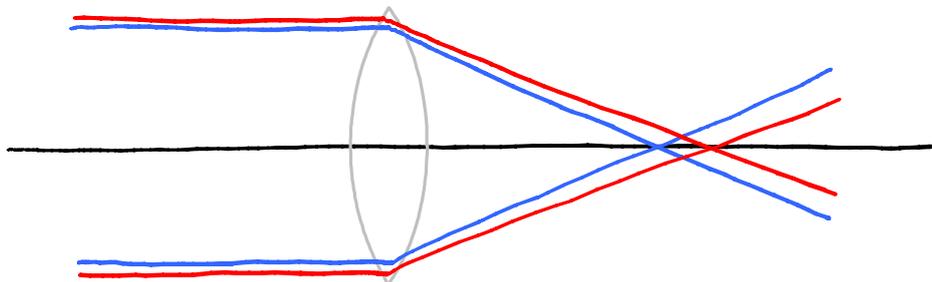
$$\Rightarrow h_1 > 0, h_2 < 0$$



## 10. Aberrationen

i) Chromatische Aberration  $n = n(\lambda)$

$$\text{Brechkraft } P(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} = (n(\lambda) - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$



normale Dispersion  $n_{\text{blau}} > n_{\text{rot}}$

$$\Delta P = (n(\lambda_{<}) - n(\lambda_{>})) \underbrace{\left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}_{\equiv \frac{1}{n(\bar{\lambda}) - 1} \frac{1}{f}}$$

$\lambda_{<}, \lambda_{>}, \bar{\lambda}$  kleine, große, mittlere Wellenlänge

$$\Rightarrow \Delta P = \frac{n(\lambda_<) - n(\lambda_>)}{n(\bar{\lambda}) - 1} \frac{1}{f} \equiv \frac{1}{\nu_d} \frac{1}{f}$$

$$\nu_d = \frac{n(587\text{nm}) - 1}{n(486\text{nm}) - n(656\text{nm})}$$

Abbe Zahl

- mißt chromatische Aberration  $n \neq n(\lambda) \Rightarrow \nu_d = \infty$
- normale Dispersion:  $\nu_d > 0$
- Kronglas:  $\nu_d > 50$ ; Flintglas:  $\nu_d < 50$
- $\lambda_< = 486\text{nm}$  blau H
- $\lambda_> = 656\text{nm}$  rot H
- $\bar{\lambda} = 587\text{nm}$  gelb Hg

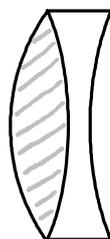
Korrektur: Achromat mit Doublett

$$\Delta P_1 + \Delta P_2 = \frac{1}{\nu_{d1} f_1} + \frac{1}{\nu_{d2} f_2} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{aber } P_1 + P_2 \neq 0)$$

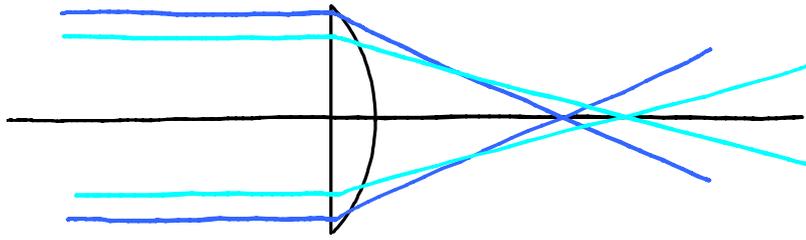
$$\Rightarrow \nu_{d1} f_1 = -\nu_{d2} f_2$$

$$\Rightarrow f_1 f_2 < 0 ; f_1 \neq -f_2 ; \nu_{d1} \neq \nu_{d2}$$

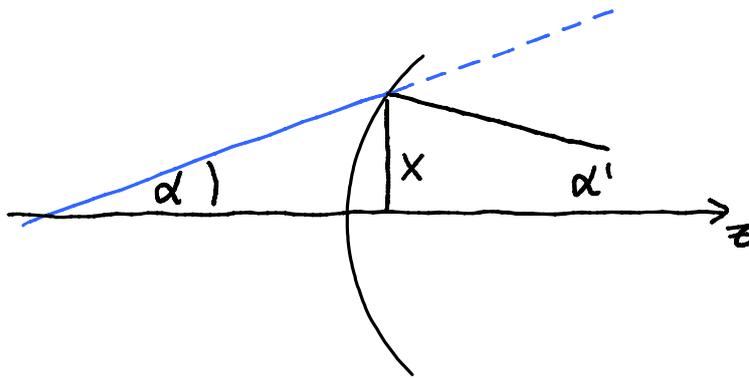
Achromat



## ii) Sphärische Aberration



achsferne Strahlen werden früher fokussiert



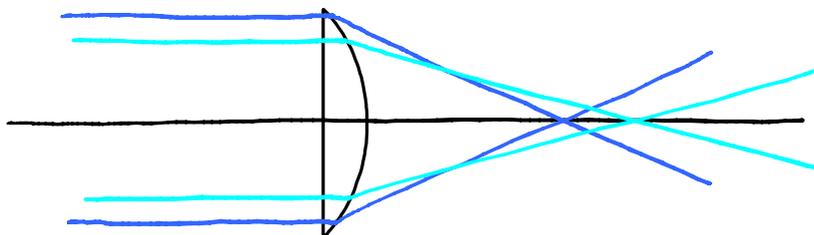
paraxiale Näherung:  $\alpha' = M_{11}\alpha + M_{12}x = \alpha - \frac{x}{f}$

Realität:  $\alpha' = \alpha - \frac{x}{f} + S_1 x^3 + S_2 x^5 + \dots$

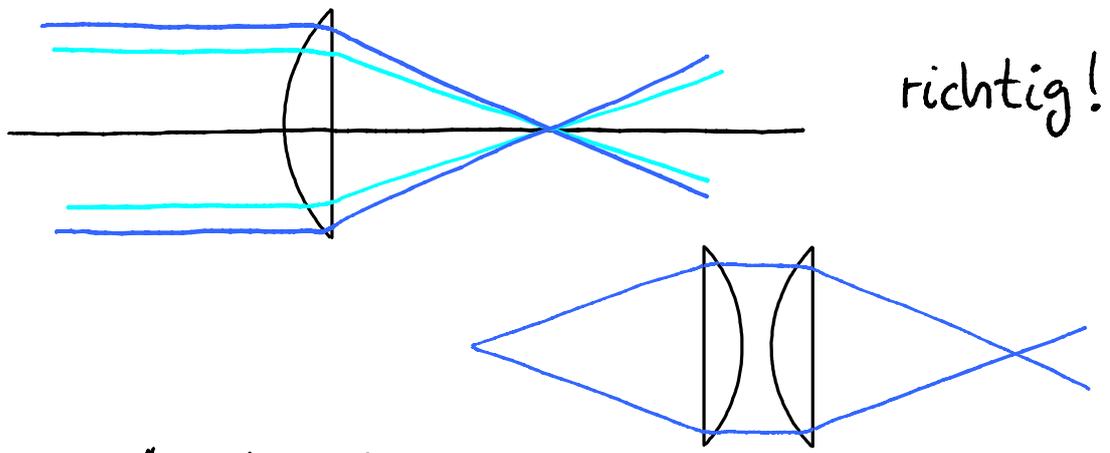
↑  
(nur ungerade Potenzen)

Korrekturen:

- nur achsnaher Strahlen (abblenden)
- Brechung auf viele Flächen verteilen

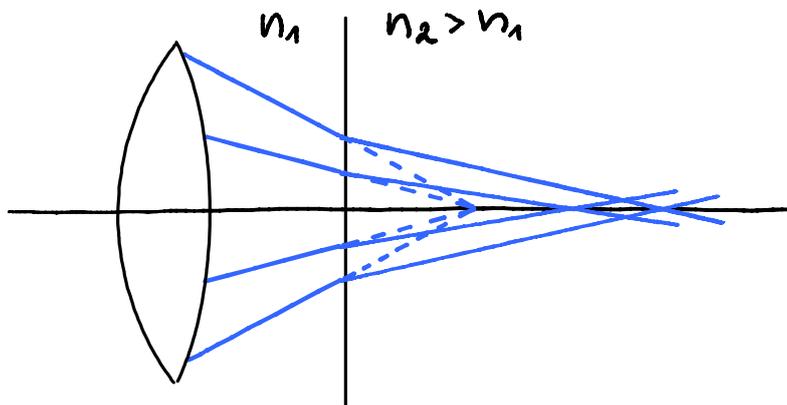


falsch!



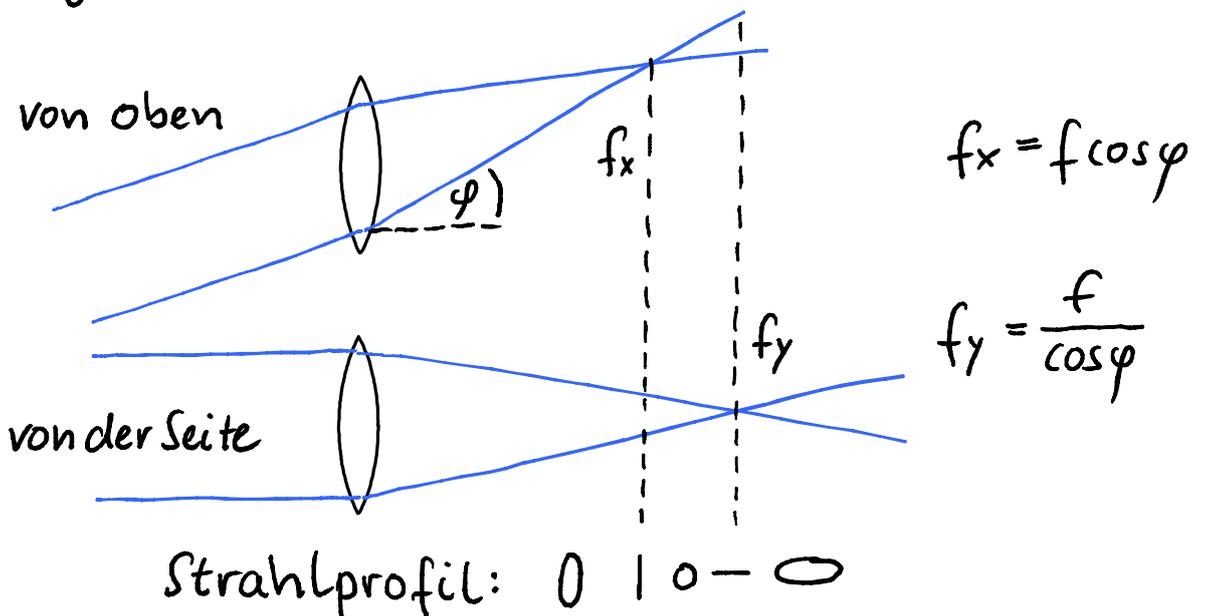
- asphärische Linsen  
teuer, perfekt nur für ein b, g Paar  
u.U. großer Astigmatismus

- sphärische Aberration an ebener Fläche

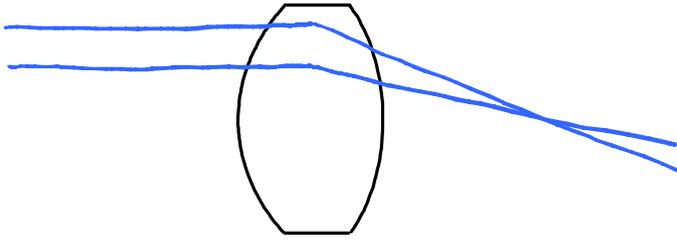


Vorkompensation im Linsensystem (Mikroskop)

### iii) Astigmatismus und Koma

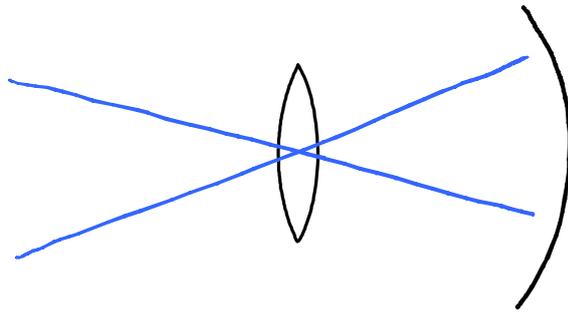


## Astigmatismus dicker Linsen



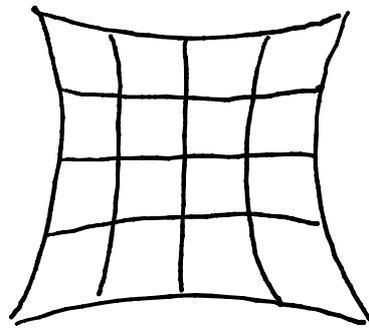
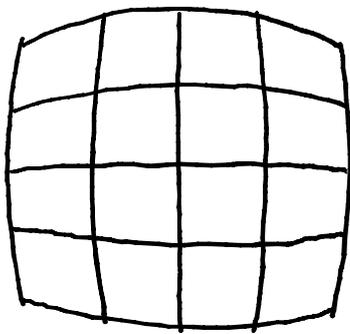
Brennweite  
radial  $\neq$   
Brennweite  
azimuthal

## iv) Bildfeldwölbung



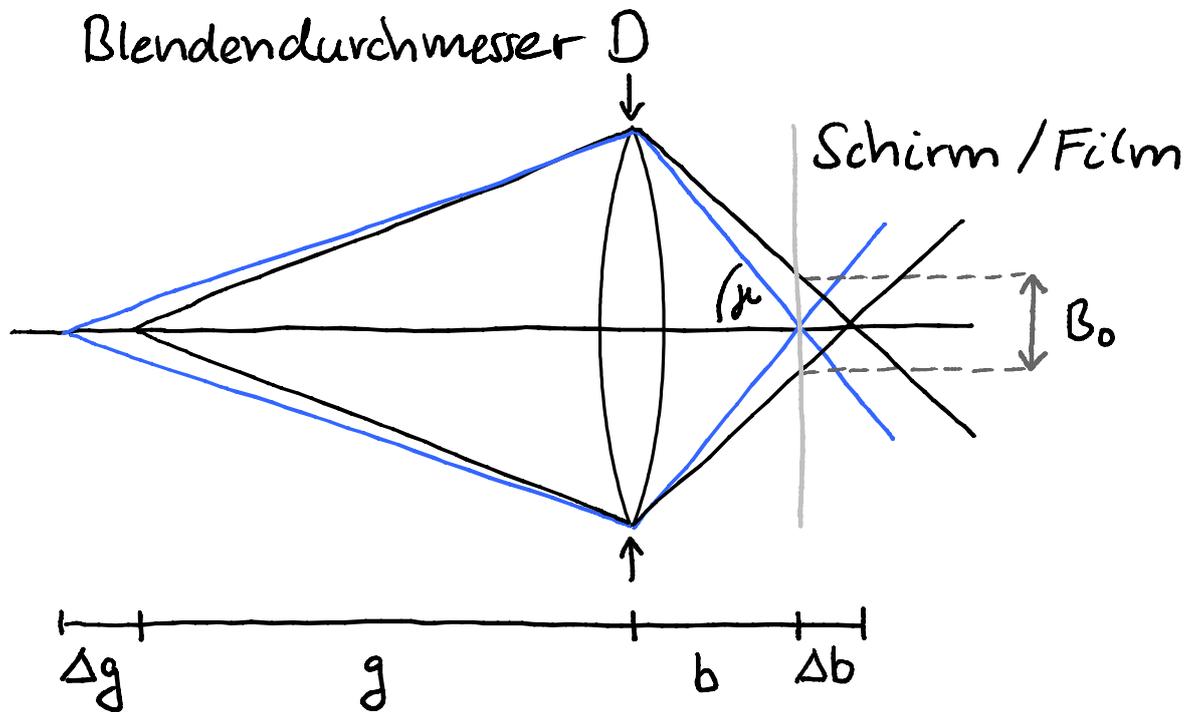
scharfes Bild  
auf gekrümmten  
Schirm

## v) Tonnen und Kissenverzerrung



Kompensation aller Aberrationen nicht möglich  
Bester Kompromiss meist kompliziertes System  
(außer bei Laseroptik)

- Endliche Schärfentiefe, auch bei perfekter Linse  
(wird nicht zu den Aberrationen gezählt)



z.B. Fotoapparat:  $b \approx f$ ;  $g \gg f$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{D}{b} \approx \frac{1}{2} \frac{D}{f}$$

$$B_0 \approx 2\alpha \Delta b = \frac{D}{f} \Delta b = \frac{D}{f} |v_L| \Delta g = \frac{D}{f} \frac{f^2}{(g-f)^2} \Delta g \approx \frac{Df}{g^2} \Delta g$$

$$\Rightarrow \Delta g = \frac{B_0 g^2}{Df} \sim \frac{1}{D}$$

$\Rightarrow$  Blende klein  $\Rightarrow$  Schärfentiefe groß  
aber: "Lichtmenge"  $\sim D^2$  klein

Blendenzahl  $F \equiv \frac{f}{D} = 1,4 / 2 / 2,8 / 4 / 5,6 / 8 \dots$

in Schritten von  $\sqrt{2}$ : halbe "Lichtmenge"

$$F = \frac{1}{2NA} \quad NA = \frac{D}{2f} \quad \text{numerische Apertur}$$

(beste Linsen  $NA \approx 1$ )

Beispiele:

- Film mit Korngröße  $B_0 = 25 \mu\text{m}$

$$g = 5\text{m} \quad F = 4 \quad f = 50\text{mm} \quad D = 12,5\text{mm}$$

$$\Rightarrow \Delta g = 1\text{m}$$

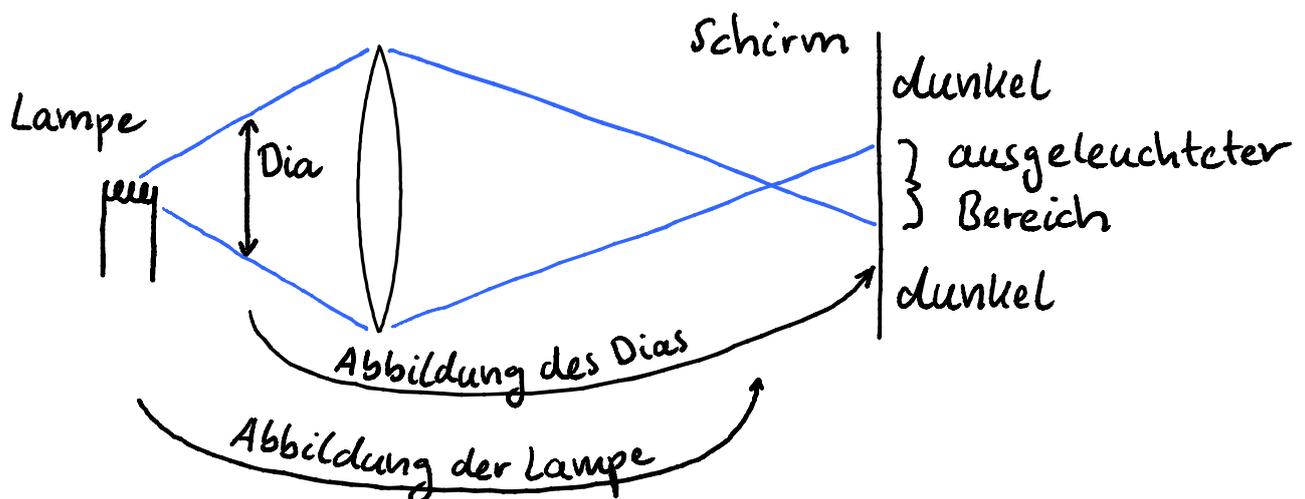
- Fixfokus Objektiv (Pocketkamera)

$$F = 5,6 \quad f = 35\text{mm} \quad D = 5,6\text{mm} \quad B_0 = 50\mu\text{m}$$

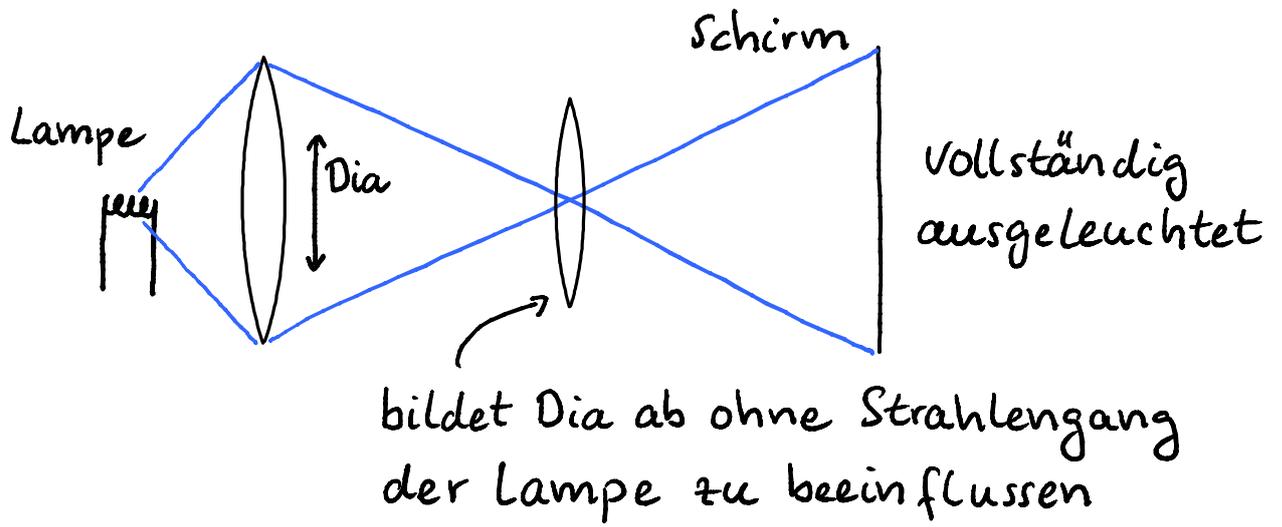
$$\Rightarrow g = 2\text{m} \dots \infty \quad (g_{\min} = \frac{Df}{2B_0})$$

## 11. Optische Instrumente

i) Projektor: Gegenstand Dia, LCD, DMD...



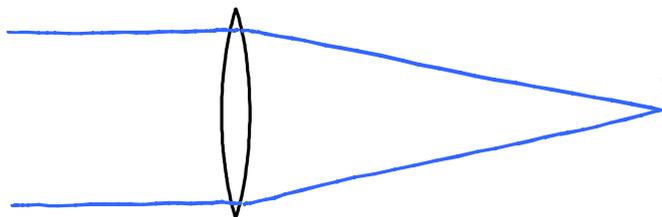
besser:



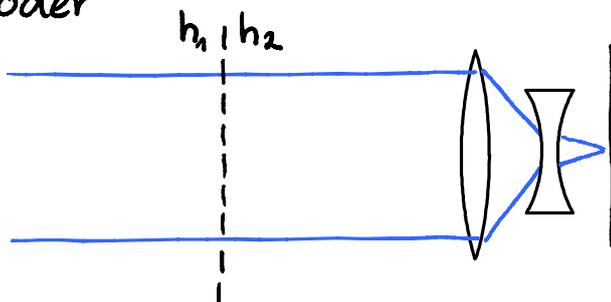
ii) Teleobjektiv

$$|V_T| = \left| \frac{f}{f-g} \right| \approx \frac{f}{g} \quad f \ll g$$

⇒ großes  $f$ : große Vergrößerung

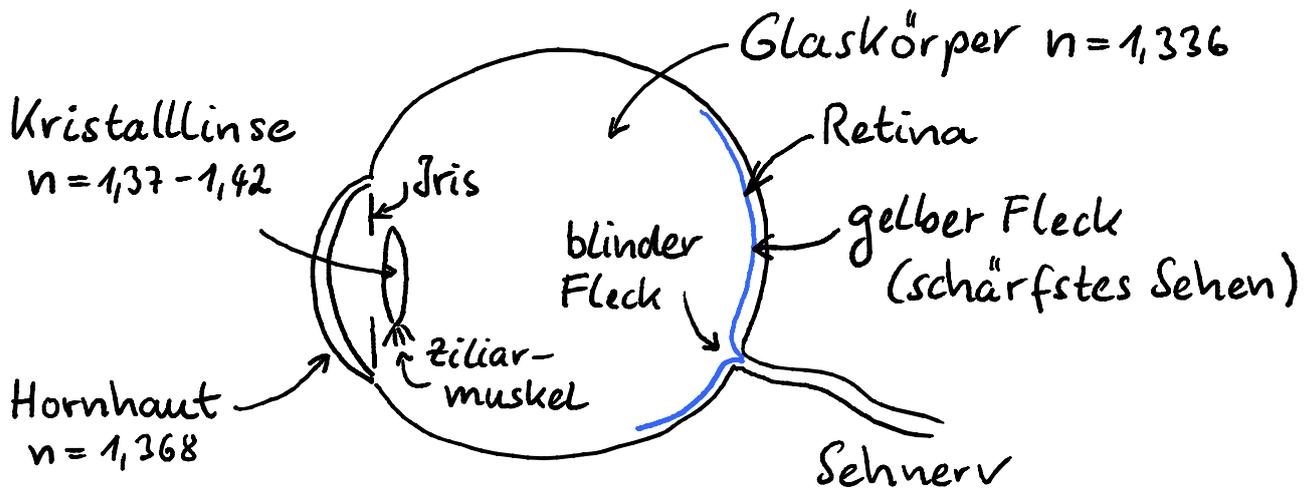


oder



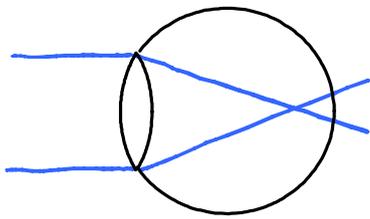
- Kurzes Objektiv mit gleicher Brennweite
- variable Brennweite durch Verschieben der Linsen (Zoom)

### iii) Auge

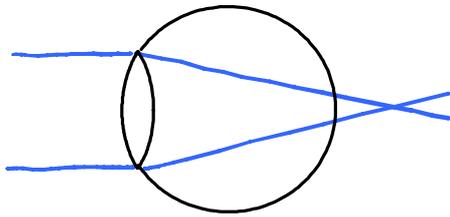


←—————|—————→  
 $f = 14-17\text{mm}$      $f = 19-23\text{mm}$

- Zwei Brennweiten
- "Pixelgröße" im gelben Fleck  $\approx 9\mu\text{m}$
- Gehirn kompensiert viele Fehler und Aberrationen
- Retina: 2 Sorten von "Sensoren"
  - Zapfen (RGB), nicht besonders empfindlich
  - Stäbchen (SW), sehr empfindlich,  $10^{-17}\text{W}$
- entspannte Linse auf  $\infty$  scharf gestellt
- "Arbeitsabstand"  $s_0 \equiv 25\text{cm}$



Kurzsichtigkeit

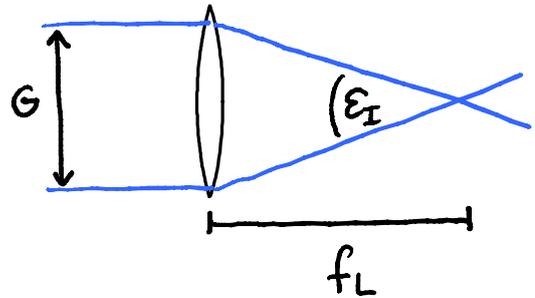
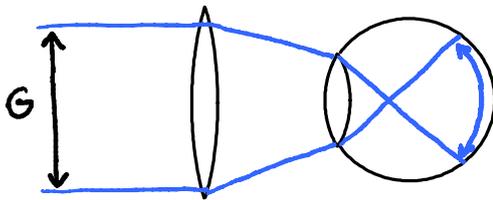


Weitsichtigkeit

- Winkelvergrößerung optischer Instrumente

$$V \equiv \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}} = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_o} \neq V_T$$

iv) Lupe (ab 1000 n. Chr)



$$\varepsilon_o = \frac{G}{s_o}$$

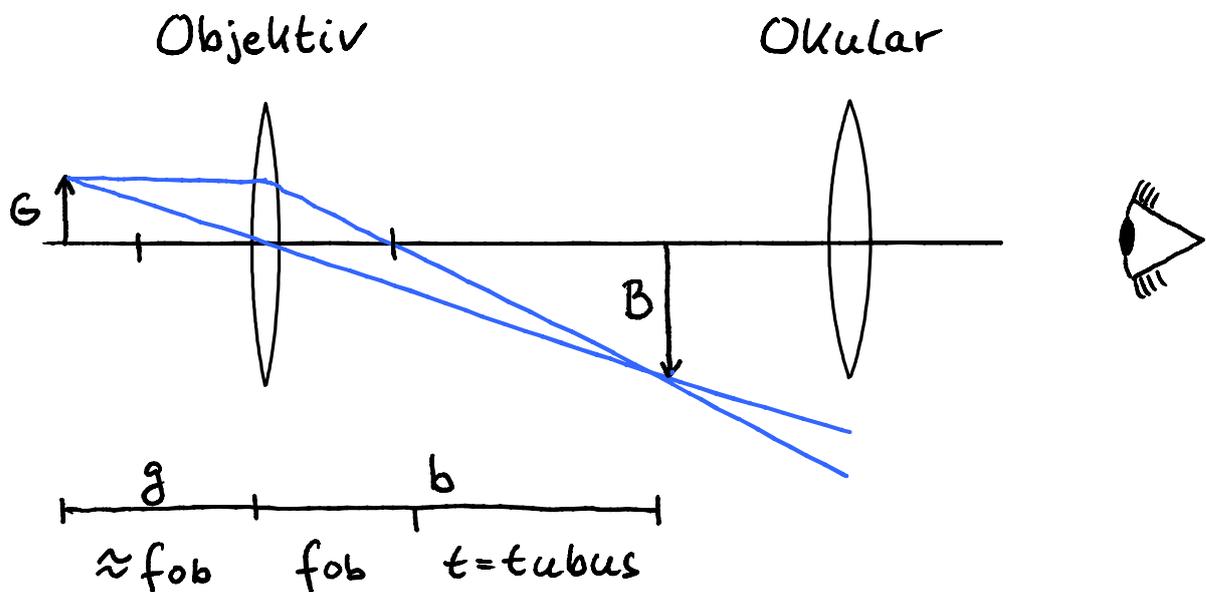
$$\varepsilon_I = \frac{G}{f_L}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{s_o}{f_L}}$$

Winkelvergrößerung  
Lupe

- $V \approx 5$  mit einer Linse;  $V \approx 20$  mit Linsensystem

## V) Mikroskop (ab 17 Jhd)



- Zweistufige Vergrößerung:

Objektiv erzeugt Zwischenbild mit:

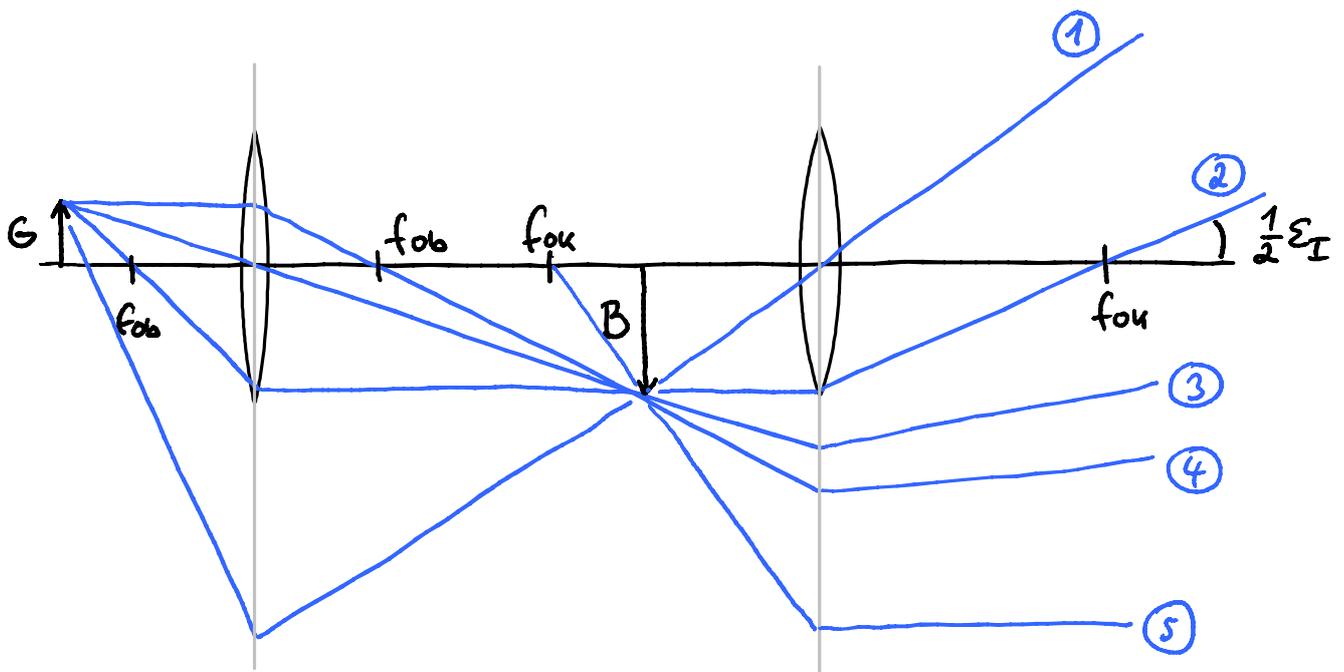
$$|V_T| = \frac{b - f_{ob}}{f_{ob}} = \frac{t}{f_{ob}}$$

- betrachte das Zwischenbild mit Lupe  $f_{ok}$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{t s_0}{f_{ob} f_{ok}}} \quad \begin{array}{l} \text{Winkelvergrößerung} \\ \text{Mikroskop} \end{array}$$

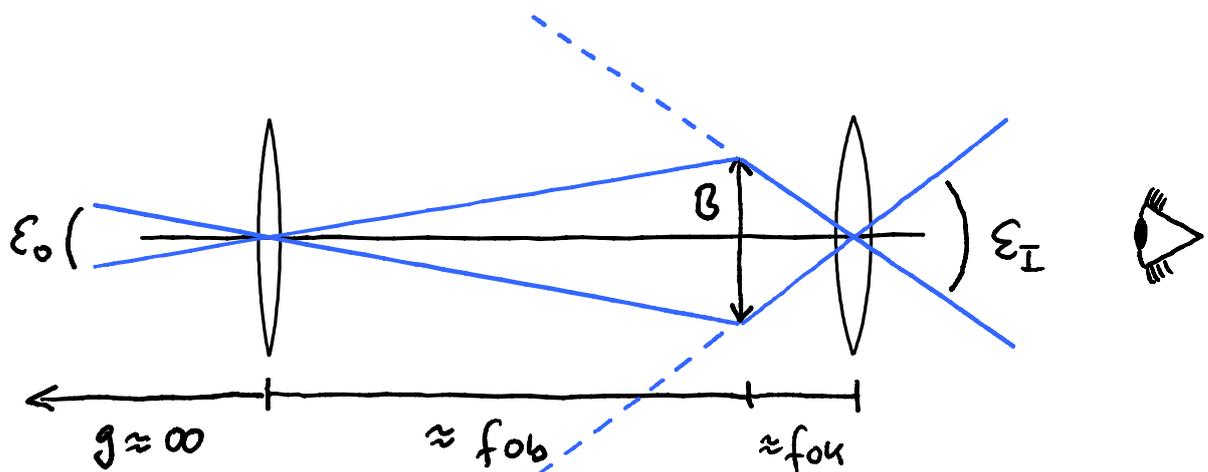
- Kurze Brennweiten  $\Rightarrow$  starke Vergrößerung
- Limitierung durch Wellenoptik (später mehr)

• Konstruktion



- Objektiv: Konstruktion von ②, ③ und ④
- Okular: Konstruktion von ①, ② und ⑤
- Für Winkel  $\epsilon_I$  reicht ②
- Abbildung auch mit Matrizenmethode
- $g \approx f_{ob} \Rightarrow B \gg G$

vi) Fernrohr (Kepler 1611)



- Für Winkel  $\varepsilon_I$  reicht einer dieser Strahlen
- Jetzt: Gegenstand sehr weit weg

$\Rightarrow$  Zwischenbild bei  $b \approx f_{ob}$ ,  $B \ll G$

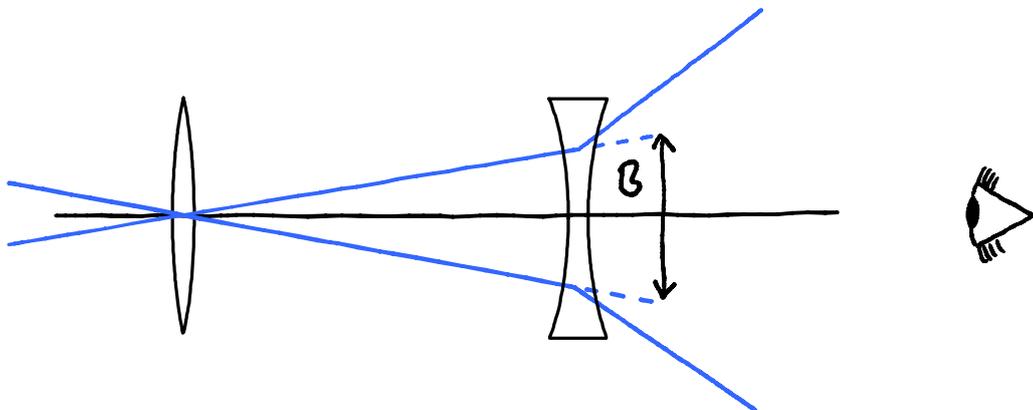
- Wieder Betrachtung mit Lupe  $f_{ok}$
- Objektiv erzeugt verkleinertes Zwischenbild

$$|V_T| = \frac{f}{f-g} = \frac{b-f}{f} \approx 0 \quad (g \approx \infty, b \approx f)$$

$$\varepsilon_o = \frac{B}{f_{ob}} \quad \varepsilon_I = \frac{B}{f_{ok}} \quad v = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_o}$$

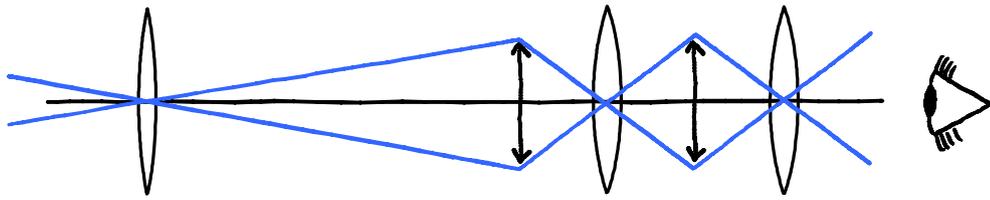
$\Rightarrow$   $v = \frac{f_{ob}}{f_{ok}}$  Winkelvergrößerung  
Teleskop

- $f_{ob}$  groß;  $f_{ok}$  klein  $\Rightarrow$  starke Vergrößerung
- Galilei'sches Fernrohr (terrestrisch)



aufrecht stehendes Bild  $v = \left| \frac{f_{ob}}{f_{ok}} \right|$

auch mit 3 Linsen:



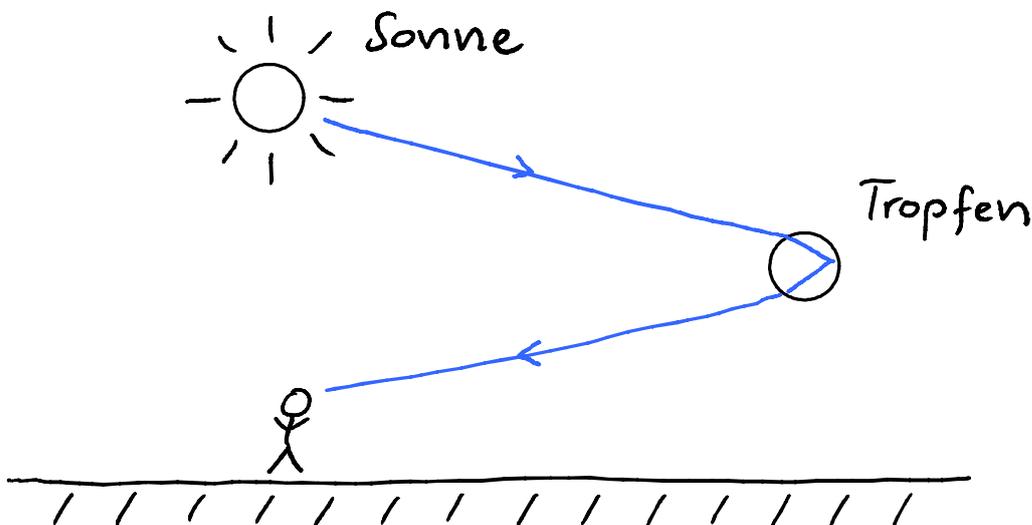
oder Feldstecher (Umkehrprisma)

• Lichtstärke  $\sim D_{ob}^2$  (sehr wichtig)

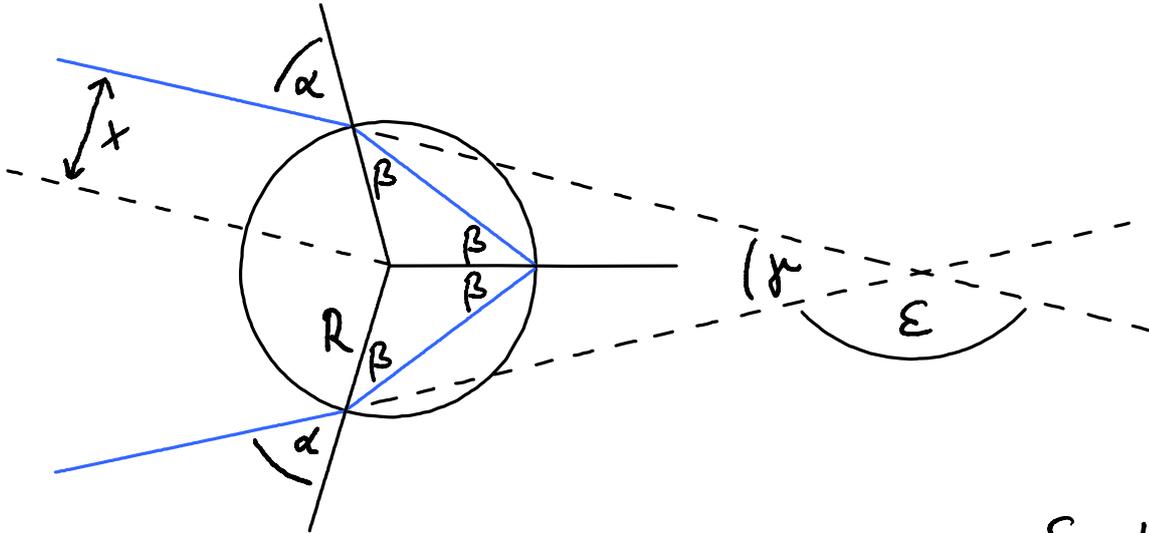
• Auflösung  $\Delta \varepsilon = \frac{1,22 \lambda}{D_{ob}}$  (später)

$\Rightarrow$  große Objektive: Linse  $\rightarrow$  Spiegel

- Regenbogen



Geometrie:



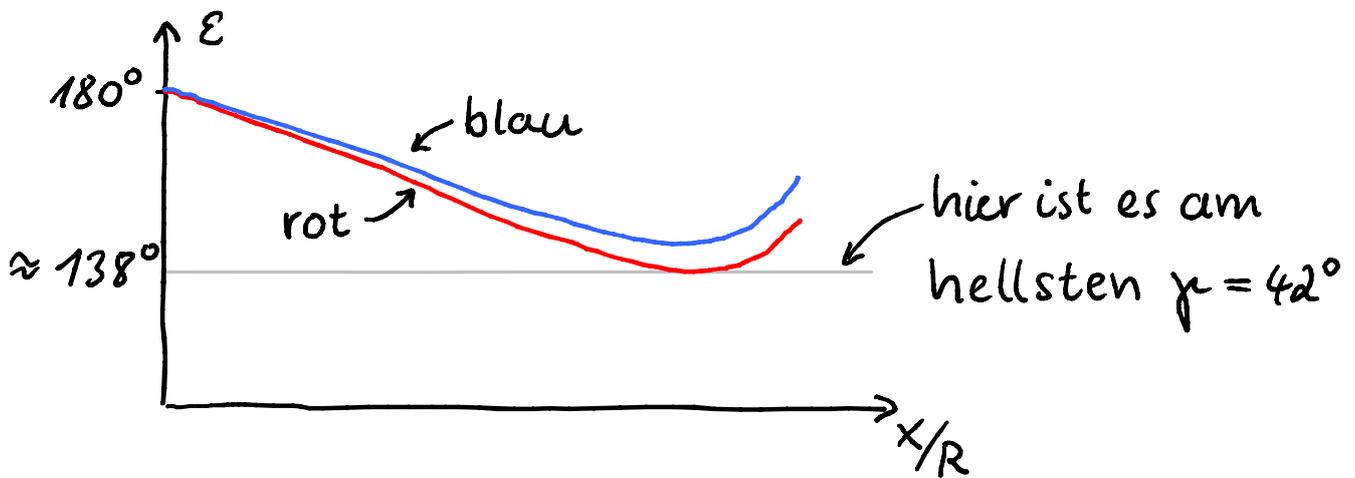
$$\epsilon = 180^\circ + 2d - 4\beta$$

$$\frac{x}{R} = \sin \alpha = n \sin \beta \quad \text{Snell}$$

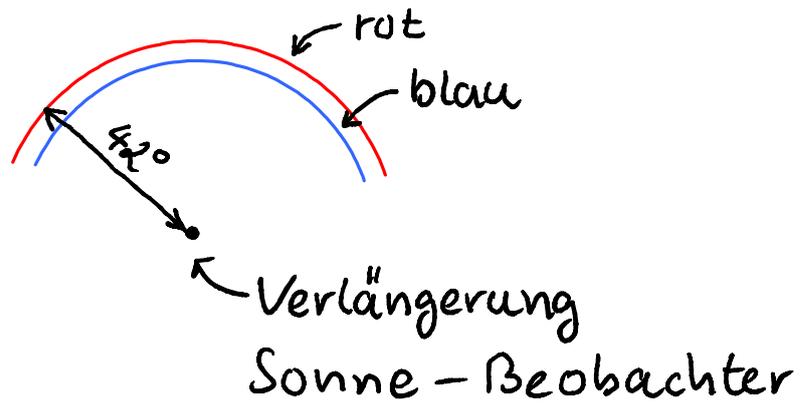
$$\Rightarrow \epsilon = 180^\circ + 2 \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) - 4 \arcsin\left(\frac{x}{nR}\right)$$

$$n(460 \text{ nm}) = 1,338$$

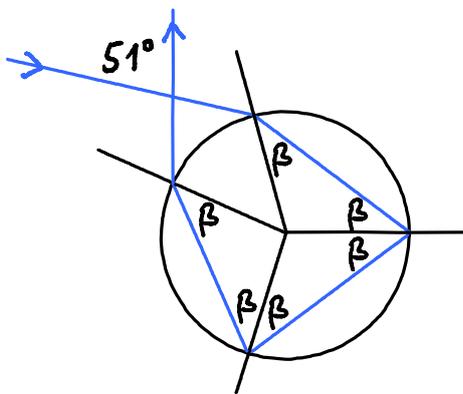
$$n(630 \text{ nm}) = 1,332$$



Beobachter

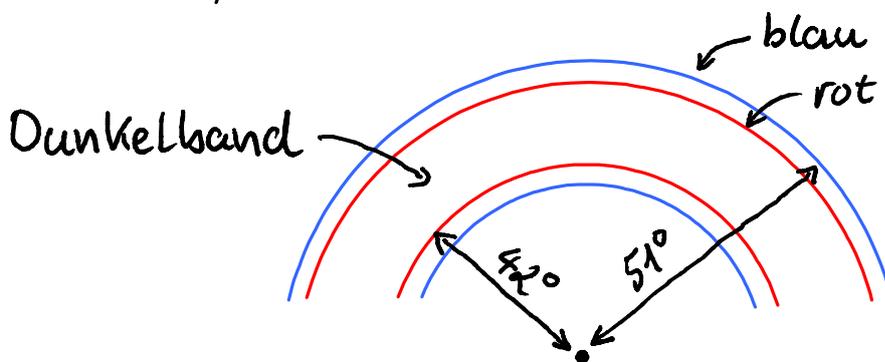


Nebenregenbogen



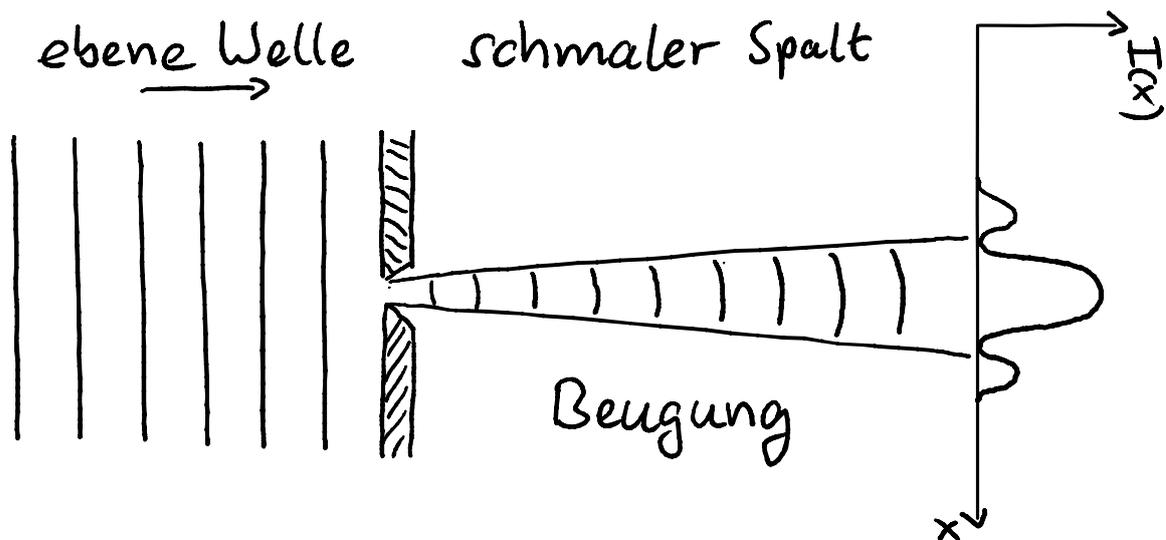
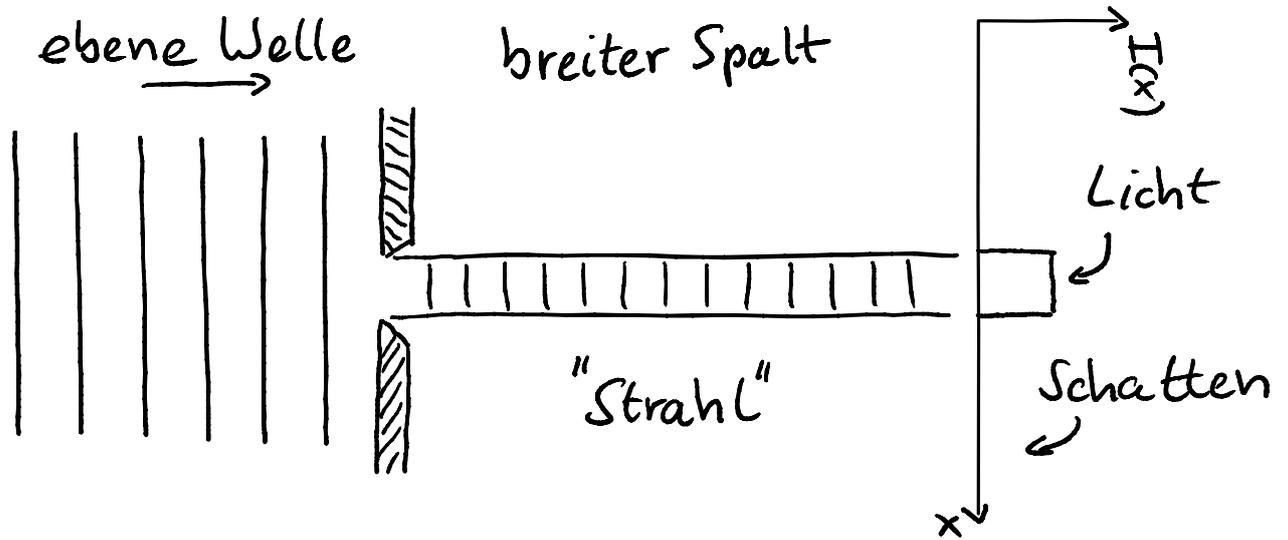
zusätzliche Reflexion

$\Rightarrow$  invertierte Farbfolge



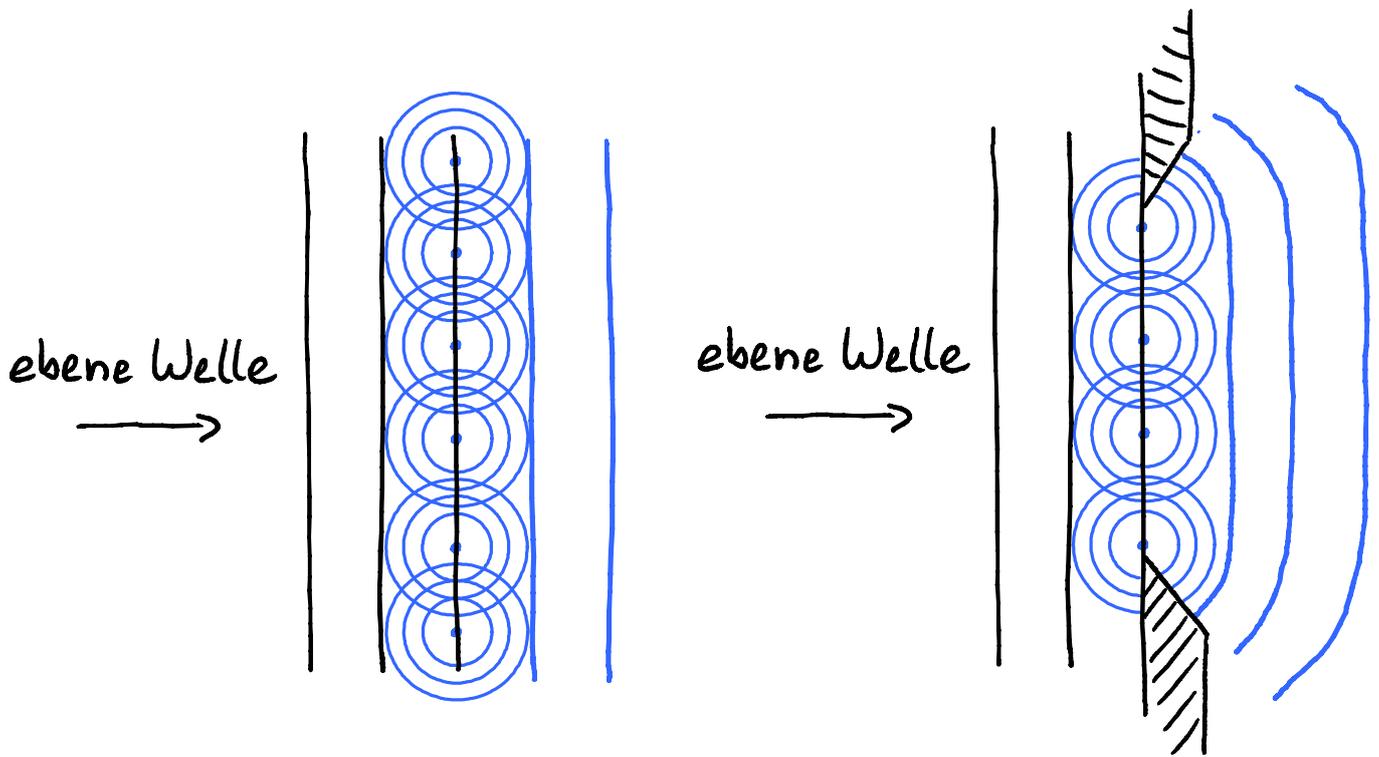
- Mehr Effekte durch Interferenz
- Farben hängen von Tröpfchengröße ab

## 12. Beugung

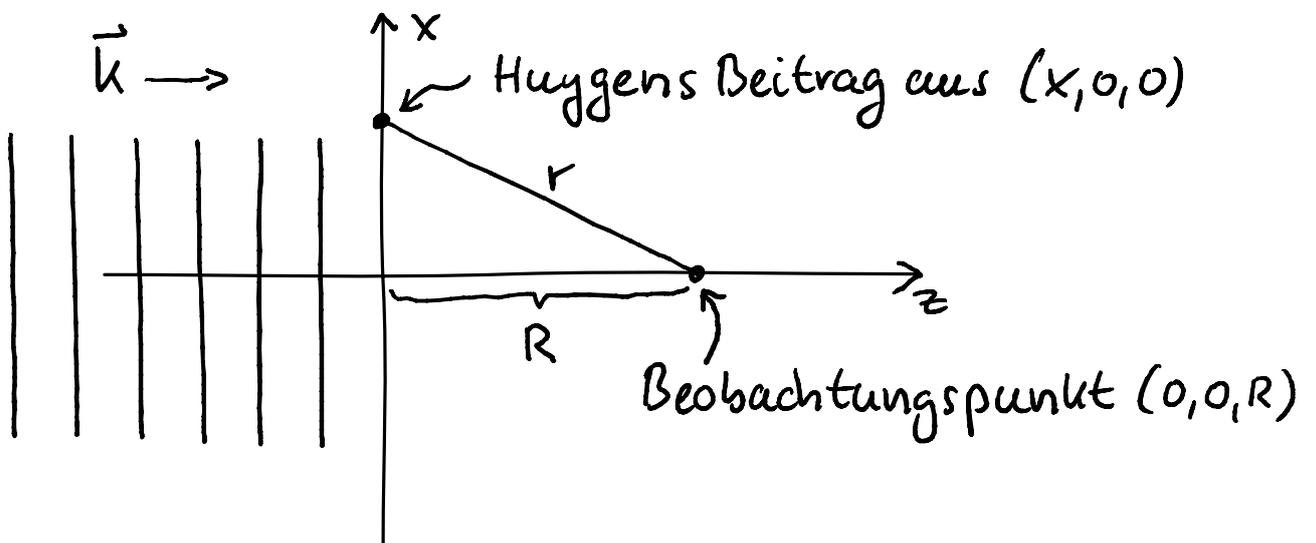


Huygen'sches Prinzip:

"Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt einer Kugelwelle betrachtet werden"



### - Fresnel'sche Beugung



- Phase der Kugelwelle  $(x, 0, 0)$  am Ort  $(0, 0, R)$

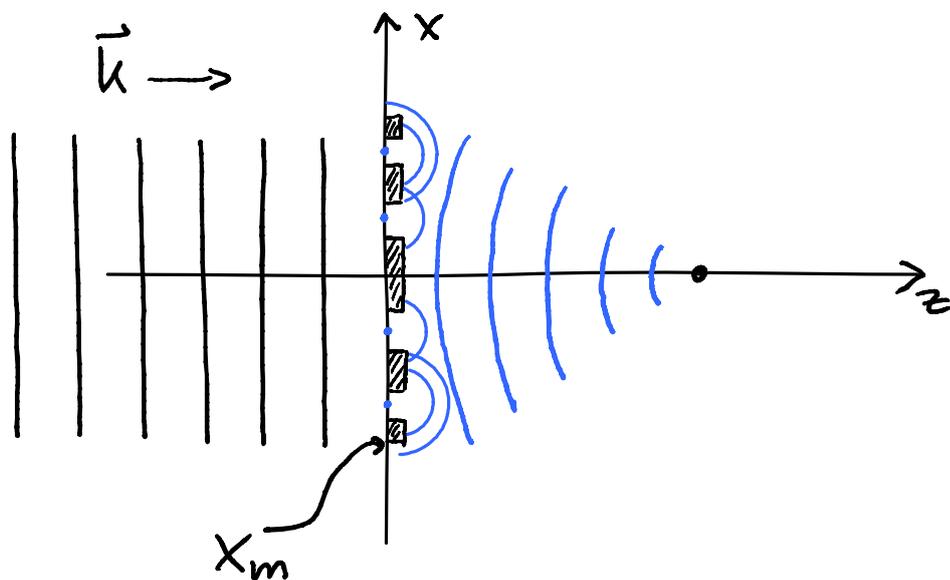
$$\varphi = kr = k \sqrt{x^2 + R^2}$$

- Vorzeichenwechsel des Felds bei  $\Delta\varphi = m\pi$

d.h. bei  $r = R + m \frac{\lambda}{2} \quad m \in \mathbb{Z}$

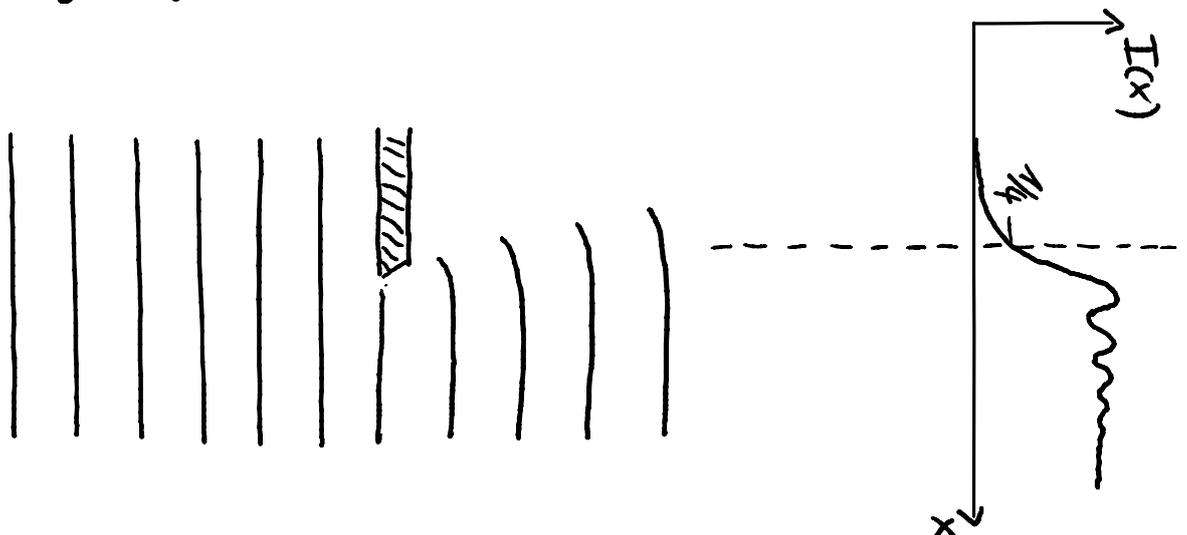
$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + R^2} = R + m \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_m = \pm \sqrt{Rm\lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4}}$$

- Ohne Blenden addieren sich alle Kugelwellen wieder zur ebenen Welle. Störe destruktive Interferenz durch Blenden:

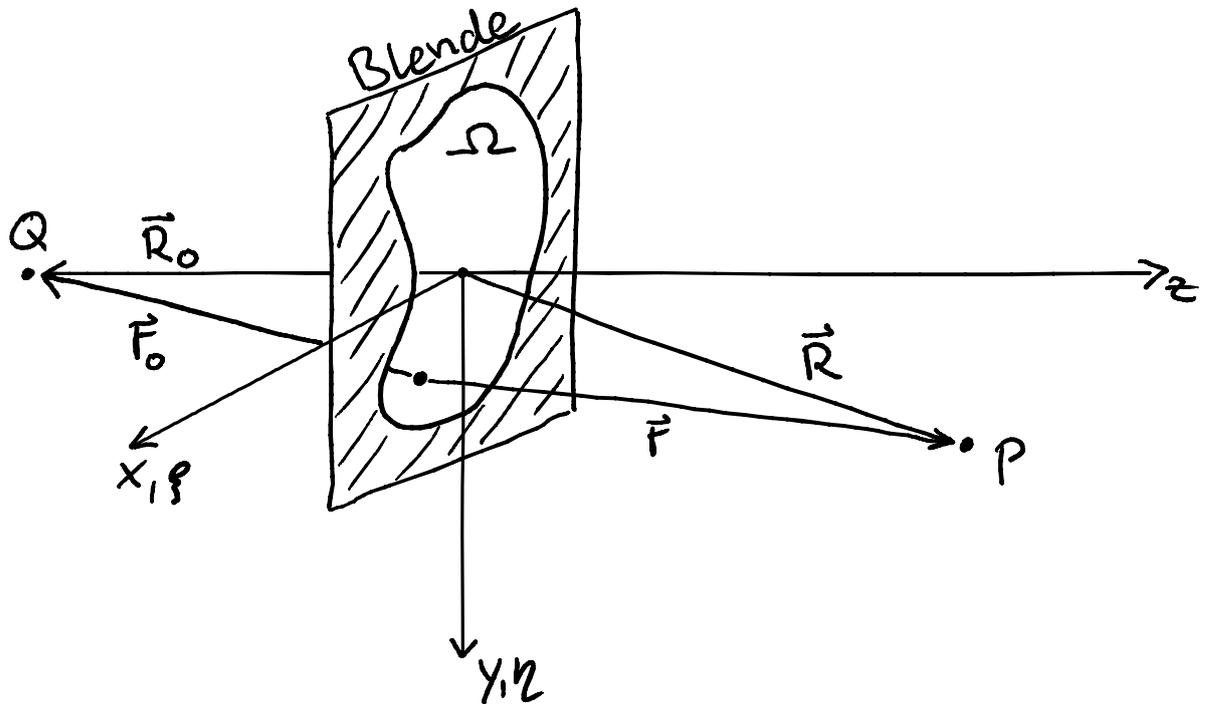


$\Rightarrow$  Linse: Fresnel'sche Zonenplatte

— Beugung an Kante



- Fresnel-Kirchhoffsche Beugungstheorie  
(skalares Feld, nur eine Polarisation)



$\vec{R}_0 = (0, 0, -z_0)$  : Position der Quelle

$\vec{R} = (x, y, z)$  : Beobachtungspunkt

$\xi, \eta$  : Koordinaten in der Blendenöffnung

Huygens:

- $Q$  sendet eine Kugelwelle zum Punkt  $(\xi, \eta, 0)$ :

$$\text{Feld: } U(\xi, \eta) = E_0 \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} \quad r_0 = \left| \vec{R}_0 - \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

- Punkt  $(\xi, \eta, 0)$  emittiert Kugelwelle:

$$\text{Feld in } P \sim U(\xi, \eta) \frac{e^{-ikr}}{r} \quad r = \left| \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{R} \right|$$

iii) Gesamtfeld in P = Summe über alle  $(\xi, \eta, 0)$ :

$$u_p(\vec{R}) \sim E_0 \iint_{\Omega} \frac{e^{-ik(r+r_0)}}{rr_0} d\xi d\eta \quad \text{Beugungsintegral}$$

- Komplexe Schreibweise vorteilhaft
- meist keine einfache analytische Lösung

- Näherungen:

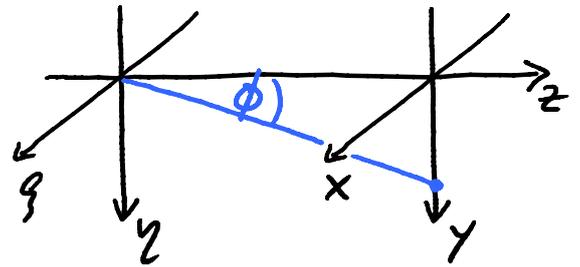
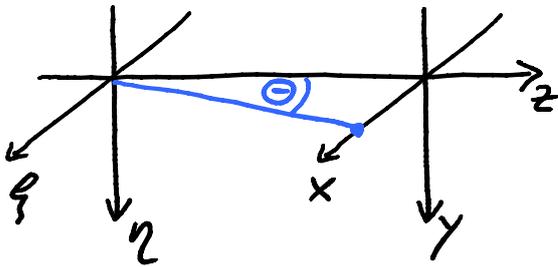
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2x\xi - 2y\eta + \xi^2 + \eta^2} \quad \leftarrow x^2 + y^2 + z^2 = |\vec{R}|^2 = R^2 \\ &= R \sqrt{1 - \frac{2x\xi}{R^2} - \frac{2y\eta}{R^2} + \frac{\xi^2}{R^2} + \frac{\eta^2}{R^2}} \quad \leftarrow \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} + \dots \\ &\approx R - \underbrace{\frac{x\xi}{R} - \frac{y\eta}{R}}_{\text{Fraunhofer Näherung}} + \frac{\xi^2}{2R} + \frac{\eta^2}{2R} \quad \leftarrow \text{oder } \frac{\xi^2}{2z} + \frac{\eta^2}{2z} \quad (R \approx z) \\ &\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Fresnel Näherung}} \end{aligned}$$

- Blendengröße  $w = \max(\xi, \eta)$  klein gegen  $R$
- Abstand  $R$  groß groß gegen  $(x, y)$  und  $(\xi, \eta)$

- Beugungsrichtung

$$\alpha \equiv \frac{x}{R} \equiv \sin \Theta$$

$$\beta \equiv \frac{y}{R} \equiv \sin \phi$$



$$\Rightarrow r \approx R - \alpha \xi - \beta \eta + \mathcal{O}\left(\frac{\xi^2}{R}, \frac{\eta^2}{R}\right)$$

analoge Näherung für Quelle:

$$r_0 \approx R_0 + \alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + \mathcal{O}\left(\frac{\xi^2}{R_0}, \frac{\eta^2}{R_0}\right)$$

- Näherung versagt für  $k \left( \frac{\xi^2}{R_0}, \frac{\eta^2}{R_0}, \frac{\xi^2}{R}, \frac{\eta^2}{R} \right) \gtrsim 2\pi$

$$\text{d.h. für: } \frac{W^2}{R_0 \lambda}, \frac{W^2}{R \lambda} \gtrsim 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Fernfeld } R \gg \frac{W^2}{\lambda}}$$

- Punkt P und Quelle im Fernfeld:

- Quelle leuchtet Blende gleichmäßig aus
- P empfängt von jedem Punkt der Blende die gleiche Intensität

$\Rightarrow r_0, r \approx \text{const}$  im Nenner des Beugungsintegrals

$$\Rightarrow U_p(\alpha, \beta) \sim \iint_{\Omega} e^{ik(\alpha - \alpha_0)\xi + ik(\beta - \beta_0)\eta} d\xi d\eta$$

- Blendenfunktion  $\Omega(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{innerhalb der Blende} \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases}$

• Komplexe Blendenfunktion und  $0 < |\Omega| < 1$  möglich

• senkrechte Beleuchtung:  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$

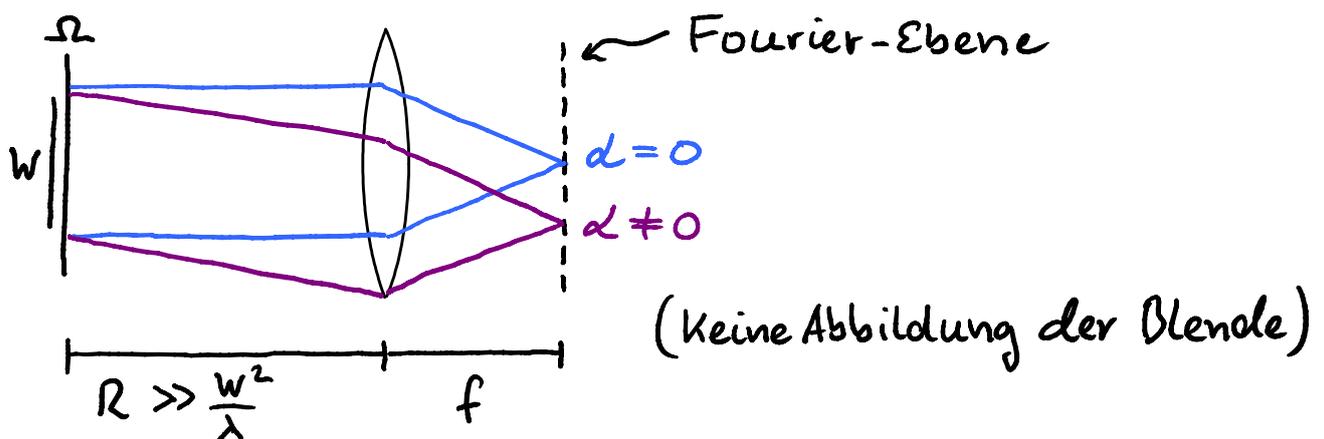
$$\Rightarrow U_p(\alpha, \beta) \sim \iint_{-\infty - \infty}^{+\infty + \infty} \Omega(\xi, \eta) e^{ik\alpha\xi + ik\beta\eta} d\xi d\eta$$

Fraunhofer-Beugung im Fernfeld

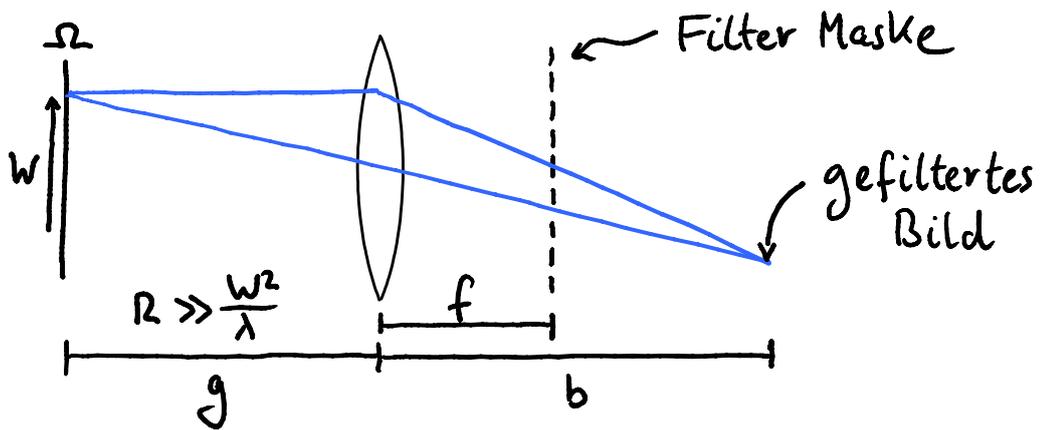
• 2 Dimensionale Fourier Transformation der

Blendenfunktion:  $U_p(\alpha, \beta) \sim \text{F.T.} \left\{ \Omega(\xi, \eta) \right\} \begin{matrix} \xi \rightarrow k\alpha \\ \eta \rightarrow k\beta \end{matrix}$

- Abbildung des Beugungswinkels



- ohne Beugung (Strahlenoptik)  $\alpha=0 \Rightarrow \delta$ -Funktion
- mit Beugung  $\Rightarrow$  F.T.  $\{\Omega\}$  in Fourierebene
- Filtern in Fourierebene:



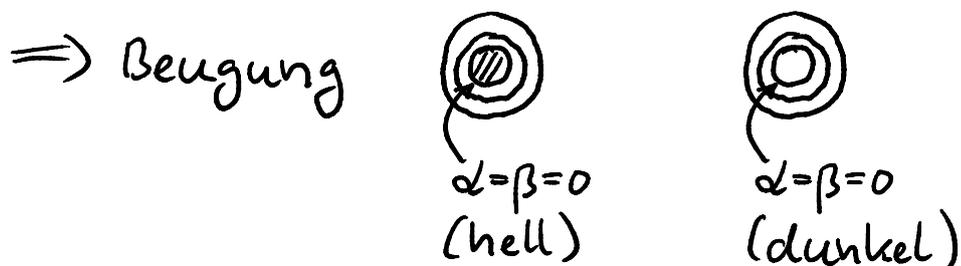
### - Babinet'sches Prinzip

- Komplementäre Blenden  $\Omega + \Omega' = 1$
- ohne Blende  $\Omega + \Omega'$  keine Beugung: nur  $\alpha = \beta = 0$

$$\Rightarrow U_p(\alpha, \beta) + U_p'(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{für } \alpha \neq 0 \quad \beta \neq 0$$

$$\Rightarrow I_p(\alpha, \beta) = I_p'(\alpha, \beta) \quad \text{für } \alpha \neq 0 \quad \beta \neq 0$$

- Beispiel  $\Omega = \text{[hatched square with circle]}$   $\Omega' = \text{[circle]}$



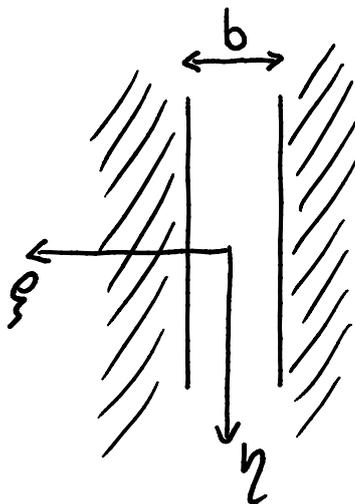
- Poisson'scher Fleck (Arago Spot):

Beugung an Kreisscheibe oder Kugel



### 13. Beugung an Blenden und Gitter

i) Schlitzblende



$$\Omega(\xi, \eta) = \Omega(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{b}{2} < \xi < +\frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_p(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(\xi) e^{ik\alpha\xi} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\beta\eta} d\eta$$

$$= \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ik\alpha\xi} d\xi \times 2\pi \delta(k\beta)$$

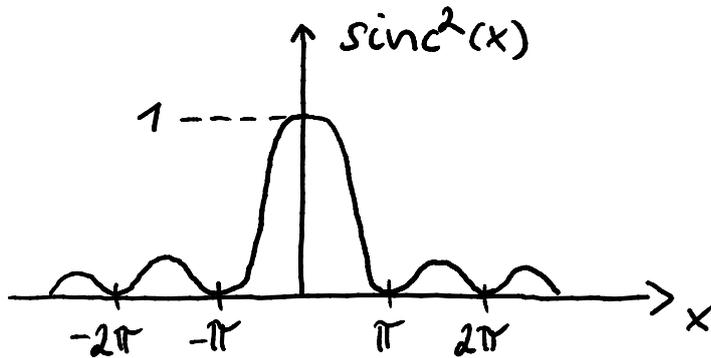
↑ keine Beugung  $\parallel \eta$

$$= \frac{1}{-ik\alpha} \left( e^{-ik\alpha b/2} - e^{+ik\alpha b/2} \right) 2\pi \delta(k\beta)$$

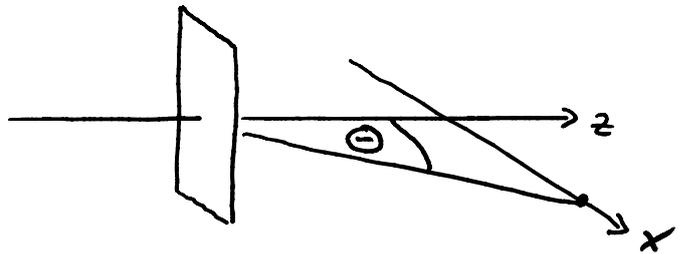
$$= b \frac{\sin(k\alpha b/2)}{k\alpha b/2} 2\pi \delta(k\beta)$$

$$\Rightarrow I(\alpha) \sim b^2 \operatorname{sinc}^2(k\alpha b/2)$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$



genauer:  $\alpha = \frac{x}{R} = \sin \theta$



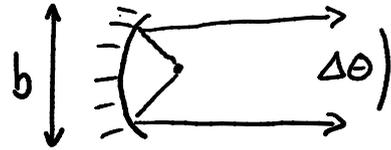
$$\Rightarrow \frac{I(\theta)}{I(0)} = \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}} \right)^2$$

Beugung an  
Schlitzblende

Beugungsminima:  $\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} = n\pi$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sin \theta_{\min} = \pm \frac{\lambda}{b} ; \pm 2 \frac{\lambda}{b} ; \dots \\ \text{zentrales Maximum: } \Delta \theta = 2 \frac{\lambda}{b} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{Beugungswinkel} \\ \sim \frac{\lambda}{b} \end{array}$$

Beispiele: • Richtfunk



$$b = 1\text{m} \quad \lambda = 3\text{cm} \quad (10\text{GHz}) \Rightarrow \Delta\theta = 3,6^\circ$$

• Laser

$$b = 1\text{cm} \quad \lambda = 500\text{nm} \Rightarrow \Delta\theta = 0,0057^\circ$$

Beugungsmaxima:  $A \equiv \frac{\pi b \alpha}{\lambda} = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \Theta$

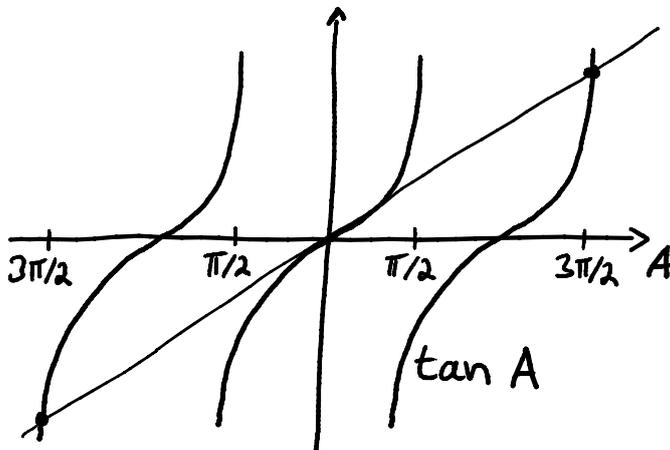
$$\frac{d}{dA} \text{sinc}^2(A) = \frac{2A^2 \cos A \sin A - 2A \sin^2 A}{A^4} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \tan A = A$$

numerisch:  $\sin \Theta_{\max} = \pm 1,43 \dots \frac{\lambda}{b}$ ;  $\pm 2,46 \dots \frac{\lambda}{b}$ ; ...

$$\frac{I(\Theta_{\max})}{I(0)} = 0,047 \dots ; 0,017 \dots$$

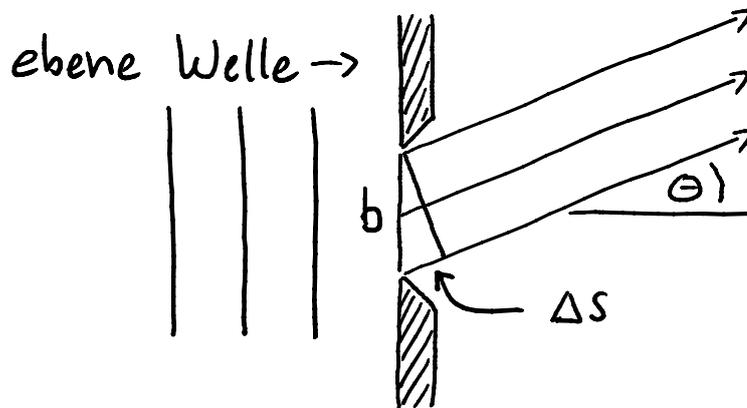
Näherung für große Winkel  $A \gg 1$



$$\Rightarrow A \approx (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

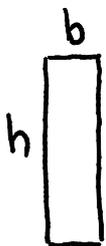
$$\Rightarrow \sin \Theta_{\max} \approx \pm \frac{3}{2} \frac{\lambda}{b} ; \pm \frac{5}{2} \frac{\lambda}{b} ; \dots$$

## Geometrische Interpretation:



- $\Delta s = \lambda$ : jeder "Strahl" findet einen um  $\frac{\lambda}{2}$  phasenverschobenen Partner  $\Rightarrow$  Minimum
- gilt auch für  $\Delta s = n\lambda$
- für  $\Delta s = (n + \frac{1}{2})\lambda$  bleibt der maximale Rest

## ii) Beugung an Rechteckblende

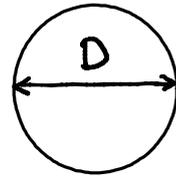


Beugungswinkel  $\alpha, \beta$  unabhängig

$$\Rightarrow \frac{I(\alpha, \beta)}{I(0, 0)} = \frac{\sin^2 A}{A^2} \frac{\sin^2 B}{B^2}$$

$$\text{mit } A = \frac{\pi b \alpha}{\lambda} = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \quad B = \frac{\pi h \beta}{\lambda} = \frac{\pi h \sin \phi}{\lambda}$$

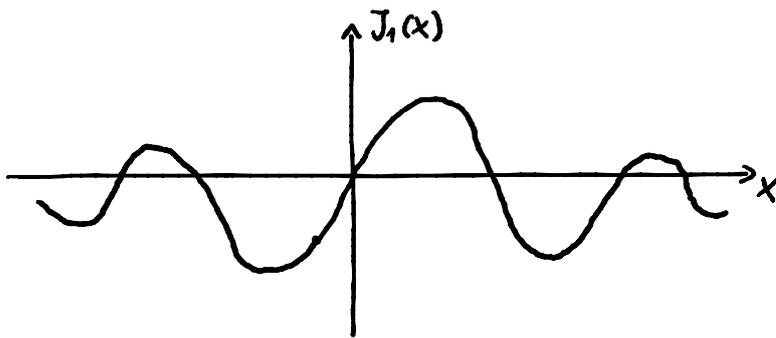
iii) Beugung an runder Lochblende  
(häufiger Fall)



Integral "analytisch" lösbar:

$$I(\theta) \sim \left( \frac{J_1\left(\frac{\pi D a}{\lambda}\right)}{\frac{\pi D a}{\lambda}} \right)^2$$

Besselfunktion  $J_1(x)$  statt  $\sin(x)$ ;  $D$  statt  $b$



$\frac{J_1(x)}{x}$  ähnlich  
wie  $\frac{\sin(x)}{x}$

Besselfunktion n-ter Ordnung:

$$J_n(x) = \sum_r \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}}{(n+r)! r!}$$

ähnlich wie  $\sin(x) = \sum_r \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!}$ ;  $\cos(x) = \sum_r \frac{(-1)^r x^{2r}}{(2r)!}$

1. Beugungsminimum

$$\left(\frac{J_1(x)}{x}\right)^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow J_1(x) = 0$$

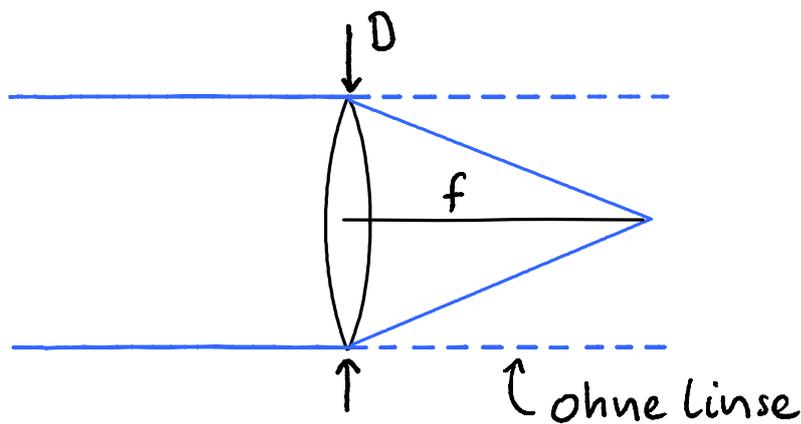
numerisch:  $x_{\min} = 3,832... \stackrel{!}{=} \frac{\pi D \sin \Theta_{\min}}{\lambda}$

$\Rightarrow \boxed{\sin \Theta_{\min} = 1,22... \frac{\lambda}{D}}$  Beugungsminimum an Kreisblende

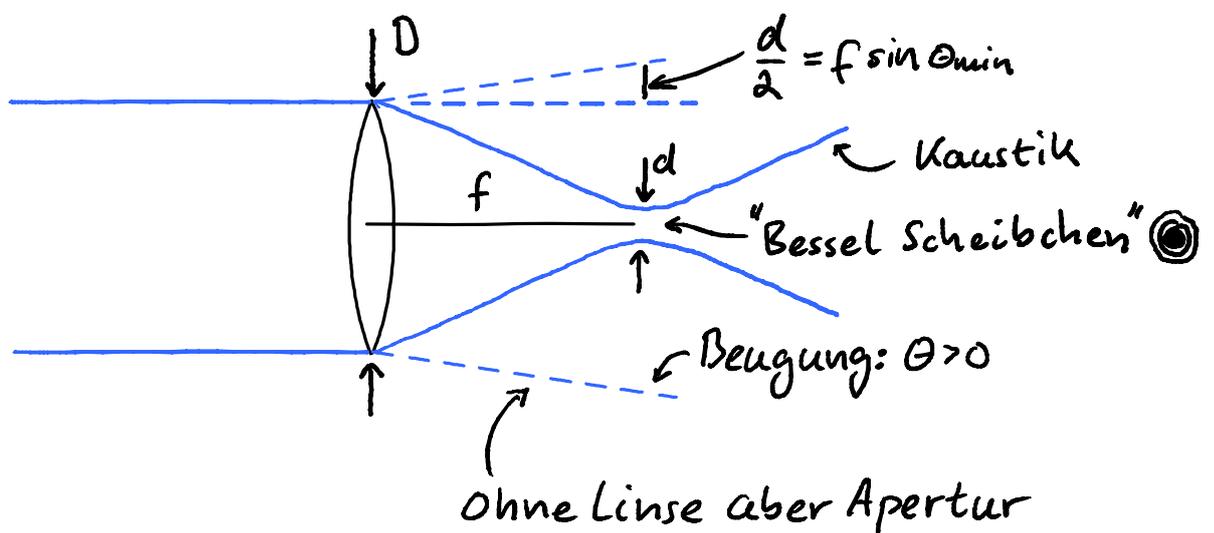
• Wieder  $\sim \frac{\lambda}{\text{"Größe"}}$ ; Vorfaktor aus Geometrie

### - Beugungsgrenze Abbildung

geometrisch:



Wellenoptisch:



- genaue Form der fokussierten Welle später
  - bessere Begründung für  $d \neq 0$
- "Strahlengang" umkehren:

Fokus leuchtet Linse genau aus falls:

$$\sin \theta_{\min} = 1,22 \dots \frac{\lambda}{n d} = \frac{D}{2f} \quad n \neq 1 \Rightarrow \lambda \rightarrow \frac{\lambda}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{2} = 1,22 \dots \frac{\lambda}{n} \frac{f}{D}} \quad \text{Beugungsgrenze der Abbildung}$$

- auch  $d = 1,22 \dots \frac{\lambda}{NA} \quad (NA = \frac{D}{2f})$
- stärker fokussieren  $\Rightarrow$  kleinerer Fokus
- kleinere Wellenlänge  $\frac{\lambda}{n} \Rightarrow$  kleinerer Fokus
- Teleskop Winkelauflösung:  $\Delta \varepsilon = 1,22 \dots \frac{\lambda}{D}$

- Beispiele:

Auge:  $D \approx 1,2 \dots 9 \text{ mm}$   $\lambda = 500 \text{ nm}$   $n = 1,3$   $f = 20 \text{ mm}$

$$\Rightarrow d = 2 \dots 16 \mu\text{m} \quad (\text{Zapfengröße} \approx 9 \mu\text{m})$$

Hubble:  $D = 2,4 \text{ m}$   $\lambda = 500 \text{ nm}$

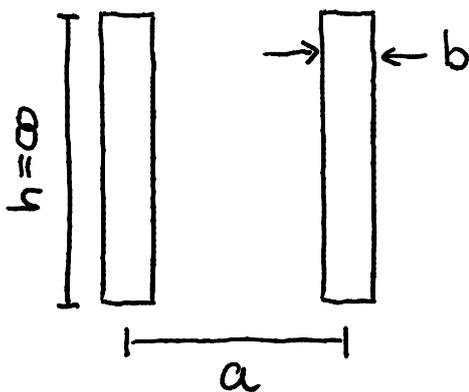
$$\Rightarrow \sin \theta_{\min} = 2 \times 1,22 \frac{\lambda}{D} = 5 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

(180m auf dem Mond)

- Beugungsphänomene nur für  $d \approx \lambda$ ? Nein!

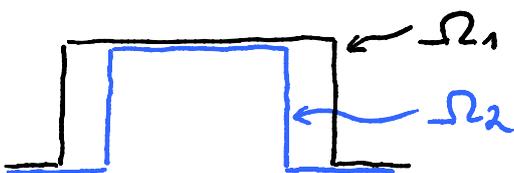
- Schlitzeblende erzeugt sinc auch für  $b \gg \lambda$   
im Fernfeld  $R \gg \frac{b^2}{\lambda}$ .
- Dimensionen  $\ll \lambda \Rightarrow$  geometrische Optik versagt  
Umkehrschluß nicht immer richtig!
- Beugungsphänomene auch bei kleinem Winkel  $\alpha \approx \frac{\lambda}{b}$
- Stern ( $\gg \lambda$ ) erzeugt "Bessel-Scheibchen"  
in der Brennebene eines Teleskops ( $D \gg \lambda$ )

iv) Doppelspalt



$$\Omega_1(\varphi) = \begin{cases} 1 & -\frac{a+b}{2} < \varphi < \frac{a+b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Omega_2(\varphi) = \begin{cases} 1 & -\frac{a-b}{2} < \varphi < \frac{a-b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \Omega_{DS}(\varphi) = \Omega_1(\varphi) - \Omega_2(\varphi)$$

$$U_p(\alpha) \sim \text{F.T.} \left\{ \Omega_{\text{DS}}(\xi) \right\}_{\xi \rightarrow k\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{\text{DS}}(\xi) e^{-ik\alpha\xi} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_1(\xi) - \Omega_2(\xi)) e^{-ik\alpha\xi} d\xi$$

$$= \frac{1}{-ik\alpha} \left( e^{-ik\alpha(a+b)/2} - e^{+ik\alpha(a+b)/2} - e^{-ik\alpha(a-b)/2} + e^{+ik\alpha(a-b)/2} \right)$$

$$= \frac{2}{k\alpha} \left( \sin\left(k\alpha\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) - \sin\left(k\alpha\left(\frac{a-b}{2}\right)\right) \right)$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y)$$

$$= 2\sin(y)\cos(x)$$

$$= 2b \cos(k\alpha a/2) \frac{\sin(k\alpha b/2)}{k\alpha b/2}$$

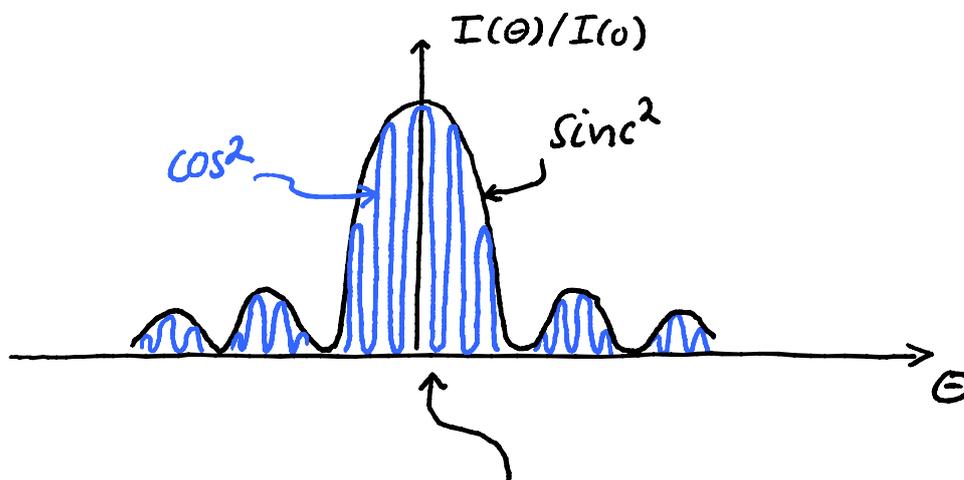
Intensität auf Achse:  $4b^2 \Rightarrow$

$$\frac{I(\alpha)}{I(0)} = \cos^2(k\alpha a/2) \frac{\sin^2(k\alpha b/2)}{(k\alpha b/2)^2}$$

Beugung am  
Doppelspalt

mit  $\alpha = \sin \Theta$

$a > b$



$a \gg b$ : zentrales Beugungsmuster

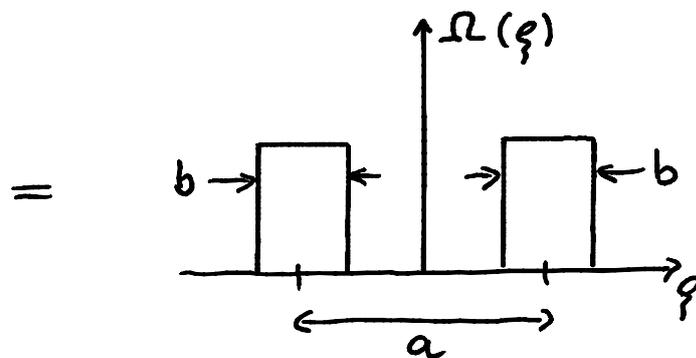
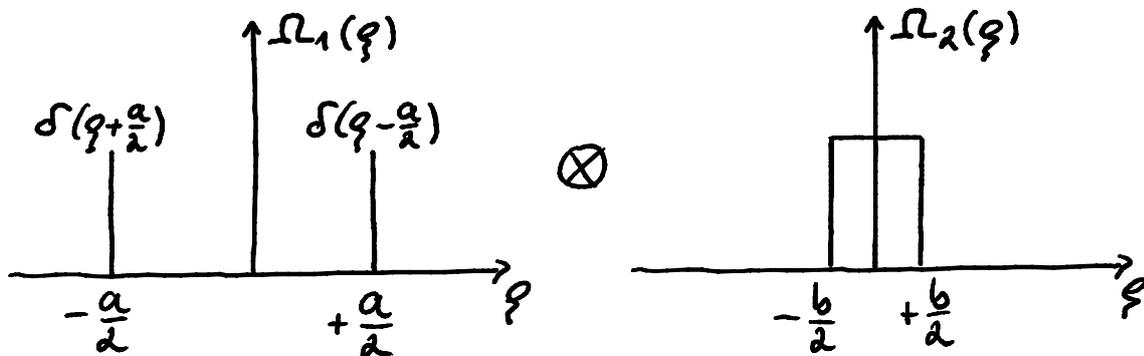
$I(\theta) \sim \cos^2(ka\alpha/2)$ ; sehr schmale Schlitze

einfache Herleitung: Interferenz zweier Punktquellen

- Faltung zweier Blendenfunktionen

$$\Omega(\xi) = \Omega_1(\xi) \otimes \Omega_2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_1(\xi) \Omega_2(\xi - \xi') d\xi'$$

Beispiel:



$$\begin{aligned} \Omega(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(\xi' + \frac{a}{2}) + \delta(\xi' - \frac{a}{2})) \Omega_2(\xi - \xi') d\xi' \\ &= \Omega_2(\xi - \frac{a}{2}) + \Omega_2(\xi + \frac{a}{2}) \end{aligned}$$

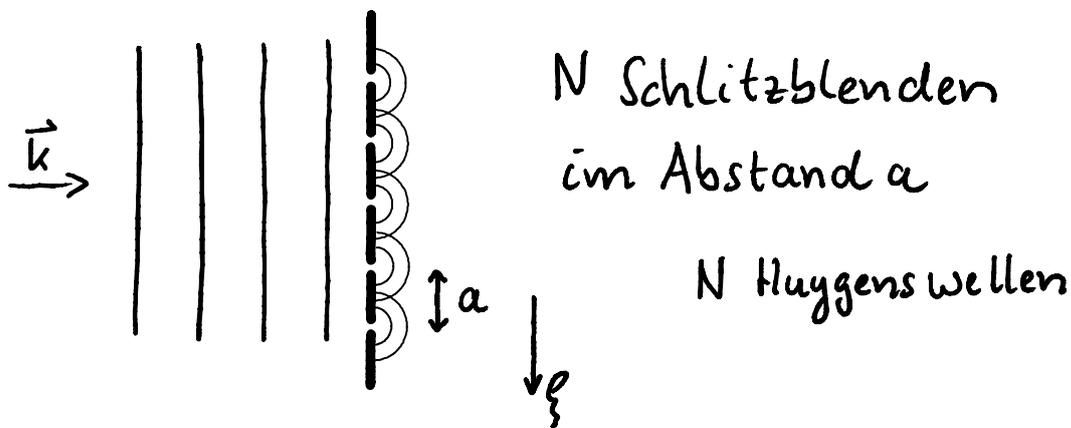
Faltungstheorem: F.T.  $\{f(t) \otimes g(t)\} = \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega)$

$$\text{F.T. } \{ \Omega_1(\xi) \} = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(\xi + \frac{a}{2}) + \delta(\xi - \frac{a}{2})) e^{-i\kappa a \xi} d\xi = 2 \cos(\kappa a / 2)$$

$$\text{F.T. } \{ \Omega_2(\xi) \} = b \text{sinc}(\kappa a b / 2)$$

$$\Rightarrow \text{F.T. } \{ \Omega(\xi) \} = 2b \cos(\kappa a / 2) \text{sinc}(\kappa a b / 2) \quad \checkmark$$

v) Beugung am Gitter



zunächst senkrechter Einfall und  $\delta$ -förmige Schlitz:

$$\Omega(\xi) \sim \sum_{m=0}^{N-1} \delta(\xi - am)$$

$$\text{F.T. } \{ \Omega(\xi) \}_{\xi \rightarrow \kappa a} \sim \sum_{m=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - ma) e^{-i\kappa a \xi} d\xi$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i\kappa a m}$$

$$= \frac{e^{-iN\kappa a} - 1}{e^{-i\kappa a} - 1}$$

(geometrische Reihe:

$$\sum_{m=0}^{N-1} z^m = \frac{z^N - 1}{z - 1} \quad z \neq 1$$

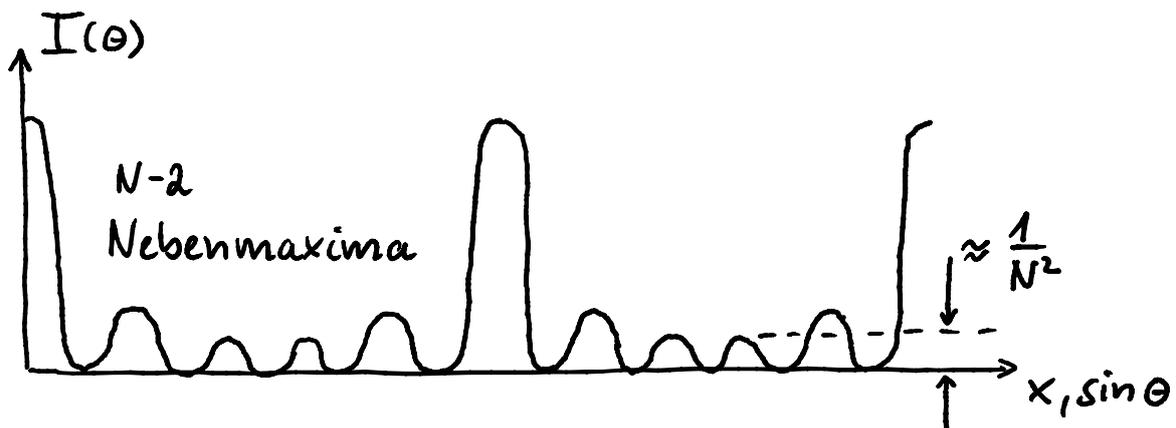
$$= \frac{-\frac{1}{2i} (e^{-iNk\alpha a/2} - e^{+iNk\alpha a/2}) e^{-iNk\alpha a/2}}{-\frac{1}{2i} (e^{-ik\alpha a/2} - e^{+ik\alpha a/2}) e^{-ik\alpha a/2}}$$

$$= \frac{\sin(Nk\alpha a/2)}{\sin(k\alpha a/2)} e^{-i(N-1)k\alpha a/2}$$

$\Rightarrow$  Intensität  $\sim \frac{\sin^2(Nk\alpha a/2)}{\sin^2(k\alpha a/2)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} N^2$   $\swarrow$  2x l'Hospital

$$\Rightarrow \frac{I(\theta)}{I(0)} = \frac{\sin^2(Nk \frac{a}{2} \sin \theta)}{N^2 \sin^2(k \frac{a}{2} \sin \theta)}$$

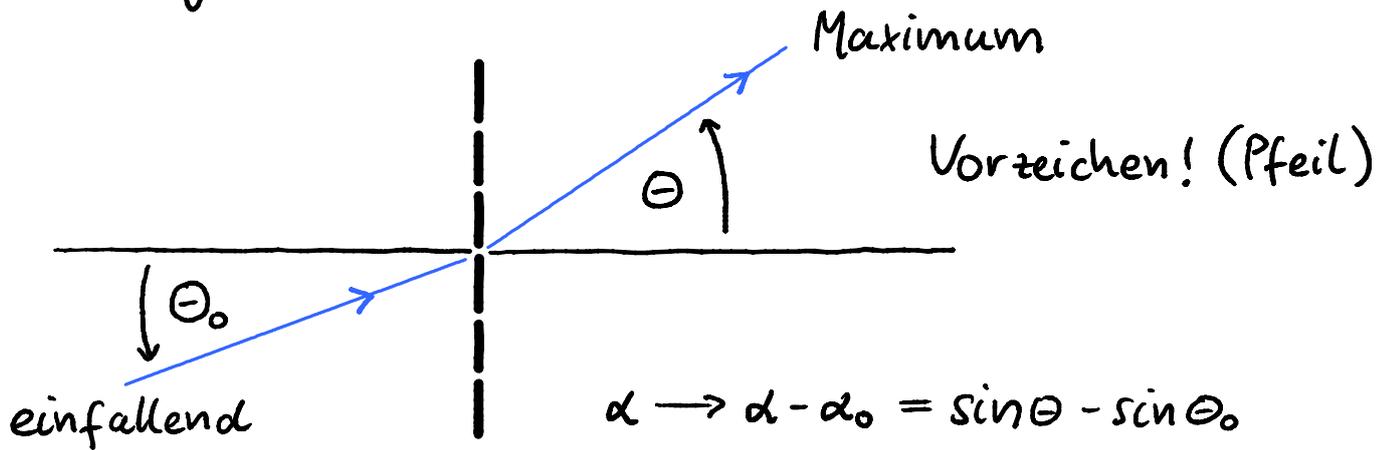
Beugung am Gitter  
mit  $N$  Spalten im  
Abstand  $a$



Hauptmaxima  $\frac{\sin^2(Nx)}{N^2 \sin^2(x)}$  bei  $x = n\pi$   $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$   
(Nenner = 0)

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} \sin \theta_{\max} = n\pi \Rightarrow a \sin \theta_{\max} = n\lambda$$

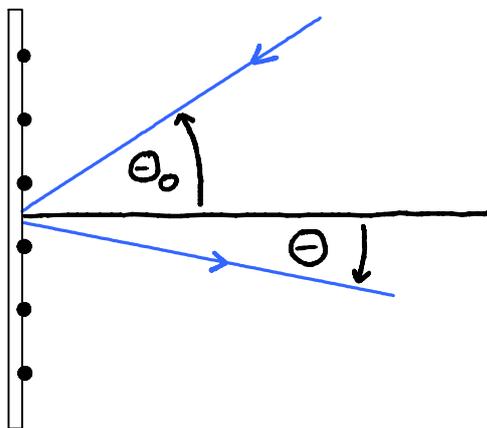
Schräger Einfall  $\alpha_0 \neq 0$



$\Rightarrow$   $\boxed{d(\sin \Theta - \sin \Theta_0) = n \lambda}$  Gittergleichung

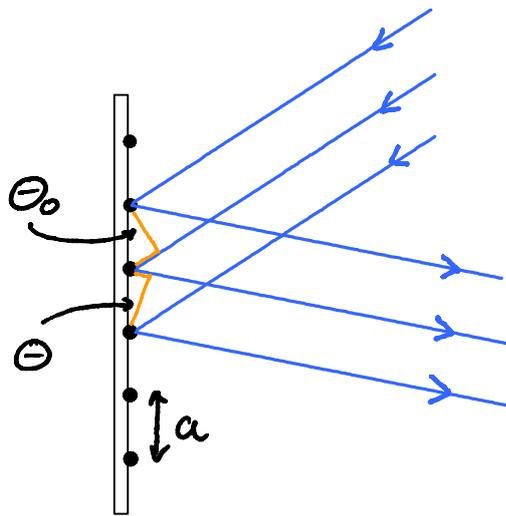
- eigentlich  $\Theta_{\max}$ ; wird aber meist weggelassen
- $N$  groß: viele kleine Nebenmaxima  $\Rightarrow$  ignorieren
- $n$  = Beugungsordnung

- Reflexionsgitter, höhere Effizienz, leichter herstellbar



Einfallswinkel  $\Theta_0$   
 $\neq$  Ausfallswinkel  $\Theta$   
(außer für  $n=0$ )

## - Einfache Herleitung

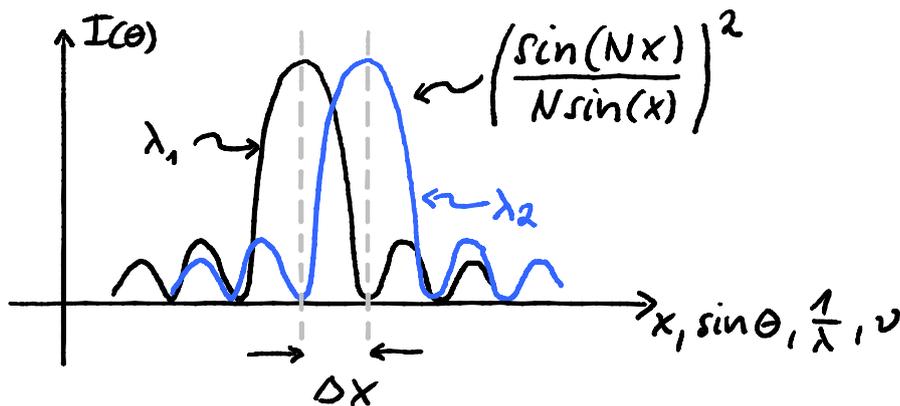


Maximum:

$$a \sin \theta - a \sin \theta_0 = n \lambda$$

## - Auflösungsvermögen (Wellenlänge)

def.: zwei Linien  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind unterscheidbar falls 1. Minimum der einen auf das Maximum der anderen fällt.



Hauptmaximum bei  $x = n\pi$ , nächstes Minimum  $\Delta x = \frac{\pi}{N}$

$$\frac{\Delta x}{\Delta \lambda} \approx \left| \frac{dx}{d\lambda} \right| = \frac{\pi}{\lambda^2} a \sin \theta = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\pi/N}{n\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nN} \quad \begin{array}{l} \text{Auflösungsvermögen} \\ \text{Gitterspektrometer} \end{array}$$

- Auflösungsvermögen

= Ordnung  $\times$  Anzahl der interferierenden Pfade

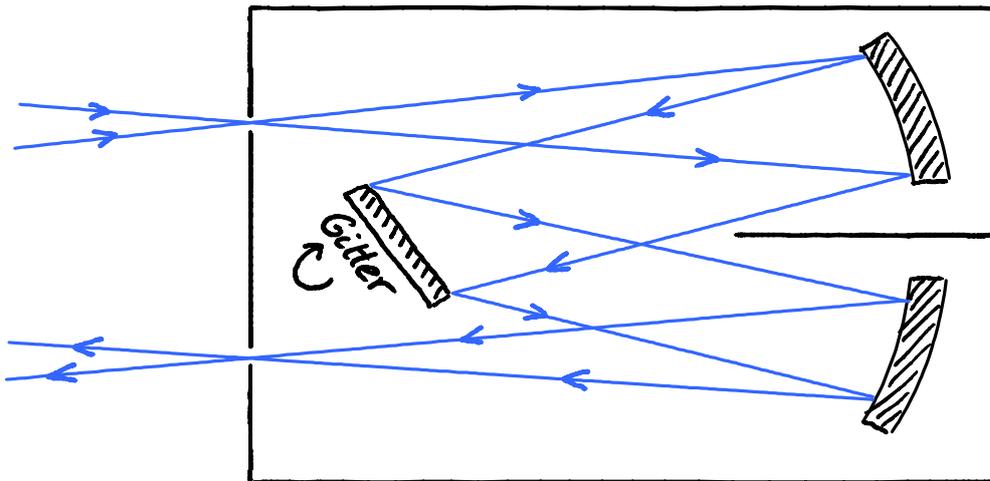
- Allgemein gültig für interferierende Spektrometer

- typisches Gitterspektrometer  $n=1$

$a = 1\mu\text{m}$  (1000 Linien/mm);  $10\text{cm} \Rightarrow N = 10^5$

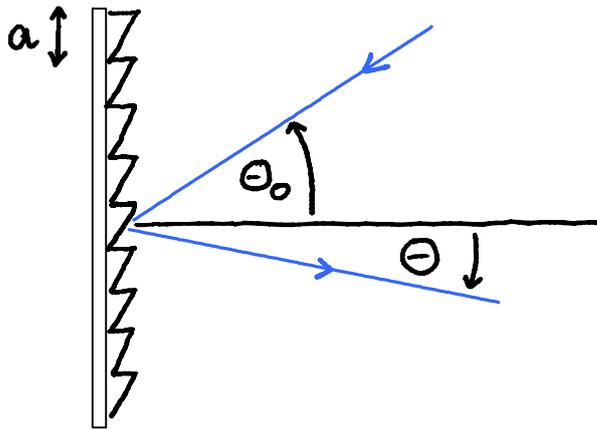
$\Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 10^5 = \left| \frac{\nu}{\Delta\nu} \right|$ ;  $\nu = 5 \times 10^{14} \text{ Hz} \Rightarrow \Delta\nu = 5 \text{ GHz}$

"Czerny - Turner Monochromator"



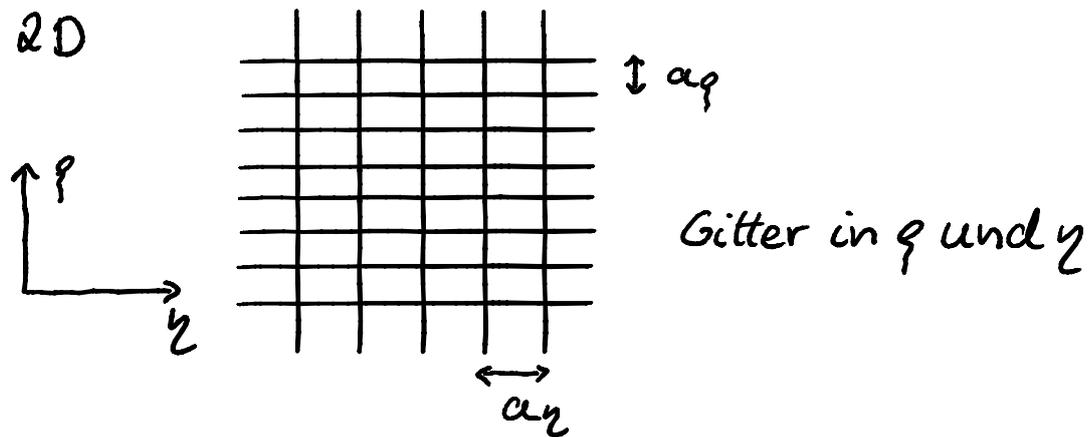
- Ein- und Austrittsspalte bestimmen die Auflösung zusätzlich zu  $nN$ .

- "ge-blaze-te" Gitter : höhere Effizienz



- bestimmte Abstrahlrichtungen bevorzugt
- für eine Wellenlänge ge-blazed
- bis zu 90% Beugungseffizienz

- Beugung an mehrdimensionalen Strukturen



$$\Rightarrow a_z (\sin \phi - \sin \phi_0) = n_1 \lambda \quad n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$a_y (\sin \theta - \sin \theta_0) = n_2 \lambda \quad n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \sin \phi - \frac{2\pi}{\lambda} \sin \phi_0 = n_1 \frac{2\pi}{a_x}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \sin \Theta - \frac{2\pi}{\lambda} \sin \Theta_0 = n_2 \frac{2\pi}{a_y}$$

$$\Rightarrow k_x - k_{x0} = G_x \quad G_x \equiv n_1 \frac{2\pi}{a_x}$$

$$\underbrace{k_y - k_{y0} = G_y}_{\quad} \quad G_y \equiv n_2 \frac{2\pi}{a_y}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{k} = \vec{G}$$

- Wellenzahlvektor wird bei der "Streuung" um einen reziproken Gittervektor  $\vec{G}$  abgelenkt.
- Erweiterbar auf 3 Dimensionen

$$\vec{G} = 2\pi \begin{pmatrix} n_1/a_x \\ n_2/a_y \\ n_3/a_z \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Festkörperphysik} \\ \text{Elektronenstreuung}$$

- Streuproblem: 4 Gleichungen

$$\text{Impuls } \Delta \vec{k} = \vec{G} \quad (\text{Rückstoß } \hbar \vec{G} \text{ auf Gitter})$$

$$\text{Energie } |\vec{k}| = |\vec{k}_0| \quad (E = \hbar \omega = \hbar c |\vec{k}|)$$

aber 3 Unbekannte  $(k_x, k_y, k_z)$

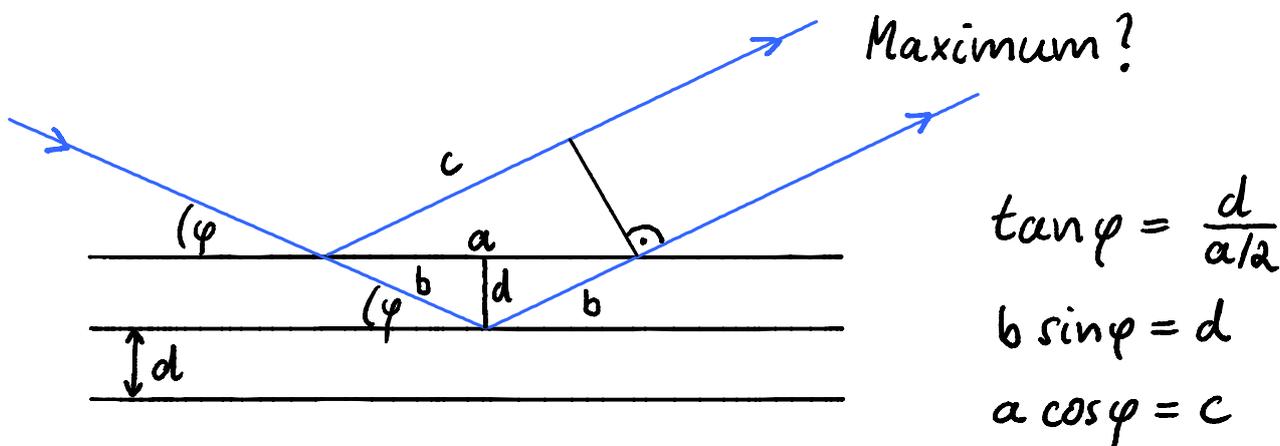
$\Rightarrow$  nur für bestimmte Streurichtungen lösbar

Gleichungen nur erfüllbar falls  $\frac{\lambda}{2} < a_y, a_z, a_x$

⇒ Sichtbares Licht 500nm kann an NaCl Kristallgitter  $a \approx 0,6\text{nm}$  nicht gebeugt werden.

⇒ Röntgenlicht ( $10\text{nm} \dots 10^{-6}\text{nm}$ ) geht.

- Streuung an Schichtsystemen



Weglängenunterschied:

$$\Delta L = 2b - c = \frac{2d}{\sin \varphi} - a \cos \varphi = \frac{2d}{\sin \varphi} (1 - \cos^2 \varphi) = 2d \sin \varphi$$

$\stackrel{!}{=} n \lambda$

$a = \frac{2d}{\tan \varphi}$

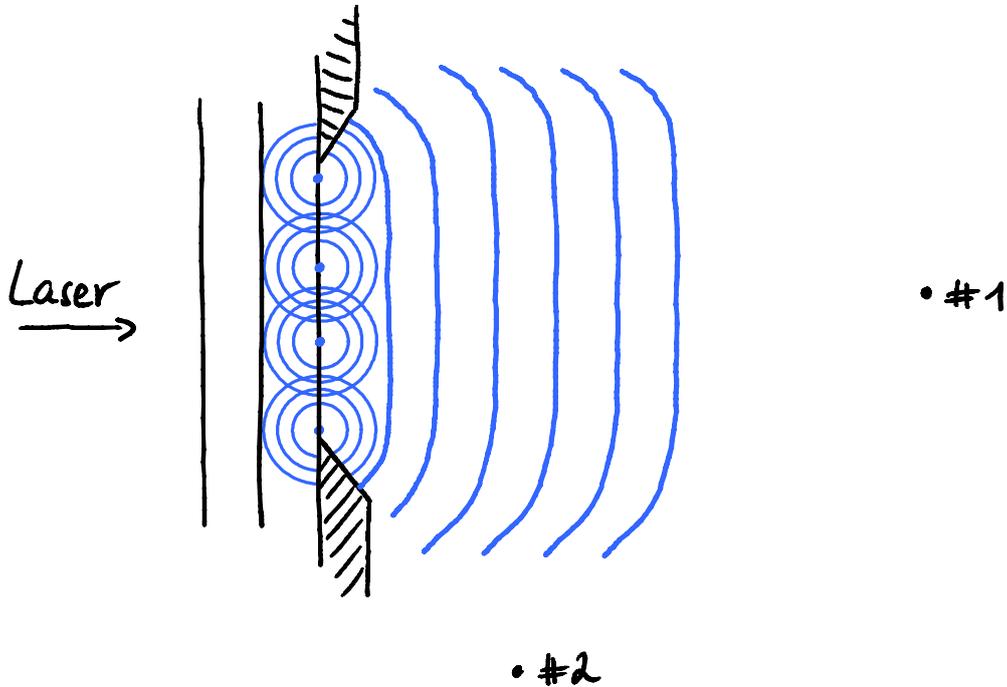
$\underbrace{1 - \cos^2 \varphi}_{= \sin^2 \varphi}$

⇒  $2d \sin \varphi = n \lambda$  Bragg Bedingung für Streuung an Schichtsystem

- Verwendung als Monochromator für Röntgenlicht
- Interferenz dünner ( $\approx \lambda$ ) Schichten (später)

# 14. Räumliche Kohärenz (mit zeitlich inkohärenter Quelle)

- bisherige Beugungsexperimente mit Laser



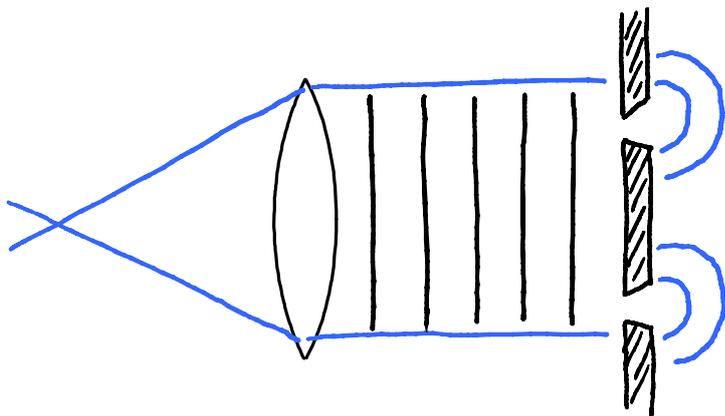
#1: Huygenswellen synchron

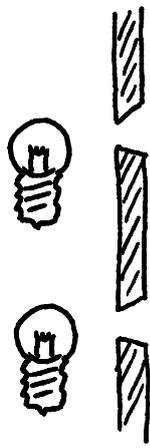
⇒ Felder addieren sich kohärent

#2: viele verschiedene Phasen der Huygenswellen

⇒ Felder addieren sich in etwa zu Null

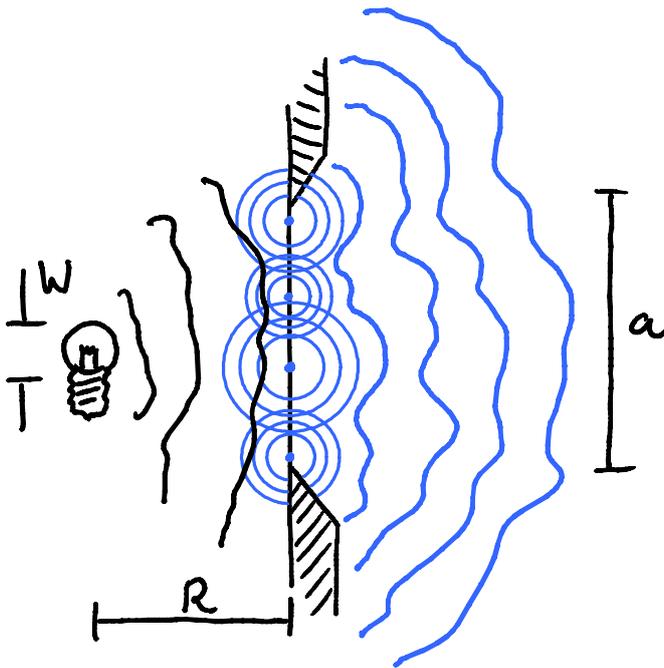
- Vereinfachung: nur zwei Huygenswellen





Huygenswellen nicht korreliert  
 $\Rightarrow$  keine Interferenz

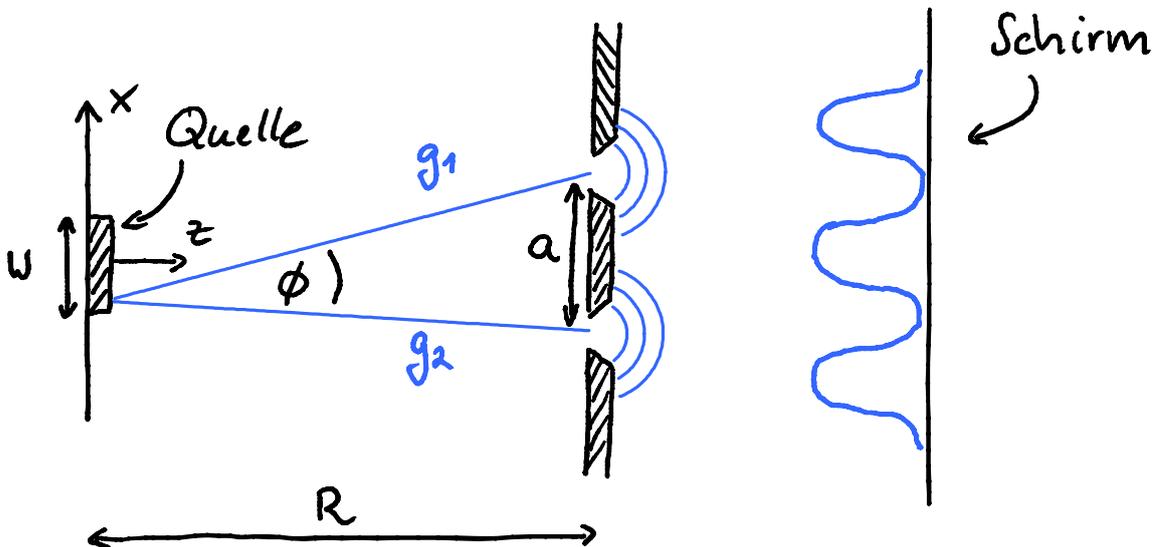
• inkohärente Beleuchtung eines Spalts



viele verschiedene Phasen  
 $\Rightarrow$  keine kohärente Feld  
 addition in irgendeiner  
 Richtung. Kein scharfer  
 Schatten für kleine  $R$ .

Weißlichtinterferenz möglich?

ja, falls Quelle sehr weit weg ist. Wie weit?



- Jeder Punkt  $x$  der Quelle zu sich selbst kohärent
- Interferenzbild auf Schirm verschiebt sich mit  $x$
- Intensitäten der Interferenzbilder addieren sich
- Ebene Welle hätte nur Pfade entlang  $z$ .

⇒ Interferenzbilder waschen sich raus für

$$|g_1 - g_2| \gtrsim \frac{\lambda}{2}$$

$$g_1^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + R^2 \quad ; \quad g_2^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + R^2$$

$$R \gg a, x : g_{1,2} \approx \sqrt{x^2 + R^2} \pm \frac{ax}{2\sqrt{x^2 + R^2}} \quad (a \ll R)$$

$$|g_1 - g_2| \approx \frac{ax}{\sqrt{x^2 + R^2}} \approx \frac{ax}{R} \quad x = -\frac{W}{2} \dots + \frac{W}{2}$$

↑  
( $x \ll R$ )

$$\frac{aW}{R} \stackrel{!}{>} \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \text{Interferenz verschwindet}$$

⇒  $a < \frac{\lambda}{2W} R$  Bedingung für räumliche Kohärenz

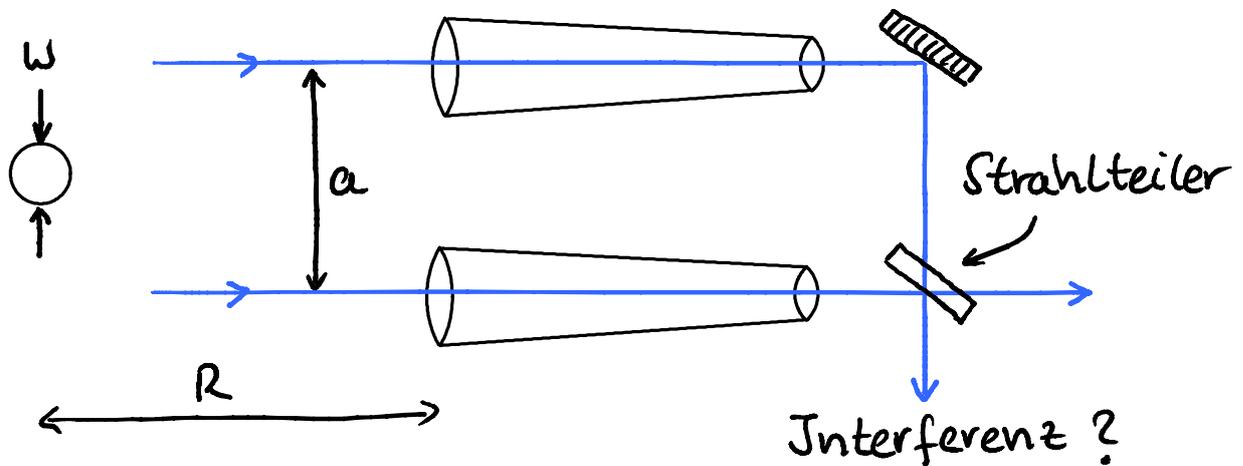
• mit  $\frac{a}{R} = \phi_{\text{Beobachter}}$  und  $\frac{\lambda}{2W} = \phi_{\text{Beugung}} \Rightarrow$

Inkohärente Quelle erscheint kohärent falls sie von einem optischen System mit Apertur  $a$  nicht aufgelöst werden kann:  $\phi_{\text{Beobachter}} < \phi_{\text{Beugung}}$

- Allgemein: Interferenzen genau dann, falls die interferierenden Pfade ununterscheidbar sind.
- Problem  $R \rightarrow \infty \Rightarrow$  wenig Licht

## - Sterninterferometer

zwei Teleskope auf den selben Stern:



Interferenz verschwindet für  $a > \frac{\lambda}{2W} R$

$\Rightarrow$  Bestimmung der Sterngröße  $W$

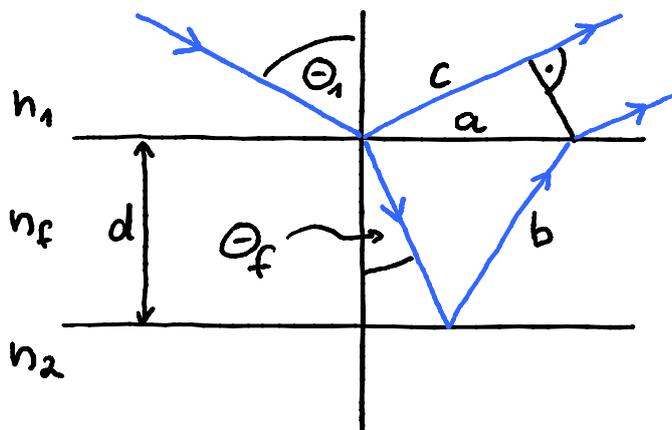
$\Rightarrow$  Auflösung wie großes Teleskop mit  $D_{ob} = a$

Beispiel:

Beteigeuze  $W = 7,0 \times 10^{11} \text{ m}$ ;  $R = 650 \text{ Lj} = 6,1 \times 10^{18} \text{ m}$

$\Rightarrow a_{max} = 2,2 \text{ m}$  messbar!

## 15. Interferenzen an Schichtsystemen



$$a = 2d \tan \theta_f$$

$$b = d / \cos \theta_f \quad \leftarrow \text{Snell}$$

$$c = a \sin \theta_1 = a \frac{n_f}{n_1} \sin \theta_f$$

optischer Weglängenunterschied:

$$\Delta L = 2n_f b - n_1 c = 2n_f \frac{d}{\cos \theta_f} - n_1 a \frac{n_f}{n_1} \sin \theta_f$$

$$= 2n_f \frac{d}{\cos \theta_f} - 2n_f d \frac{\sin \theta_f}{\cos \theta_f} \sin \theta_f$$

$$= 2n_f \frac{d}{\cos \theta_f} \underbrace{(1 - \sin^2 \theta_f)}_{\cos^2 \theta_f}$$

$$\Rightarrow \Delta L = 2n_f d \cos \theta_f$$

Konstruktive Interferenz (mit Phasensprüngen):

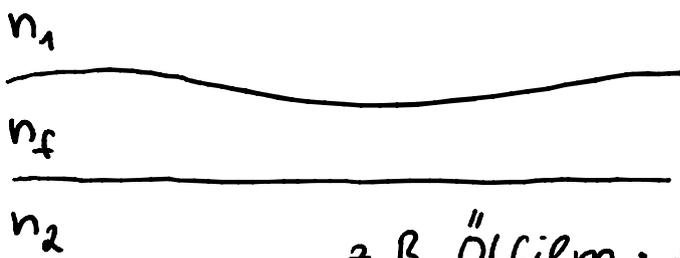
$$2n_f d \cos \theta_f = \left(m \pm \frac{1}{2}\right) \lambda$$

"-" für  $n_1 < n_f > n_2$

"+" für  $n_1 > n_f < n_2$

"0" für  $n_1 < n_f < n_2$ ;  $n_1 > n_f > n_2$

- Interferenzen gleicher Dicke

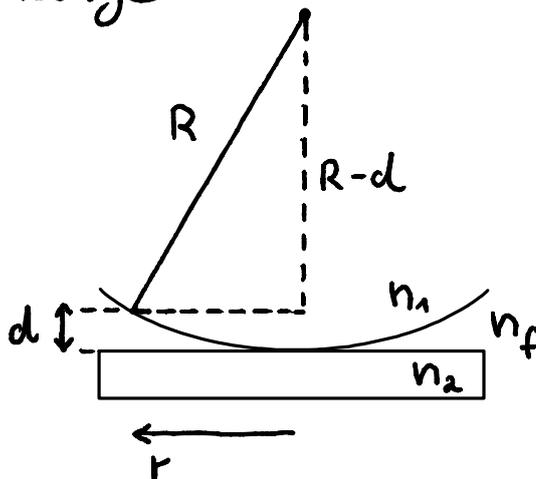


z.B. Ölfilm: farbige Ringe



zwei Glasplatten: Interferenzstreifen

- Newtonsche Ringe



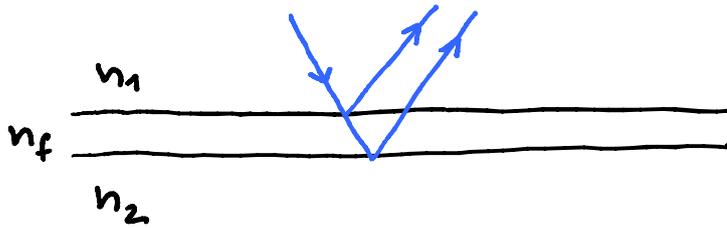
Linse auf  
Glasplatte

$$r^2 = R^2 - (R-d)^2 = 2Rd - d^2 \approx 2Rd \quad (d \ll R)$$

$$\text{Konstruktive Interferenz: } 2n_f d = 2n_f \frac{r^2}{2R} \stackrel{!}{=} \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right) R \lambda} \quad n_f = 1$$

- Antireflexbeschichtung (Vergütung; AR)



meist  $n_1 = 1$   $n_1 < n_f < n_2 \Rightarrow$  Phasensprünge  $\pi$

destruktive Interferenz:

• Phasenverschiebung von  $\pi \Rightarrow n_f d \stackrel{!}{=} \frac{\lambda}{4}$

• gleiche Amplitude  $\Rightarrow \frac{n_1 - n_f}{n_1 + n_f} \stackrel{!}{=} \frac{n_f - n_2}{n_f + n_2}$

$\Rightarrow (n_1 - n_f)(n_f + n_2) \stackrel{!}{=} (n_f - n_2)(n_1 + n_f)$

$$\cancel{n_1 n_f} - n_f^2 + n_1 n_2 - \cancel{n_f n_2} \stackrel{!}{=} n_f^2 - n_2 n_1 + \cancel{n_1 n_f} - \cancel{n_2 n_f}$$

$$2n_1 n_2 = 2n_f^2$$

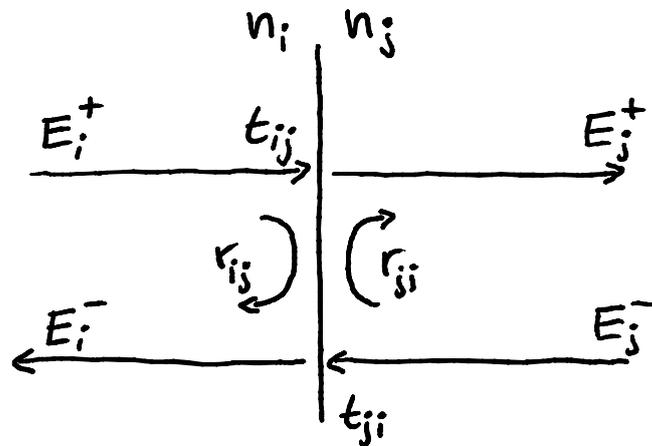
$\Rightarrow$   $n_f = \sqrt{n_1 n_2}$  und  $n_f d = \frac{\lambda}{4}$  AR-Schicht

• Aufdampfen von Material ( $\text{MgF}_2$ ,  $\text{TiO}_2$  ...)

• selten genau passendes  $n_f$  verfügbar

# - Schichtsysteme

Grenzfläche:



$$\text{Fresnel } (\Theta_i = 0) \quad r_{ij} = \frac{n_i - n_j}{n_i + n_j} = -r_{ji}$$

$$t_{ij} = \frac{2n_i}{n_i + n_j} \quad t_{ji} = \frac{2n_j}{n_i + n_j}$$

$$E_j^+ = t_{ij} E_i^+ + r_{ji} E_j^- \Rightarrow E_i^+ = \frac{1}{t_{ij}} (E_j^+ - r_{ji} E_j^-) \quad (1)$$

$$E_i^- = t_{ji} E_j^- + r_{ij} E_i^+ = t_{ji} E_j^- + \frac{r_{ij}}{t_{ij}} E_j^+ - \frac{r_{ij} r_{ji}}{t_{ij}} E_j^-$$

$$= \frac{1}{t_{ij}} \left( r_{ij} E_j^+ + \underbrace{(t_{ji} t_{ij} - r_{ij} r_{ji})}_{=1} E_j^- \right)$$

$$\frac{2n_j 2n_i - (n_i - n_j)(n_j - n_i)}{(n_i + n_j)^2} = \frac{(n_j + n_i)^2}{(n_i + n_j)^2} = 1$$

$$\Rightarrow E_i^- = \frac{1}{t_{ij}} (r_{ij} E_j^+ + E_j^-) \quad (2)$$

Propagation innerhalb einer Schicht der Dicke  $d$ :

$$E_e^+(z+d) = E_e^+(z) e^{-ik_e d} \quad k_e = \frac{2\pi n_e}{\lambda}$$

$$\Rightarrow E_e^+(z) = E_e^+(z+d) e^{ik_e d} \quad (a)$$

$$E_e^-(z) = E_e^-(z+d) e^{-ik_e d} \quad (b)$$

Definiere Vektor  $\vec{E}_i(z) \equiv \begin{pmatrix} E_i^+(z) \\ E_i^-(z) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$  mit (1) und (2) Grenzflächenmatrix  $\hat{R}_{ij}$ :

$$\vec{E}_i(z) = \hat{R}_{ij} \vec{E}_j(z) = \frac{1}{t_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & r_{ij} \\ r_{ij} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_j^+(z) \\ E_j^-(z) \end{pmatrix}$$

$\swarrow = -r_{ji}$

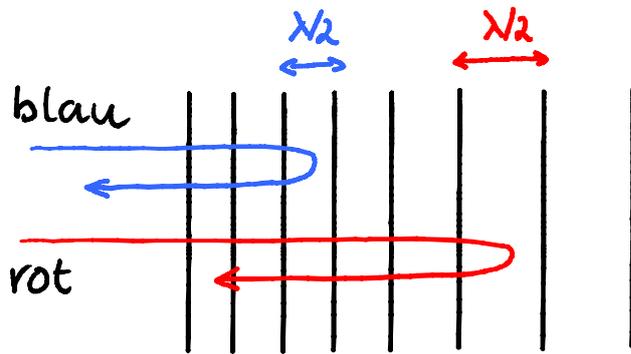
$\Rightarrow$  mit (a) und (b) Propagationsmatrix  $\hat{T}_e(d)$ :

$$\vec{E}_e(z) = \hat{T}_e(d) \vec{E}_e(z+d) = \begin{pmatrix} e^{ik_e d} & 0 \\ 0 & e^{-ik_e d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_e^+(z+d) \\ E_e^-(z+d) \end{pmatrix}$$



- Dispersionskontrolle durch Variation von  $dn$ :

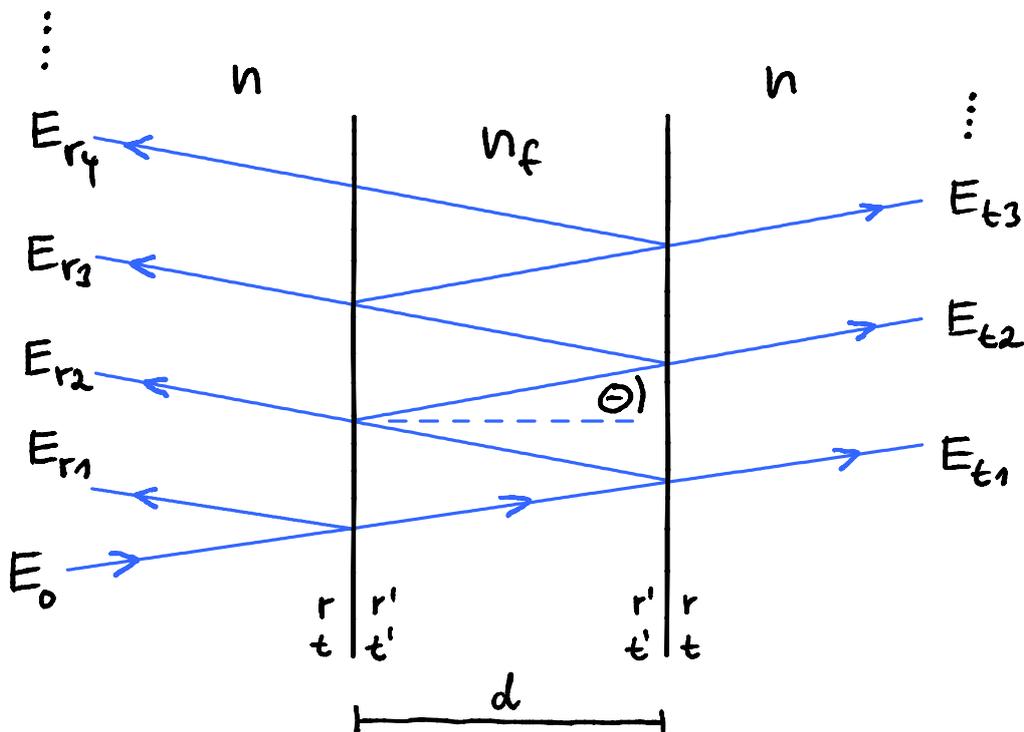
Gruppengeschwindigkeitsdispersion (GVD)



"chirped mirror"  
rot langsamer als blau  
anomale Dispersion

Verzögerung sec pro Hz =  $f s^2 = k'' d$

– Fabry - Pérot Interferometer (1897)



zunächst nur Glasplatte:

$$t = \frac{2n}{n+n_f} \quad t' = \frac{2n_f}{n+n_f} \quad r = \frac{n-n_f}{n+n_f} = -r'$$

reflektiertes Feld:

$\times \cos \theta$  statt  $1/\cos \theta$ :  
siehe Schichtwellenleiter

$$\begin{aligned} E_r &= E_{1r} + E_{2r} + E_{3r} + \dots \\ &= E_0 r + E_0 t r' t' e^{i\delta} + E_0 t r' r' r' t' e^{2i\delta} + \dots \\ &= E_0 (-r' + r' t' t' e^{i\delta} + r'^3 t t' e^{2i\delta} + r'^5 t t' e^{3i\delta} + \dots) \\ &= E_0 \left( -r' + r' t' t' e^{i\delta} \left( 1 + \underbrace{(r'^2 e^{i\delta})}_z + (r'^2 e^{i\delta})^2 + (r'^2 e^{i\delta})^3 + \dots \right) \right) \\ &= E_0 \left( -r' + \frac{r' t t' e^{i\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \right) \end{aligned}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$   
geometrische Reihe

$$\Rightarrow \frac{E_r}{E_0} = \frac{r' (-1 + r'^2 e^{i\delta} + t t' e^{i\delta})}{1 - r'^2 e^{i\delta}}$$

$$\text{mit } r'^2 + t t' = \frac{(n_f - n)^2 + 4 n n_f}{(n + n_f)^2} = \frac{n_f^2 - 2 n n_f + n^2 + 4 n n_f}{(n + n_f)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{E_r}{E_0} = \frac{r (1 - e^{i\delta})}{1 - r^2 e^{i\delta}} \quad (r = -r')$$

$$\Rightarrow \frac{I_r}{I_0} = \frac{|E_r|^2}{|E_0|^2} = \frac{r^2 ((1 - \cos \delta)^2 + \sin^2 \delta)}{(1 - r^2 \cos \delta)^2 + r^4 \sin^2 \delta}$$

$\leftarrow \text{Re}^2 + \text{Im}^2$

$$= \frac{2r^2 (1 - \cos \delta)}{1 + r^4 - 2r^2 \cos \delta} = \frac{2r^2 (1 - \cos \delta)}{(1 - r^2)^2 + 2r^2 (1 - \cos \delta)}$$

$$1 - \cos \delta = 2 \sin^2(\delta/2)$$

$$= \frac{4r^2 \sin^2(\delta/2)}{(1-r^2)^2 + 4r^2 \sin^2(\delta/2)} = \frac{F \sin^2(\delta/2)}{1 + F \sin^2(\delta/2)}$$

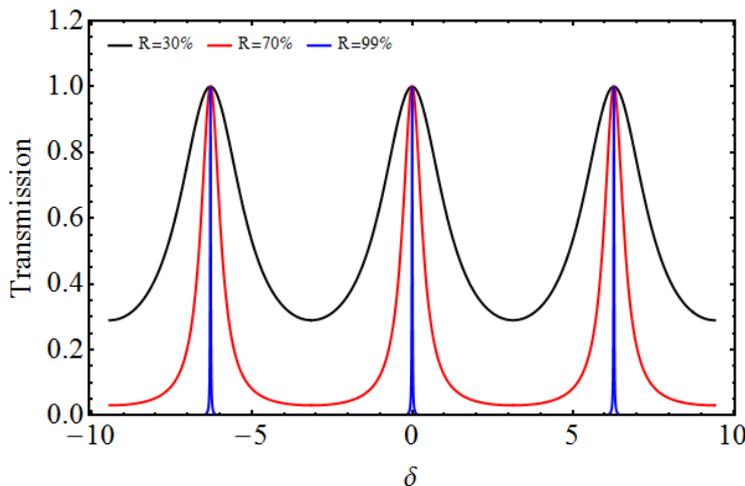
$$\text{mit } F \equiv \left( \frac{2r}{1-r^2} \right)^2 = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

$$R = \text{Intensitätsreflexion} = r^2 = r'^2$$

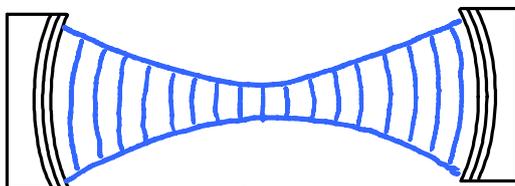
⇒ Transmission:

$$\frac{I_t}{I_0} = 1 - \frac{I_r}{I_0} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)}$$

Airy - Funktion



- Airy-Funktion gilt auch für dielektrische Spiegel mit  $R+T=1$
- Meist gekrümmte Spiegel



überall  $\cos \theta = 1$   
(ab jetzt)

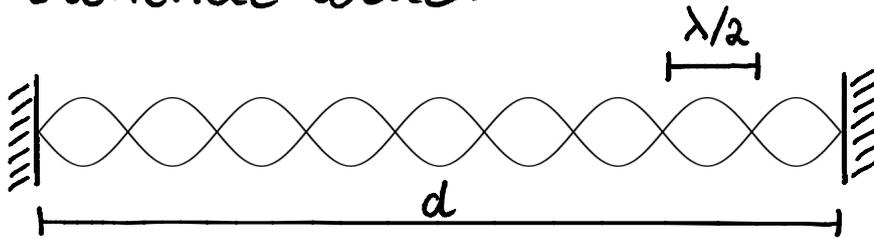
↑ "Gauß'scher Strahl" (später mehr)

- Resonanz

$$\sin^2(\delta/2) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \delta = 2\pi m \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi n_f d}{\lambda_0} = 2\pi m \Rightarrow m \frac{\lambda_0}{2n_f} = d$$

$\Rightarrow$  stehende Welle:

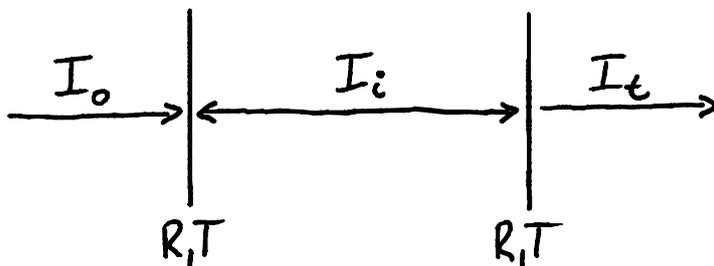


ganzzahliges Vielfache von  $\frac{\lambda_0}{2n_f} = d$

- Transmission auf Resonanz

$$\frac{I_t}{I_o} = 1 \quad 100\% \text{ Transmission, unabhängig von } R!$$

- Interne Leistung  $I_i$ :

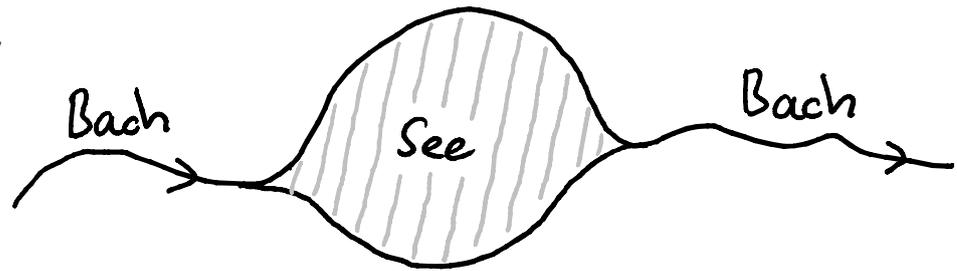


$$\Rightarrow I_t = I_o = T I_i \Rightarrow I_i = \frac{I_o}{T} = \frac{I_o}{1-R}$$

$$\Rightarrow I_i \rightarrow \infty \quad \text{für } R \rightarrow 100\%$$

Keine Verletzung der Energieerhaltung

Analogie:



• Linienbreite

$$\frac{I_t}{I_0} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \stackrel{\delta \approx 0}{\approx} \frac{1}{1 + F\delta^2/4} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2}{\sqrt{F}} \Rightarrow \Delta\delta = \frac{4}{\sqrt{F}} = 2 \frac{1-R}{\sqrt{R}} \stackrel{R \approx 1}{\approx} 2(1-R)$$

$$\text{mit } \Delta\left(\frac{4\pi n_f d}{\lambda_0}\right) = \Delta\left(\frac{4\pi n_f d \nu}{c}\right) = \frac{2n_f d}{c} \Delta\omega$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = (1-R) \frac{c}{n_f d} \quad \text{FWHM}$$

• Freier Spektralbereich (FSR)

$$\text{Resonanz: } m \frac{\lambda_m}{2n_f d} = d \quad \nu_m = \frac{c}{\lambda_m} = m \frac{c}{2n_f d}$$

$$\boxed{\text{FSR} \equiv \nu_m - \nu_{m-1} = \frac{c}{2n_f d}}$$

Frequenzdifferenz benachbarter Resonanzen

= inverse Umlaufzeit

- Finesse

$$\tilde{F} \equiv \frac{\text{Abstand benachbarter Resonanzen}}{\text{Breite einer Resonanz}}$$

$$= \frac{FSR}{\Delta\delta} = \frac{2\pi}{4/\tilde{F}} = \frac{\pi\tilde{F}}{2} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

$$\tilde{F} \approx \frac{\pi}{1-R} \quad (R \approx 1)$$

$$\Rightarrow \text{Leistungsüberhöhung: } \frac{I_i}{I_o} = \frac{1}{1-R} \approx \frac{\tilde{F}}{\pi}$$

- Auflösungsvermögen (nochmal)

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\delta}{\Delta\delta} \stackrel{\cos\theta=1}{=} \frac{4\pi n_f d / \lambda_o}{4/\tilde{F}} = \tilde{F} \times \frac{2d}{\lambda}$$

↑ Anzahl der Pfade
↑ Ordnung

- Beispiel:

$$\tilde{F} = 10^5 \text{ mit } R = 99,9961\%; d = 10\text{cm}; \lambda = 500\text{nm}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 4 \times 10^{10}! \quad I_i = I_o \times 32000!$$

- Verschiedene Namen, je nach Anwendung  
Fabry-Pérot Etalon, auch nur "Etalon"  
Cavity, (optischer) Resonator, Interferenzfilter...

- Anwendungen:

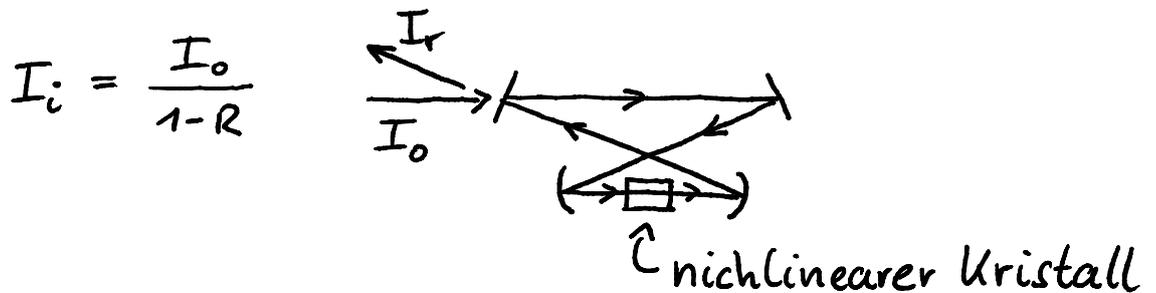
optische Filter (Interferenzfilter)

Maßverkörperung (Definition von  $c$  1983)

Spektroskopie (sehr hohe Auflösung, Laser Diagnose)

Referenzoszillator ( $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta d}{d} \ll 10^{-15}$  möglich)

Nichtlineare Optik (siehe Kapitel 20)

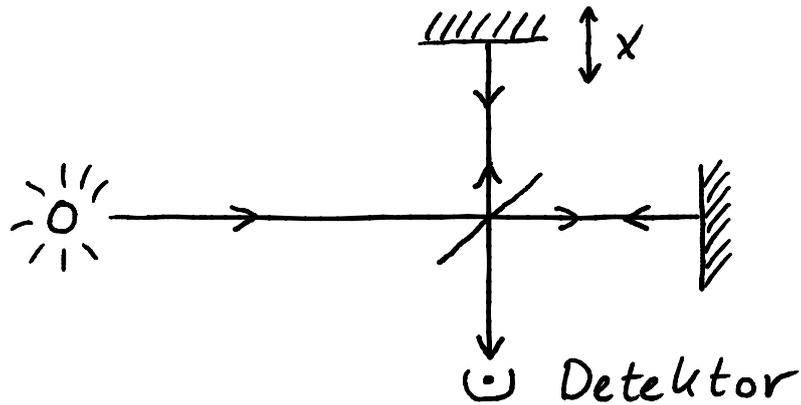


- Quantenoptik, Cavity QED,

Purcell Effekt, Casimir Kraft...

# - Fourier - Transform Spektrometer

Michelson



Laufzeitdifferenz  $\tau = \frac{2x}{c}$

Leistung am Detektor:

$$\begin{aligned}
 W(\tau) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} |E(t) + E(t-\tau)|^2 dt && \leftarrow \text{eigentlich } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \dots dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega') e^{i\omega'(t-\tau)} d\omega' \right|^2 dt \\
 &= W_0 + \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) \tilde{E}^*(\omega') e^{i(\omega-\omega')t + i\omega'\tau} d\omega d\omega' dt + c.c. \\
 &\quad \leftarrow \text{mittlere Leistung} = \text{const} \quad \leftarrow 2\pi \delta(\omega-\omega') \quad \leftarrow \\
 &= W_0 + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\tilde{E}(\omega) \tilde{E}^*(\omega)}_{\sim I(\omega)} \underbrace{\left( e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau} \right)}_{= 2\cos(\omega\tau)} d\omega
 \end{aligned}$$

$$= \omega_0 + 8\pi^2 \operatorname{Re} \left( \text{F.T.} \left\{ I(\omega) \right\}_{\omega \rightarrow \tau} \right)$$

$\Rightarrow$  Messe Signal  $\sim W(\tau)$ ; subtrahiere Mittelwert  $\omega_0$ ;  
inverse Fouriertransformation  $\tau \rightarrow \omega$

$\Rightarrow I(\omega) = \text{Spektrum der Quelle}$

in Praxis:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \dots d\tau \rightarrow \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} \dots d\tau$

•  $e^{i\omega t - ikx} = e^{i\omega t - i\omega \frac{x}{c}}$  : jede Frequenzkomponente  
als Funktion von  $t$  oder  $\frac{x}{c}$

• Auflösungsvermögen

$$\Delta \nu = \frac{1}{\Delta \tau} = \frac{c}{2 \Delta x} \quad \Delta \tau = \tau_{\max} - \tau_{\min}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = \frac{\nu}{\Delta \nu} = \frac{2\nu \Delta x}{c} = 2 \times \frac{\Delta x}{\lambda}$$

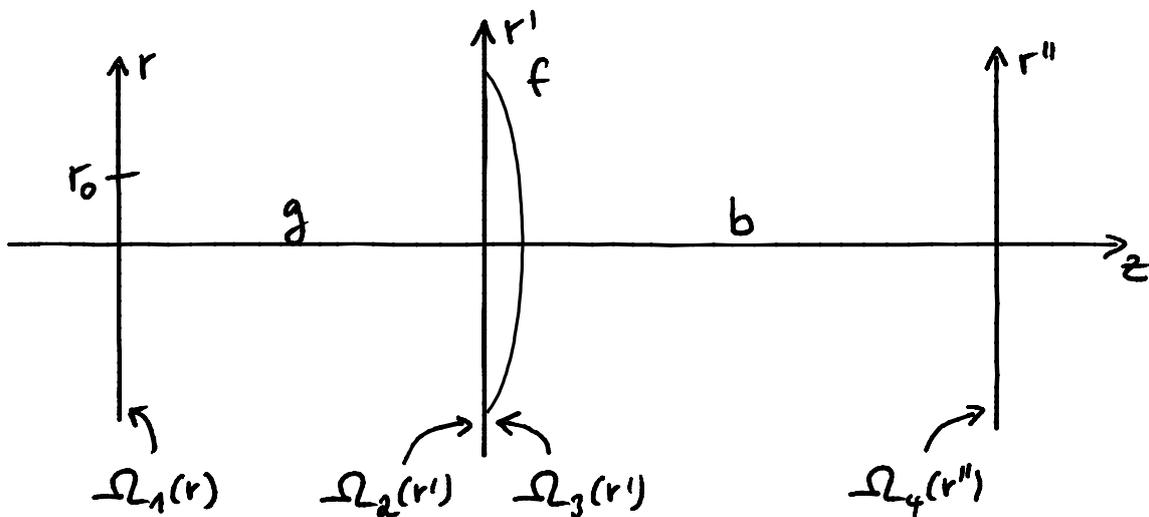
↑ Anzahl der Pfade
 ↑ Ordnung

# 16. Geometrische Optik als Näherung der Wellenoptik

Geometrische Optik (Abbildung)  $\xleftarrow{\text{Näherung}}$  Wellenoptik (Beugung)

Geometrische Optik kann keine Beugungsphänomene beschreiben, aber Wellenoptik sollte Abbildung beschreiben (wenn auch komplizierter):

- Abbildung eines Punkts durch Beugung



Punktquelle bei  $r=r_0$ :  $\Omega_1(r) \sim \delta(r-r_0)$

Beugung bis zur Linse:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Omega_2(r') &\sim \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_1(r) e^{-ik\sqrt{g^2+(r'-r)^2}} dr \\ &= e^{-ik\sqrt{g^2+(r'-r_0)^2}} \end{aligned}$$

Fernfeld bei  $z > \frac{r_0^2}{\lambda} = \frac{1 \text{ cm}^2}{500 \text{ nm}} = 200 \text{ m}$  z.B.

$\Rightarrow$  Fresnelnäherung (quadratische Phase):

mit  $\sqrt{1+x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2}$  paraxial:  $g$  statt  $R$

$$\Omega_2(r') \sim e^{-ik \left( g + \frac{(r'-r_0)^2}{2g} \right)}$$

Multiplikation mit  $e^{i\frac{k}{2f} r'^2}$  "verbiegt" die

Wellenfronten so wie die Linse (siehe Aufgabe 34)

$$\Rightarrow \Omega_3(r') = \Omega_2(r') e^{+i\frac{k}{2f} r'^2} \sim e^{-ik \left( g + \frac{(r'-r_0)^2}{2g} - i\frac{k}{2f} r'^2 \right)}$$

$$\Omega_4(r'') \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_3(r') e^{-ik \sqrt{b^2 + (r'-r'')^2}} dr'$$

$$\approx \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_3(r') e^{-ik \left( b + \frac{(r'-r'')^2}{2b} \right)} dr' \quad (\text{Fresnel})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( -ikg - ik \frac{(r'-r_0)^2}{2g} + i\frac{k}{2f} r'^2 - ikb - ik \frac{(r'-r'')^2}{2b} \right) dr'$$

$$= e^{-ik \left( g + b + \frac{r_0^2}{2g} + \frac{r''^2}{2b} \right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( -i\frac{k}{2} \left( \frac{1}{g} + \frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right) r'^2 + ik \left( \frac{r_0}{g} + \frac{r''}{b} \right) r' \right) dr'$$

$\curvearrowright$  Phasenfaktor irrelevant für Intensität

für  $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$  (Abbildungsgleichung) wird:

$$\Omega_4(r'') \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(ik\left(\frac{r_0}{g} + \frac{r''}{b}\right)r'\right) dr' = 2\pi \delta\left(k\left(\frac{r_0}{g} + \frac{r''}{b}\right)\right)$$

⇒ Beugung bildet Punkt  $r_0$  auf Punkt  $r''$  ab

mit  $\frac{r_0}{g} + \frac{r''}{b} = 0$  falls  $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$

⇒  $r'' = -\frac{b}{g} r_0$  ⇒ Vergrößerung  $V_T = -\frac{b}{g}$

⇒ Beugung beinhaltet geometrische Optik

kann aber mehr:

- Intensität auf  $r''$  für  $\frac{1}{f} \neq \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$

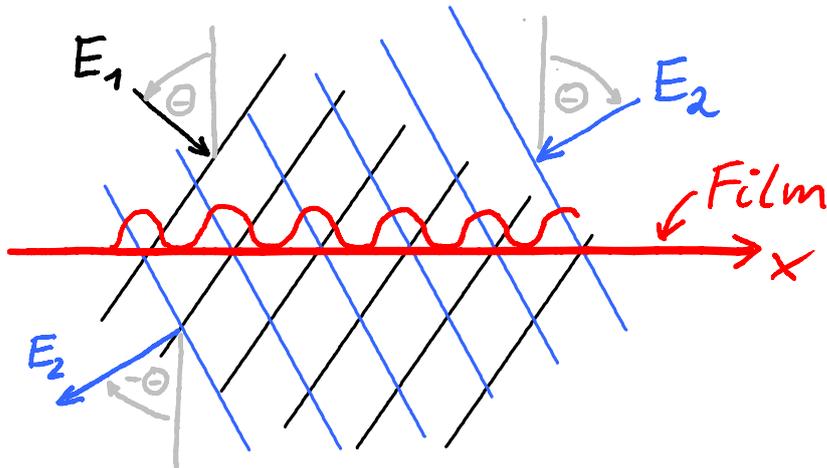
- Linse endlicher Größe:

$\delta\left(k\left(\frac{r_0}{g} + \frac{r''}{b}\right)\right) \rightarrow \text{sinc oder Bessel}$

## 17. Holographie (Holos = ganz)

i) einfachstes Hologramm: holographisches Gitter

zwei kohärente ebene Wellen:



$$I(x) \sim \sin^2(kx \sin \theta) \quad \text{Maxima: } x_n = n \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$$

Interferenzmuster erzeugt Gitter, welches

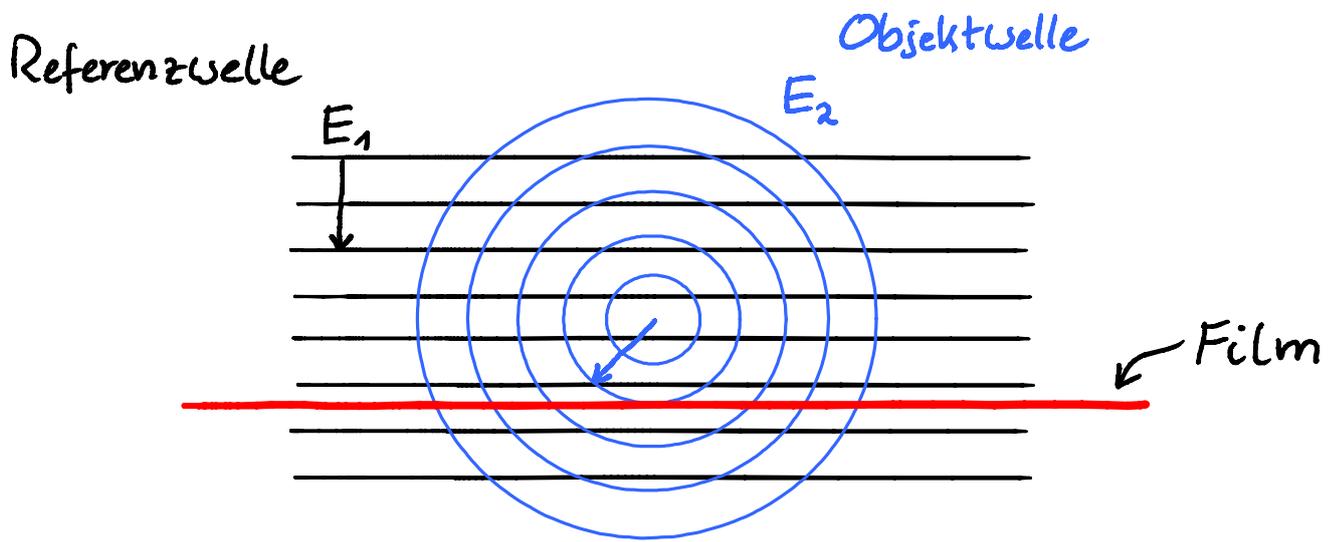
$E_1$  in  $E_2$  und  $E_2$  in  $E_1$  beugt (1. Ordnung):

$$a(\sin \theta - \sin(-\theta)) = \lambda \Rightarrow a = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$$

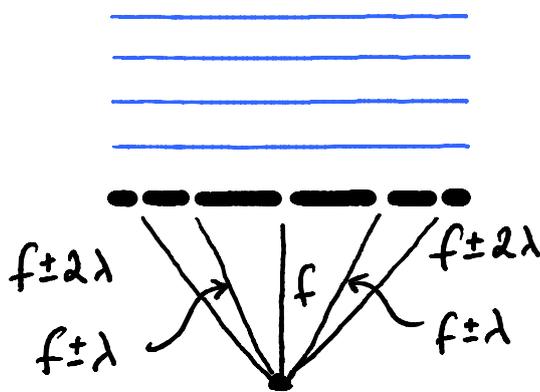
ii) Fresnel'sche Zonenplatte

Interferenz von ebener Welle mit

auslaufender Kugelwelle:



Maxima ( $\pm 1.$  Ordnung) bei:

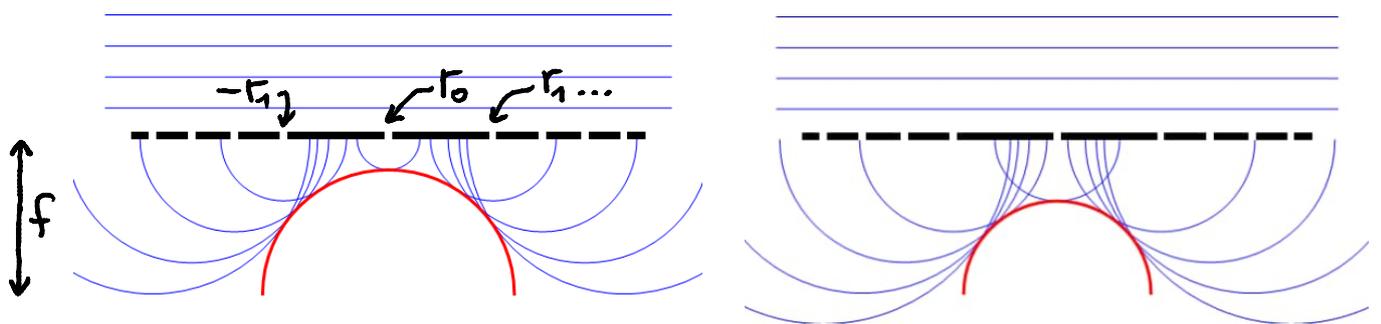


$$r_n = \pm \sqrt{(f + n\lambda)^2 - f^2}$$

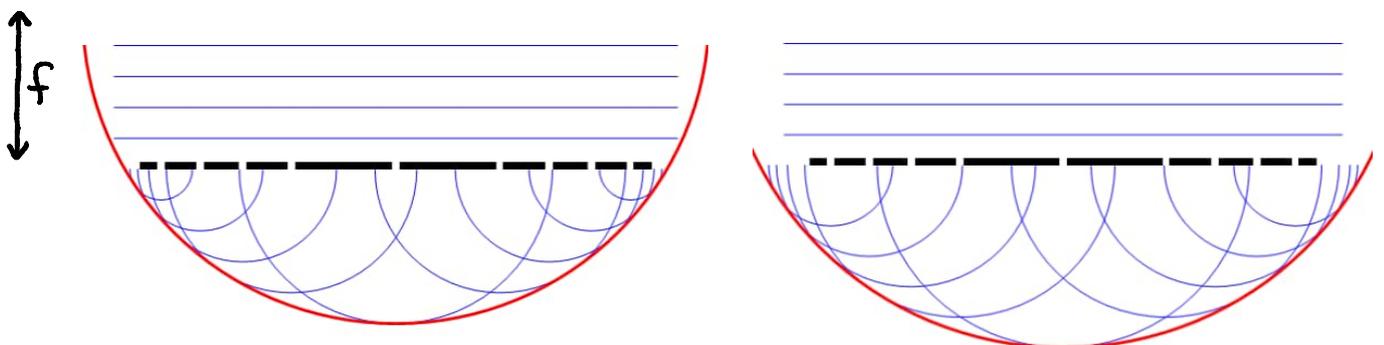
$$\pm \sqrt{n^2 \lambda^2 + 2fn\lambda}$$

(zuvor Kanten, jetzt Maxima:  $\times 2$ )

- $n=+1$ : ebene Welle  $\rightarrow$  einlaufende Kugelwelle



- $n=-1$ : ebene Welle  $\rightarrow$  auslaufende Kugelwelle

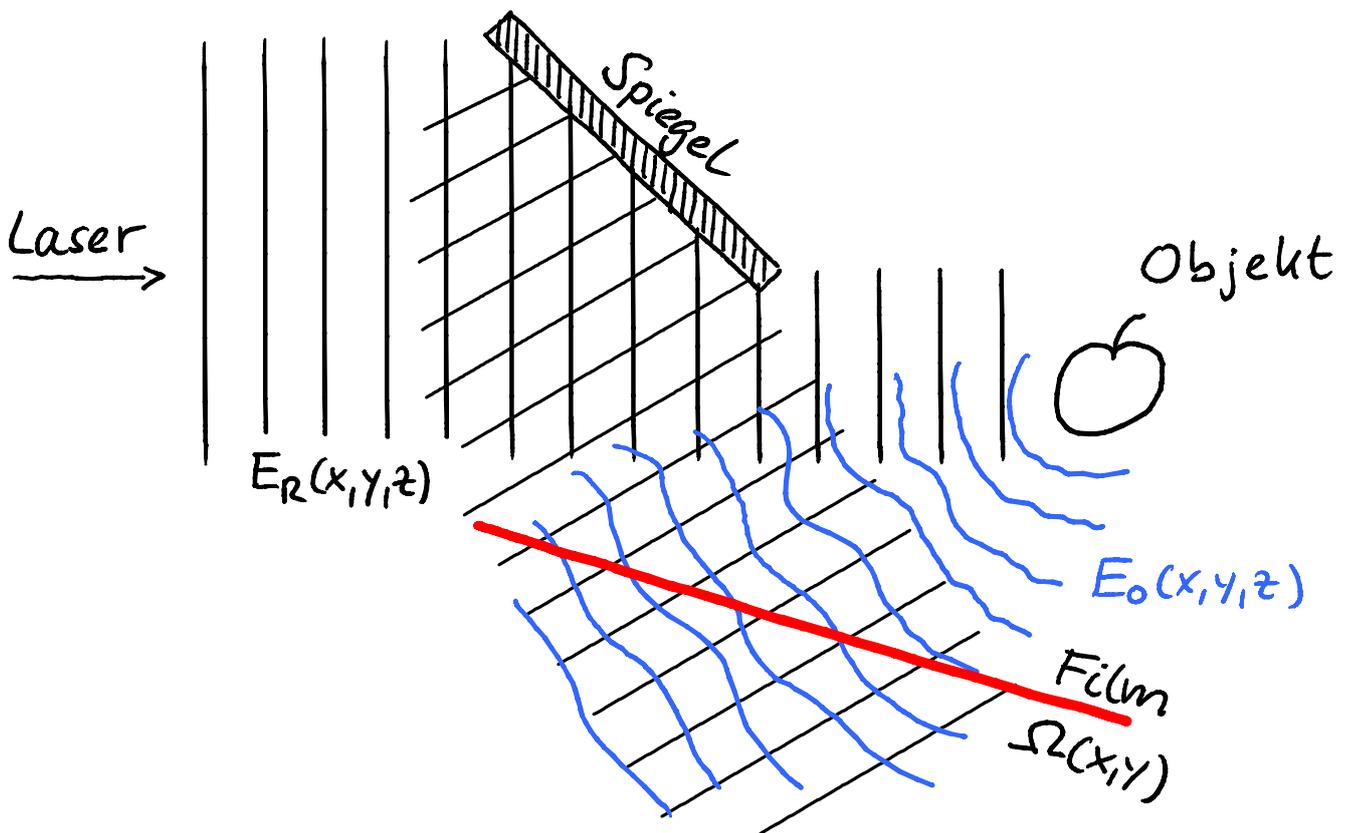


⇒ Interferenzmuster erzeugt Fresnel'sche Zonenplatte die eine ebene Welle in eine ein- und auslaufende Kugelwelle beugt (und umgekehrt).

⇒ Fresnel'sche Zonenplatte = Hologramm eines Punkts

- Hologramm eines beliebigen Objekts durch "Überlagerung vieler Punkte."
- Funktioniert auch mit beliebiger Referenzwelle, Wiedergabe aber schwierig.

- Aufnahme eines Hologramms



Zwei Felder in Filmebene  $\Omega(x,y)$ :

$$\text{Objekt: } E_o(x,y) = E_{o0}(x,y) e^{i\omega t + i\phi_o(x,y)}$$

$$\text{Referenz: } E_R(x,y) = E_{R0}(x,y) e^{i\omega t + i\phi_R(x,y)}$$

Intensität in Filmebene:

Phase wird  
aufgezeichnet!

$$I(x,y) \sim |E_o(x,y) + E_R(x,y)|^2$$

$$= E_{o0}^2 + E_{R0}^2 + E_{R0} E_{o0} e^{i\phi_o(x,y) - i\phi_R(x,y)} \\ + E_{R0} E_{o0} e^{-i\phi_o(x,y) + i\phi_R(x,y)}$$

-Wiedergabe des Hologramms

Entwickelter Film hat Transmission  $\sim I(x,y)$

$$T(x,y) = \propto I(x,y)$$

Beleuchtung des Films mit Referenzwelle:

Feld in  $\Omega(x,y)$ :

$$E_B(x,y) = E_R(x,y) T(x,y) = E_R(x,y) \propto I(x,y)$$

$$= \propto (E_{o0}^2 + E_{R0}^2) E_{R0} e^{i\omega t + i\phi_R(x,y)}$$

$$+ \propto E_{R0}^2 E_{o0}^2 e^{i\omega t + i\phi_o(x,y)}$$

$$+ \propto E_{R0}^2 E_{o0}^2 e^{i\omega t - i\phi_o(x,y) + 2i\phi_R(x,y)}$$

$$\equiv E_1 + E_2 + E_3 \quad \text{drei Felder}$$

- $E_1 \sim E_R(x, y)$

$\Rightarrow$  propagiert hinter dem Film wie ursprüngliches

Feld  $E_R(x, y, z)$  (Huygens)

(0. Ordnung)

- $E_2 \sim E_0(x, y)$

$\Rightarrow$  propagiert hinter dem Film wie  $E_0(x, y, z)$

Objektwelle wird reproduziert (1. Ordnung)

$\Rightarrow$  Filmebene verhält sich wie ein Fenster,

durch welches das Objekt betrachtet wird.

- $E_3$  gehört zur einlaufenden Kugelwelle ( $n$ )

$\Rightarrow$  erzeugt ein invertiertes Bild (pseudoskopisch)

(-1. Ordnung); sehr schwach

$\Rightarrow$

Interferenz zweier kohärenter Felder erzeugt "Gitter", welches ein Feld in das andere beugt.

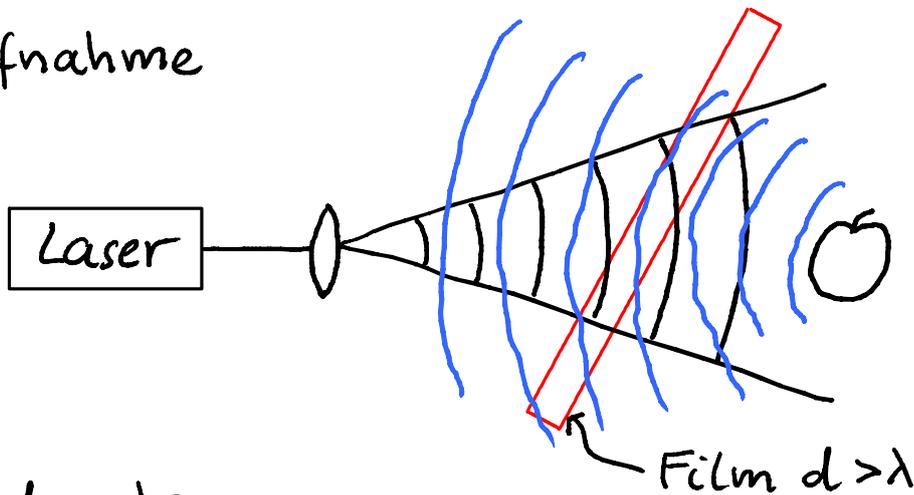
# Hologrammtypen:

## i) Lasertransmissionshologramm ↴

- Hologramme von Hologrammen möglich
- keine andere Art der Vervielfältigung
- Laser für Wiedergabe benötigt

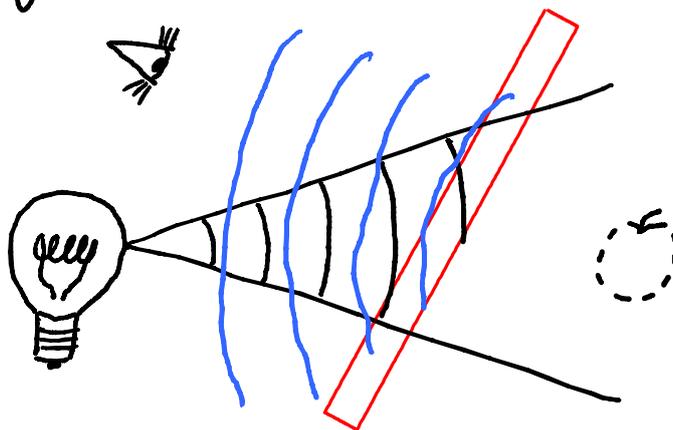
## ii) Weißlichtreflexionshologramm

- Aufnahme



- Wiedergabe

Volumenhologramm wählt Farbe des Referenzlichts und Phasenfronten mittels Bragg-Bedingung aus:



- keine Vervielfältigung

### iii) Regenbogenhologramm (kein Volumenhologramm)

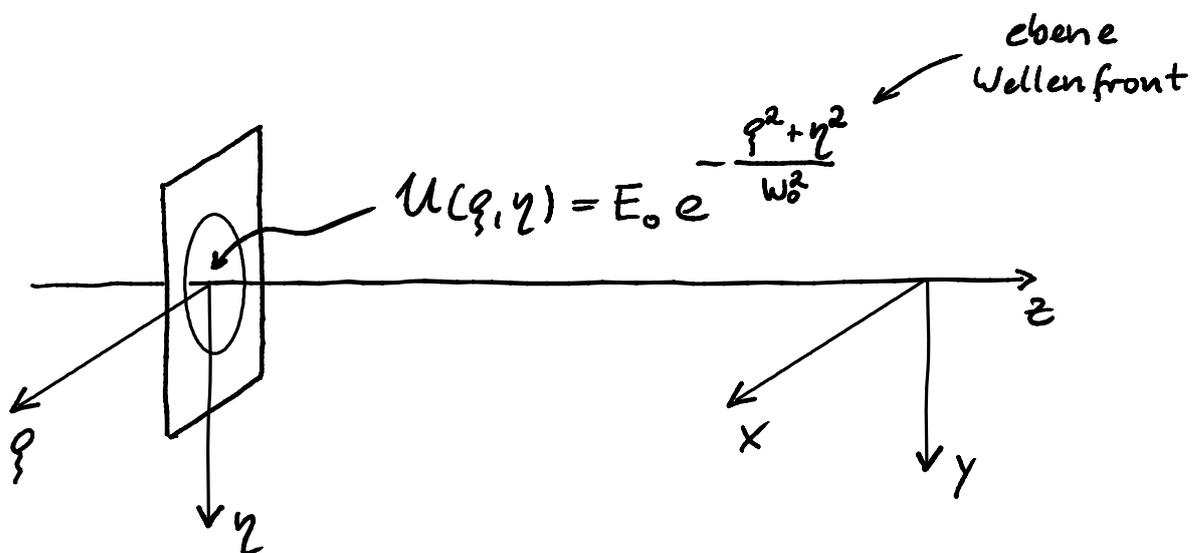
- Wiedergabe mit Weißlicht
- Kann auf Metallfolie geprägt werden (Massenproduktion)
- Keine vertikale Parallaxe

## 18. Laseroptik - Gauß'sche "Strahlen"

- gesucht: ein "Strahl", der seine Form bei der Propagation beibehält (Laserstrahl)

Versuche: Nahfeld = Gauß  $\Rightarrow$  Fernfeld = Gauß  
 $\stackrel{?}{\Rightarrow}$  überall Gauß

- Beugung eines Gauß'schen Intensitätsprofils:



$w_0 =$  Strahltaille (waist)

Beugungsintegral:

$$U_p \sim \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \frac{e^{-ikr}}{r} d\xi d\eta$$

Fresnel'sche Näherung (paraxiale Näherung):

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$$

$$\approx z + \frac{1}{2z} ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)$$

$$= z - \frac{x\xi}{z} - \frac{y\eta}{z} + \frac{x^2}{2z} + \frac{y^2}{2z} + \frac{\xi^2}{2z} + \frac{\eta^2}{2z}$$

ebene Welle

Fraunhofer

Fresnel (mit  $R \rightarrow z$ )

$R \approx z$

Nenner:  $r \rightarrow z \Rightarrow$

$$U_p \sim \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2z}} e^{\frac{-ikz - i\frac{k(x^2+y^2)}{2z} - i\frac{k(\xi^2+\eta^2)}{2z} + i\frac{kx\xi}{z} + i\frac{k y \eta}{z}}{z}} d\xi d\eta$$

$$= \frac{e^{-ikz - i\frac{k(x^2+y^2)}{2z}}}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q(z)}{2z} (\xi^2 + \eta^2) + i\frac{kx\xi}{z} + i\frac{k y \eta}{z}} d\xi d\eta$$

mit  $q(z) \equiv z + i\frac{kW_0^2}{2}$

Komplexer  
Strahlparameter

$$= \frac{e^{-ikz - i \frac{k(x^2+y^2)}{2z}}}{z} e^{-\frac{k^2(x^2+y^2)w_0^2}{4zq(z)}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{quadratische} \\ \text{Ergänzung} \end{array}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{q(z)}{2w_0^2} \left( \xi - i \frac{kxw_0^2}{2q(z)} \right)^2 + \left( \eta - i \frac{kyw_0^2}{2q(z)} \right)^2} d\xi d\eta$$

$$\text{mit } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(x-B)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \Rightarrow$$

$$= \frac{\pi w_0^2}{q(z)} e^{-ikz - i \frac{k(x^2+y^2)}{2z} - \frac{k^2(x^2+y^2)w_0^2}{4zq(z)}}$$

$$= \frac{\pi w_0^2}{q(z)} e^{-ikz - \underbrace{(i2q(z) + kw_0^2)}_{=i2z} \frac{k(x^2+y^2)}{4zq(z)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_p = \frac{iE_0}{\lambda} \frac{\pi w_0^2}{q(z)} e^{-ikz - i \frac{ks^2}{2q(z)}} \quad \text{mit } s^2 = x^2 + y^2} \quad (i)$$

- Gauß'scher Strahl, komplexe Schreibweise  
kompakt aber unanschaulich

- Faktor  $\frac{iE_0}{\lambda}$  aus vollständiger Behandlung

- Anschauliche Schreibweise durch Zerlegung  
in Real- und Imaginärteil:

definiere  $z_0 \equiv \frac{kW_0^2}{2}$  Rayleigh Länge

( $2z_0 =$  Konfokalparameter)

$$\Rightarrow q(z) = z + iz_0$$

• Vorfaktor:

$$\begin{aligned} \frac{iE_0 \pi W_0^2}{\lambda z + iz_0} &= \frac{iE_0 \cdot 2\pi z_0}{\lambda k(z + iz_0)} = \frac{iz_0 E_0}{z + iz_0} \\ &= \frac{E_0}{1 - i\frac{z}{z_0}} = E_0 \frac{1 + i\frac{z}{z_0}}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} = E_0 \frac{W_0}{W(z)} e^{i \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)} \end{aligned}$$

Phase  $\arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)$

Betrag  $\downarrow$

mit  $W(z) \equiv W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$  "Strahlradius"  
 $W(z=0) = W_0$

• Exponent:

$$\begin{aligned} e^{-ikz - i\frac{kS^2}{2q(z)}} &= e^{-ikz - i\frac{kS^2}{2(z + iz_0)}} = e^{-ikz - i\frac{kS^2}{2} \left(\frac{z - iz_0}{z^2 + z_0^2}\right)} \\ &= e^{-ikz - ik\frac{S^2}{2R(z)} - \frac{S^2}{W^2(z)}} \end{aligned}$$

mit  $R(z) \equiv \frac{z^2 + z_0^2}{z}$  Krümmungsradius  
 der Wellenfronten

Zusammen\*:

$$U_p = E_0 \frac{W_0}{W(z)} e^{-\frac{\rho^2}{W^2(z)} - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} - ikz + i \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right)}$$

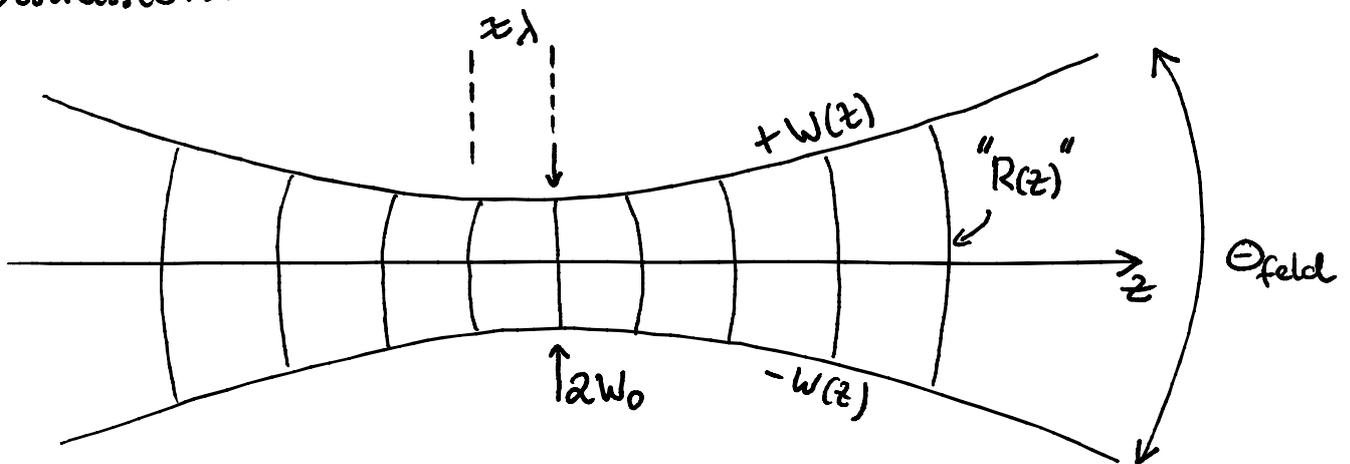
(ii)  
andere  
Schreibweise  
von (i)

radiale  
Gauß'sche  
Intensität

Wellenfront-  
krümmung

Propagations-  
phase

Diskussion:



- ein Parameter  $w_0$  ( $z_0 = \frac{kw_0^2}{2}$ ) + Wellenlänge bestimmt das Feld überall (Huygens).
- ebene Wellenfronten  $R(z) = \infty$  bei  $z = 0, \pm\infty$
- kleinster Strahlradius  $w_0$  bei  $z = 0$
- zusätzliche propagations Phase (relativ zur ebenen Welle)

Gouy - Phase :  $\arctg\left(\frac{z}{z_0}\right) \longrightarrow \pm \frac{\pi}{2}$  für  $z \longrightarrow \pm\infty$

$\Rightarrow v = \frac{c}{\lambda}$  nicht ganz korrekt

\* Kogelnik & Li "Laser Beams and Resonators" Proc. IEEE 54, 1212 (1966)

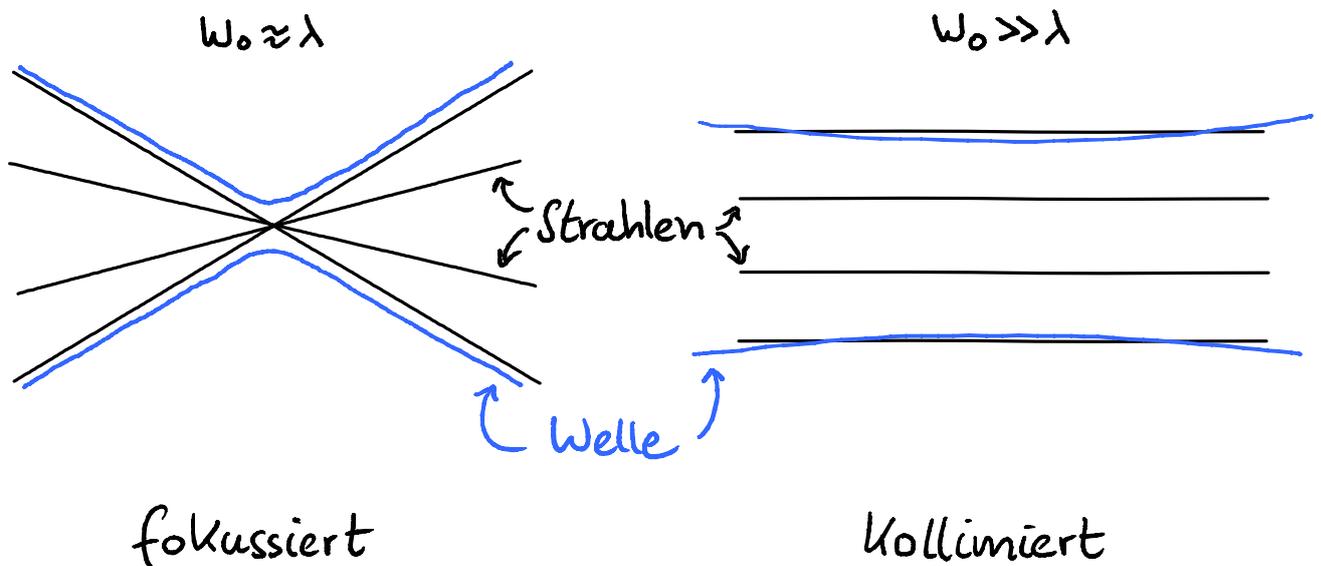
- ebene Welle für  $w_0 \rightarrow \infty \Rightarrow R(z) = \infty$  überall
- Divergenz:

$$W(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \xrightarrow{z \gg z_0} w_0 \frac{z}{z_0} = \frac{2z}{w_0 k} = \frac{\lambda z}{w_0 \pi}$$

$$\Rightarrow \Theta_{\text{feld}} = \frac{2\lambda}{w_0 \pi} \approx \frac{\lambda}{w_0}$$

$\Rightarrow$  beugungsbegrenzter Strahl

- Vergleich mit Strahlenoptik



Kontinuierlicher Übergang:

$w_0 = \text{Fokusgröße} \longleftrightarrow w_0 = \text{Strahldurchmesser}$

Welle  $\neq$  ein Strahl:

Gauß'scher Strahl  $\Leftrightarrow$  Strahlenbündel

$\uparrow$  Vergleiche Quantenmechanik

- Gouy - Phase  $z = -\infty \dots +\infty \Rightarrow$  Phasensprung  $\pi$

Strahlenoptik

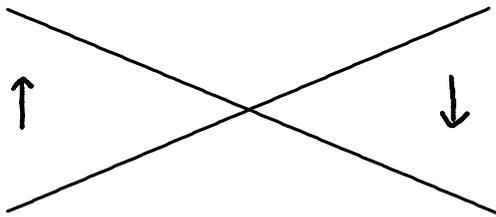
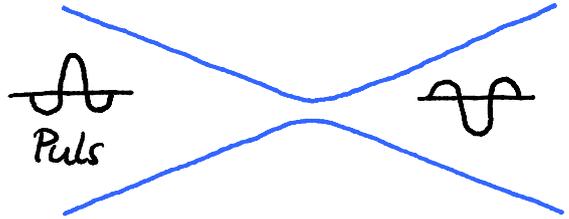


Bild steht Kopf

Wellenoptik



Laserpuls steht Kopf

Beispiele

1.) Laserstrahl durch Hörsaal

$$z_0 = \frac{k W_0^2}{2} = \frac{2\pi (0,5\text{mm})^2}{2 \times 632\text{nm}} = 1,2\text{m}$$

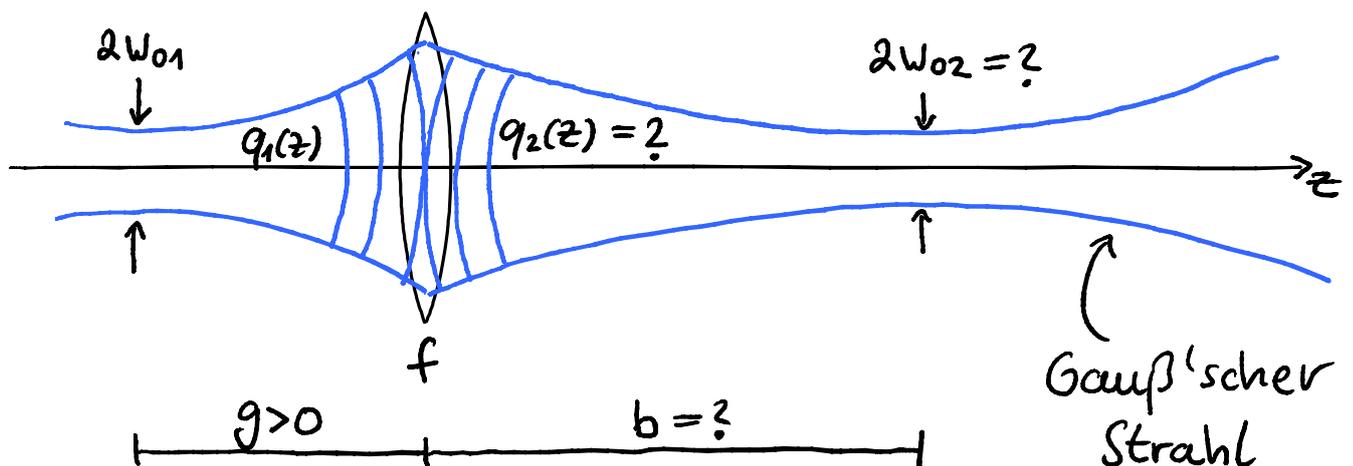
$$\Rightarrow W(z=30\text{m}) = 1,2\text{cm}$$

2.) Laserstrahl auf den Mond

$$W_0 = 1\text{cm} (1\text{m}) \Rightarrow z_0 = 1\text{km} (10^4\text{km})$$

$$\Rightarrow W(z=3 \times 10^8\text{m}) = 3\text{km} (30\text{m})$$

- Abbildung Gauß'scher Strahlen



Feld auf linker Seite der Linse:  $U_L \sim e^{-ikz - i \frac{kg^2}{2q_1(z)}}$

Feld rechte Seite auf der Linse:  $U_R \sim U_L(z=g) e^{i \frac{kg^2}{2f}}$

Aufgabe 34a

ebenfalls Gauß'sches Intensitätsprofil,

aber andere Wellenfrontkrümmung:

$$\Rightarrow \frac{1}{q_1(g)} - \frac{1}{f} \stackrel{!}{=} \frac{1}{q_2(-b)} \quad \text{eine Ebene reicht: Huygens!}$$

$$\frac{1}{g + iz_{01}} - \frac{1}{f} = \frac{1}{-b + iz_{02}} \quad \text{zwei reelle Gl. für } b, z_{02} \quad \downarrow V_T$$

$$\dots \Rightarrow b = f \left( 1 - \frac{f(f-g)}{(f-g)^2 + z_{01}^2} \right) \quad z_{02} = z_{01} \frac{f^2}{(f-g)^2 + z_{01}^2} = z_{01} \frac{f-b}{f-g}$$

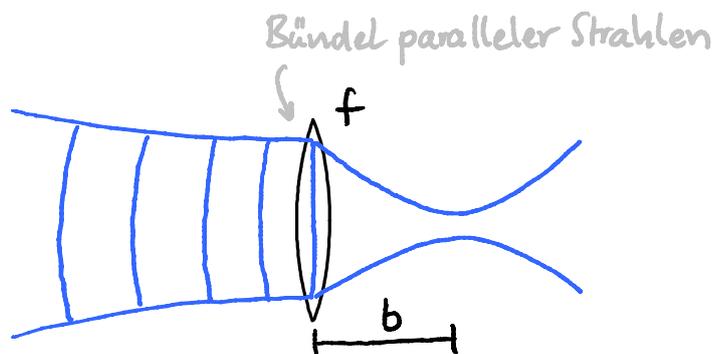
Gauß'scher Strahl ( $z_{01}, z=0$  bei  $g$ ) vor der Linse:

$\Rightarrow$  Gauß'scher Strahl nach der Linse ( $z_{02}, z=0$  bei  $b$ )

- Grenzwerte:

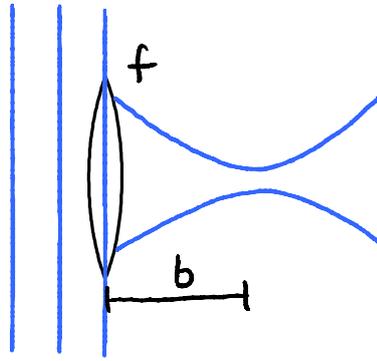
- ebene Wellenfronten an Linsenposition (links)

a)  $g=0$



$$\Rightarrow \text{Fokus bei } b = f \left( 1 - \frac{f^2}{f^2 + z_{01}^2} \right) \neq f \quad \text{aber } \approx f \quad \downarrow z_{01} \gg f$$

b)  $g = \infty$



$\Rightarrow$  Fokus bei  $b = f$

• Punktquelle  $z_{01} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow b = f \left(1 - \frac{f}{f-g}\right) = \frac{f^2 - fg - f^2}{f-g} = -\frac{fg}{f-g}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{g} - \frac{f-g}{fg} = \frac{f-f+g}{fg} = \frac{1}{f} \quad \checkmark$$

Abbildung eines Punkts

$$\bullet z_{02} = z_{01} \frac{f^2}{(f-g)^2 + z_{01}^2} \Rightarrow w_{02} = w_{01} \frac{f}{\sqrt{(f-g)^2 + \left(\frac{\kappa w_{01}^2}{\lambda}\right)^2}}$$

$\Rightarrow w_{02} \rightarrow 0$  für  $f \rightarrow 0$  oder  $w_{01} \rightarrow \infty$

Wellen aus allen Richtungen (Kugelwelle)

- Transformation des Strahlparameters

$$\bullet \text{Linse: } \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} = \frac{A/q_1 + B}{C/q_1 + D}$$

mit  $A=1; B=-\frac{1}{f}; C=0; D=1$  = ABCD Matrix Linse

- Propagation um Strecke  $d$ :

$$q(z) = z + i \frac{kW_0^2}{2} \Rightarrow \text{addiere } d$$

$$\Rightarrow q_2 = q_1 + d \Rightarrow \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1 + d} = \frac{A/q_1 + B}{C/q_1 + D}$$

mit  $A=1; B=0; C=d; D=1 =$  ABCD Matrix Strecke  $d$

Jedes optische System transformiert den Strahl-  
mit ABCD Matrix aus geometrischer Optik:

$$\boxed{\frac{1}{q_2} = \frac{A/q_1 + B}{C/q_1 + D}}$$

- Inverser komplexer Strahlparameter

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iz_0} = \frac{z}{z^2 + z_0^2} - i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{2}{kW^2(z)}$$

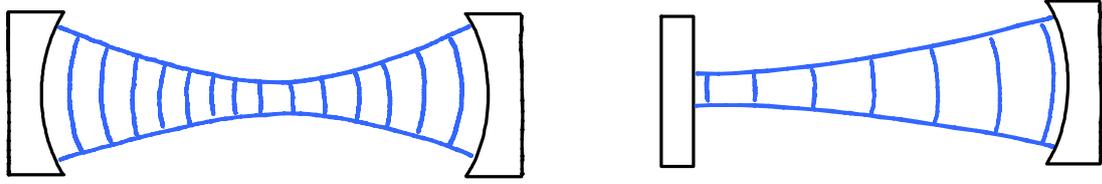
- Realteil = inverser Krümmungsradius

$$\Rightarrow \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} \text{ ändert Krümmungsradius}$$

- Imaginärteil  $\sim$  inverser Strahlradius<sup>2</sup>

$$\Rightarrow \frac{1}{q_2} = \frac{1/q_1}{d/q_1 + 1} \text{ ändert Krümmungsradius und Strahlradius}$$

- Gauß'sche Strahlen als Moden eines Resonators



( $\cos\theta = 1$  überall)

Spiegeloberfläche = Wellenfronten

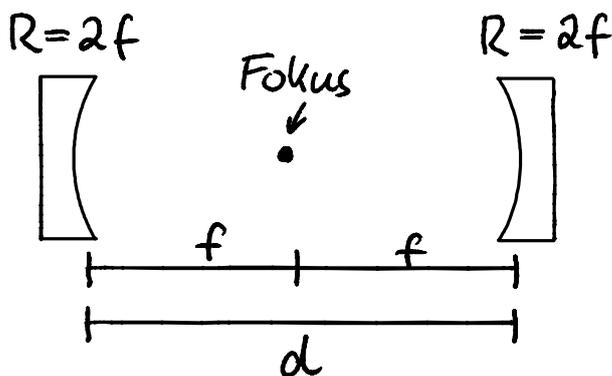
Gauß'sche Mode, hier  $TEM_{00}$

Stabilitätsbedingung wie in Strahlenoptik  $\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 \leq 1$

siehe Aufgabe 24d ↗

• "Konfokalparameter"  $2z_0 = kw_0^2$

= Mode eines konfokalen Resonators mit  $d = 2z_0$



Konfokal:  $d = R$

• Moden höherer Ordnung  $TEM_{mn}$ :

$$U_p \sim \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hermite Polynome}}}{H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right)} \underset{\substack{\uparrow \\ TEM_{00}}}{H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right)} E_{\infty}(x, y, z) e^{\substack{\uparrow \\ \text{zur. Gouy Phase}}{i(n+m) \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right)}}$$

$$H_0(x) = 1; H_1(x) = 2x; H_2(x) = 4x^2 - 2; H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$H_n(x)$  hat  $n$  Nullstellen

$H_n(x)$  : orthogonales, vollständiges Funktionensystem

$\Rightarrow$  beliebige Feldverteilung durch Überlagerung

## 19. Polarisation und Doppelbrechung

bisher nur bei Fresnel'schen Formeln und Streuung  
im homogenen Medium (z.B. Vakuum) transversal:

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y = \begin{pmatrix} E_{x0} \cos(kz - \omega t) \\ E_{y0} \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiele:

- $\varepsilon = 0$  : linear polarisiertes Licht

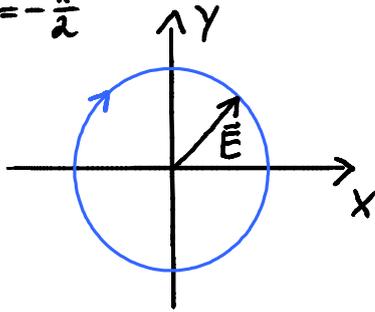
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t) = \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t)$$

- $\varepsilon = -\frac{\pi}{2}$  ;  $E_{x0} = E_{y0}$  : zirkular polarisiertes Licht

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{x0} \cos(kz - \omega t) \\ E_{y0} \cos(kz - \omega t - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

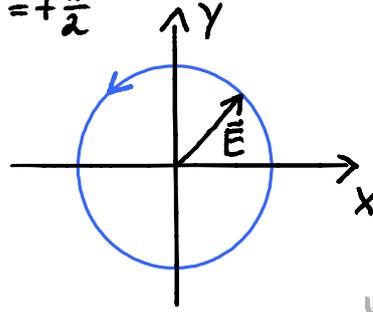
$\vec{E}$  an festem Ort ( $z=0$ )

$$\varepsilon = -\frac{\pi}{2}$$



rechtszirkular ( $\sigma^-$ )

$$\varepsilon = +\frac{\pi}{2}$$

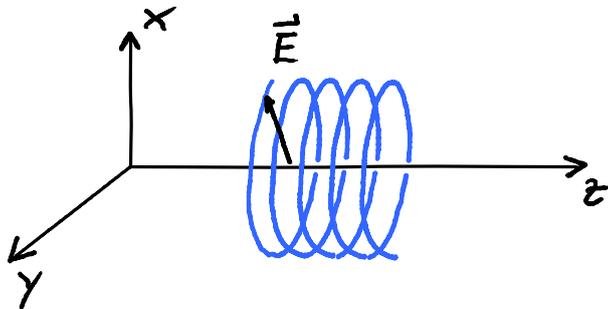


linkszirkular ( $\sigma^+$ )

relativ zur  
z-Achse

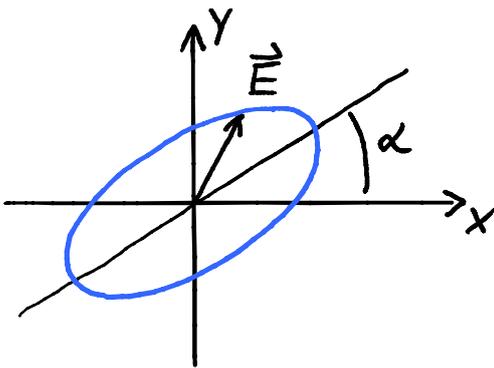
$\vec{E}$  zur festen Zeit ( $t=0$ )

beim Blick in den Strahl



beschreibt Spirale:  
trägt Drehimpuls

• allgemeiner polarisierter Fall



$\vec{E}$  beschreibt Ellipse mit  $\tan(2\alpha) = \frac{2E_{x0}E_{y0}\cos(\varepsilon)}{E_{x0}^2 - E_{y0}^2}$

- unpolarisiertes Licht

Glühbirne, Gasentladung, thermisch....

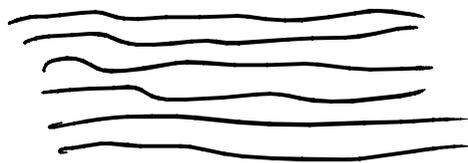
Gemisch aller Polarisationen

schnelle Fluktuation, analog zu Inkohärenz

Selektion mit Polarisator:

- Streuung (Himmelsblau)
- Reflexion (Fresnel)
- selektive Absorption

↓  
Polarisationsfolie, ausgerichtete Moleküle



$e^-$  beweglich entlang  
der Moleküle  
 $\Rightarrow$  Absorption

- Dichroismus: Absorption für  $E_{x0}$  und  $E_{y0}$   
bei verschiedenen Wellenlängen

$\Rightarrow$  Polarisation bestimmter Wellenlängen

- Doppelbrechung

anisotrope Medien (Kristalle):

Polarisierbarkeit, Dielektrizitätskonstante und  
Brechungsindex polarisationsabhängig

$$\epsilon_r = 1 + \chi = n^2 \quad \rightarrow \quad \hat{\epsilon}_r = 1 + \hat{\chi} = \hat{n}^2$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \hat{\epsilon}_r \vec{E} \Rightarrow \vec{D} \text{ nicht } \parallel \text{ zu } \vec{E}$$

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Hauptachsentransformation:

$$\overset{\uparrow}{\epsilon}_r = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

- isotrope Medien

Vakuum, Flüssigkeiten, Gläser,  
Kristalle mit kubischer Symmetrie

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$$

- einachsige Kristalle

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{\perp} \quad \epsilon_{zz} = \epsilon_{\parallel} \quad \epsilon_{\perp} \neq \epsilon_{\parallel}$$

- zweiachsige Kristalle

$$\epsilon_{xx} \neq \epsilon_{yy} \neq \epsilon_{zz} \quad (\text{und } \epsilon_{xx} \neq \epsilon_{zz})$$

Beschränkung auf einachsige Kristalle:

z-Achse = optische Achse (o.a.)

Polarisationsabhängiger Brechungsindex:

$$n_y = \sqrt{\epsilon_{yy}} + \sqrt{\epsilon_{zz}} = n_z$$

- Indexellipsoid

Energiedichte  $W = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \sum_i E_i D_i = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ij} E_i E_j$

↑ Konstante

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \sum_i \epsilon_{ii} E_i^2 \quad (\text{Hauptachsen})$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0} \left( \frac{D_x^2}{n_x^2} + \frac{D_y^2}{n_y^2} + \frac{D_z^2}{n_z^2} \right) \quad E_i^2 = \frac{D_i^2}{\epsilon_0^2 \epsilon_{ii}^2}$$

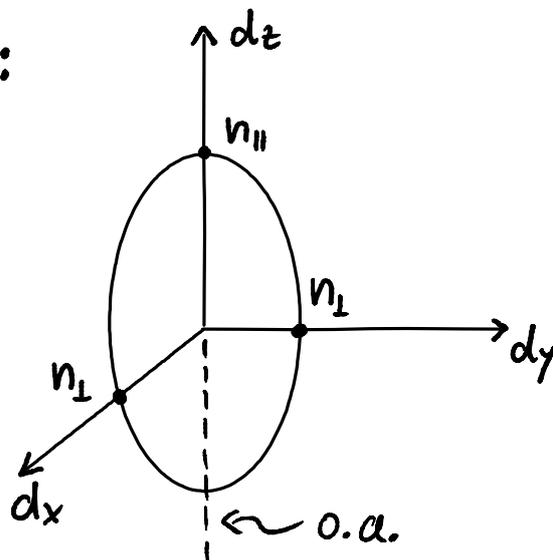
$\Rightarrow \vec{D}$  liegt auf der Oberfläche eines Ellipsoids

$n_x = n_y \neq n_z$  eine Achse "einachsiger Kristall"

$n_x \neq n_y \neq n_z$  drei Achsen "zweiachsiger Kristall"

mit  $\vec{d} \equiv \frac{\vec{D}}{\sqrt{2\epsilon_0 W}} \Rightarrow 1 = \frac{d_x^2}{n_x^2} + \frac{d_y^2}{n_y^2} + \frac{d_z^2}{n_z^2}$

Indexellipsoid:



## Beispiele für den Einsatz des Indexellipsoids

i) Propagation entlang optischer Achse:

$$\vec{d} \perp \text{zur o.a.}$$

$\Rightarrow$  Polarisationsunabhängiger Brechungsindex

ii) Propagation  $\perp$  zur optischen Achse:

$\Rightarrow$  Polarisationsabhängiger Brechungsindex

iii) Propagation weder  $\parallel$  noch  $\perp$  zur optischen Achse:

iii a)  $\vec{D} \perp$  o.a. "ordentlicher Strahl"

$\Rightarrow$  Brechungsindex unabhängig von Propagationsrichtung

$$n = n_{\perp}$$

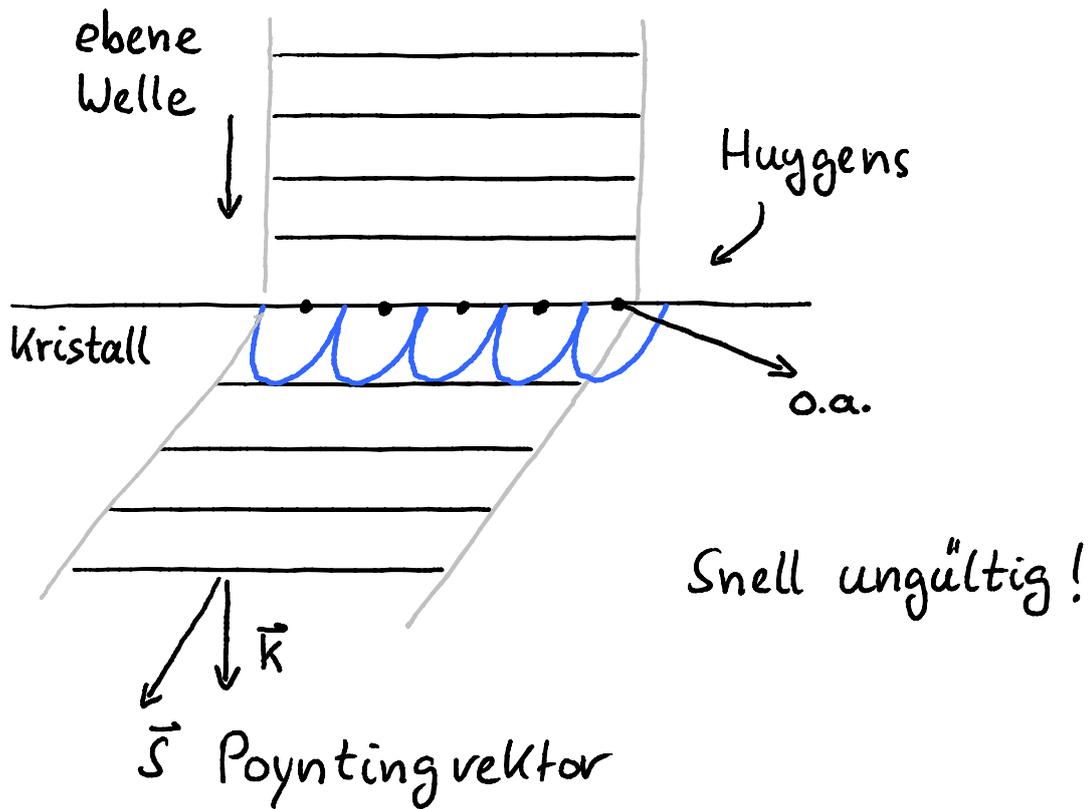
iii b)  $\vec{D}$  nicht  $\perp$  o.a. "außerordentlicher Strahl"

$\Rightarrow$  Brechungsindex abhängig von Propagationsrichtung

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_{\perp}^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_{\parallel}^2}$$

$\theta$  = Propagationsrichtung - optische Achse

Lichtgeschwindigkeit richtungsabhängig:

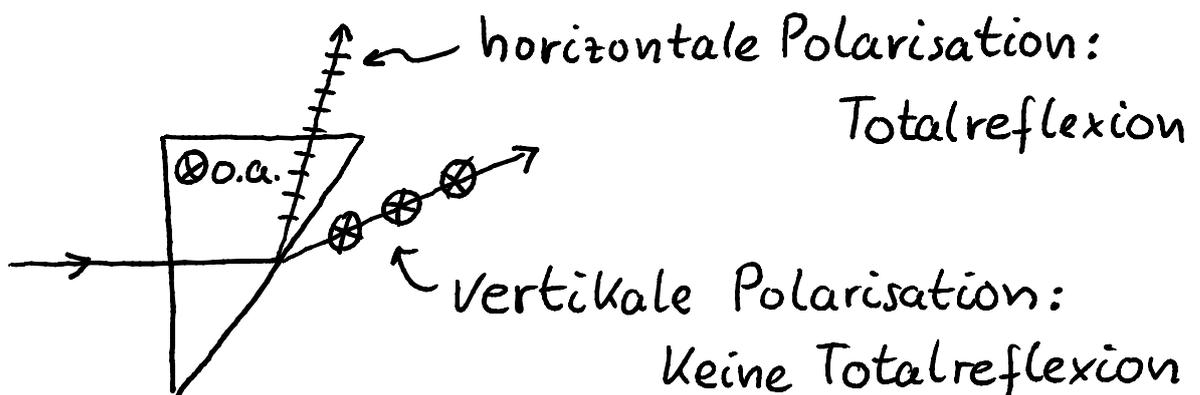


Beispiel: Kalkspat  $n_{\perp} = 1,658$   $n_{\parallel} = 1,486$

- Anwendungen

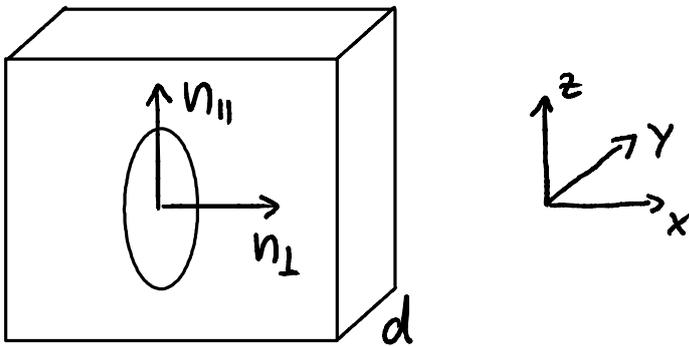
i) Polarisatoren

z.B. Glan-Foucault Polarisator



## ii) Verzögerungsplatten (Wellenplatten)

Plättchen mit optischer Achse in der Oberfläche

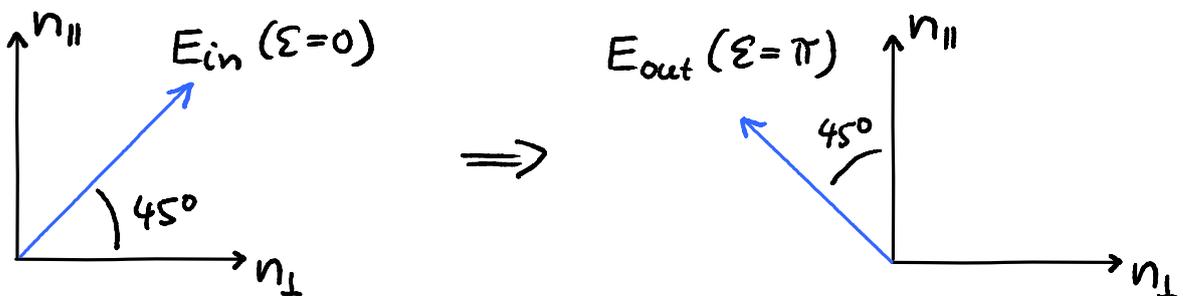


vor der Platte:  $\vec{E}_{in} = \begin{pmatrix} E_{x0} \cos(ky - \omega t) \\ 0 \\ E_{z0} \cos(ky - \omega t + \varepsilon) \end{pmatrix}$

nach der Platte:  $\vec{E}_{out} = \begin{pmatrix} E_{x0} \cos(ky - \frac{\omega}{c} n_{\perp} d - \omega t) \\ 0 \\ E_{z0} \cos(ky - \frac{\omega}{c} n_{\parallel} d - \omega t + \varepsilon) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$  Phasenverschiebung  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + \underbrace{\frac{2\pi d}{\lambda} (n_{\parallel} - n_{\perp})}_{\equiv \Delta\varphi}$

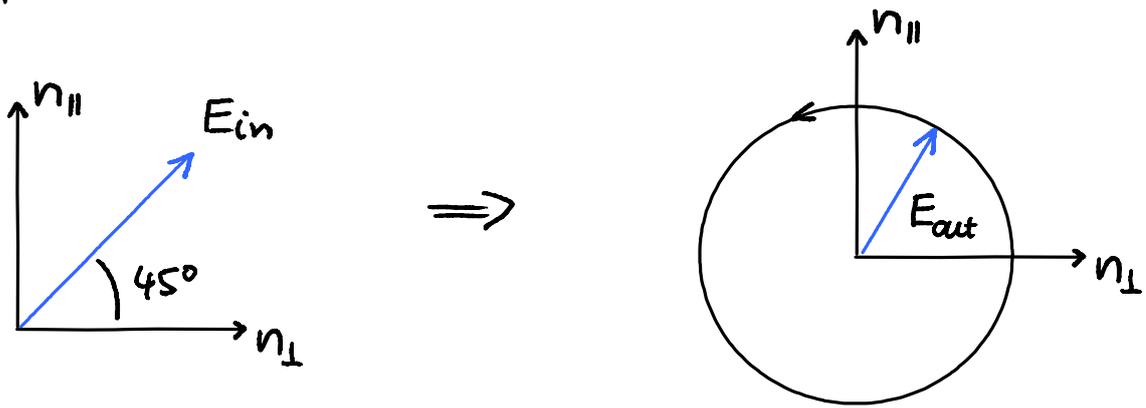
• " $\frac{\lambda}{2}$ -Platte":  $\Delta\varphi = \pi$  ( $+2\pi n$ )



$\Rightarrow$   $+45^\circ$  Polarisation wird zu  $-45^\circ$  Polarisation

allgemein:  $\vec{E}$  wird an  $n_{\parallel}$ -Achse ( $n_{\perp}$ -Achse) "umgeklappt".

• " $\frac{\lambda}{4}$ -Platte":  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \quad (+2\pi n)$



$\Rightarrow$  +45° Polarisation wird zu zirkularer Polarisation

Verzögerungsplatten machen nichts mit linear polarisiertem Licht entlang  $n_{\parallel}$  oder  $n_{\perp}$ .

- Induzierte Doppelbrechung

i) (Konstantes) elektrisches Feld  $E_{DC}$

Pockels-Effekt



$E_{DC}$  richtet vorhandene Dipole aus



$$\chi = n^2 - 1 \approx 2(n-1) \sim E_{DC}$$

$$\Rightarrow \Delta n \sim E_{DC}$$

Kerr-Effekt

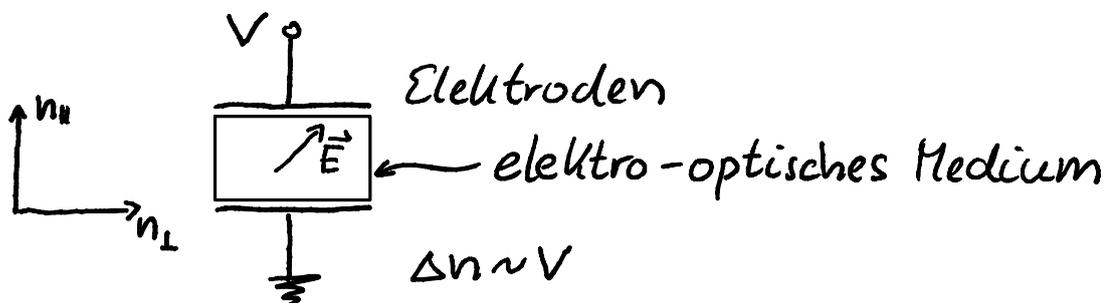


$E_{DC}$  erzeugt Dipol und richtet aus



$$\chi = n^2 - 1 \approx 2(n-1) \sim E_{DC}^2$$

$$\Rightarrow \Delta n \sim E_{DC}^2$$



⇒ einstellbare Verzögerungsplatte

Anwendung: schnelle Modulatoren

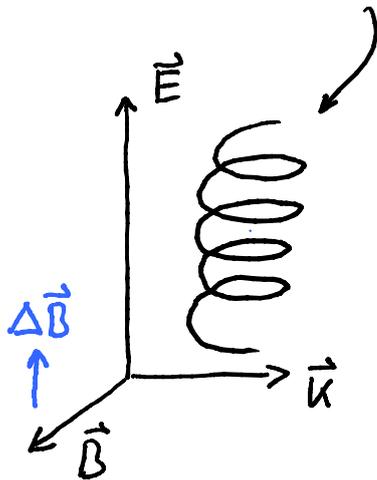
## ii) Spannungsdoppelbrechung

Mechanischer Druck ändert Brechungsindex

Anwendung: Visualisierung mechanischer Spannungen

## - Optische Aktivität (zirkulare Doppelbrechung)

chirale Moleküle, z.B. Zucker



Schraube +  $\vec{E}$  induziert Kreisstrom

⇒ Magnetfeld  $\Delta\vec{B} \parallel \vec{E}$  und  $\perp \vec{B}$

⇒ Polarisation dreht sich

Linear polarisiertes Licht = Überlagerung von rechts und links zirkularem Licht:

$$2 \begin{pmatrix} \cos(ky - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(ky - \omega t) \\ 0 \\ \sin(ky - \omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(ky - \omega t) \\ 0 \\ -\sin(ky - \omega t) \end{pmatrix}$$

linear = rechts + links

unterschiedliche Brechungsindizes für rechts/links:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \cos(ky - \omega t + \varepsilon) + \cos(ky - \omega t - \varepsilon) \\ 0 \\ \sin(ky - \omega t + \varepsilon) - \sin(ky - \omega t - \varepsilon) \end{pmatrix}$$

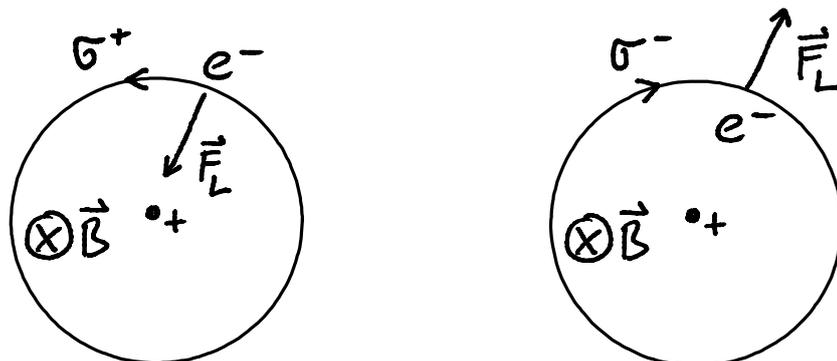
$$= 2 \cos(ky - \omega t) \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) \\ 0 \\ \sin(\varepsilon) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{lineare Polarisation} \\ \text{in } \varepsilon\text{-Richtung} \end{array}$$

Anwendung: Stoffnachweis

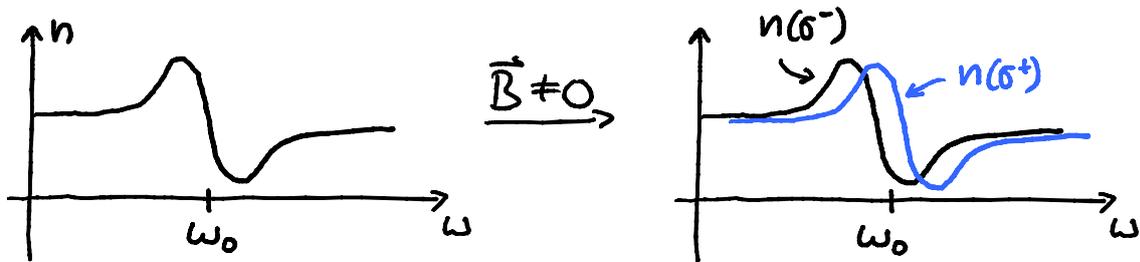
- Magnetfeldinduzierte optische Aktivität

Faraday - Effekt

Klassische Erklärung:

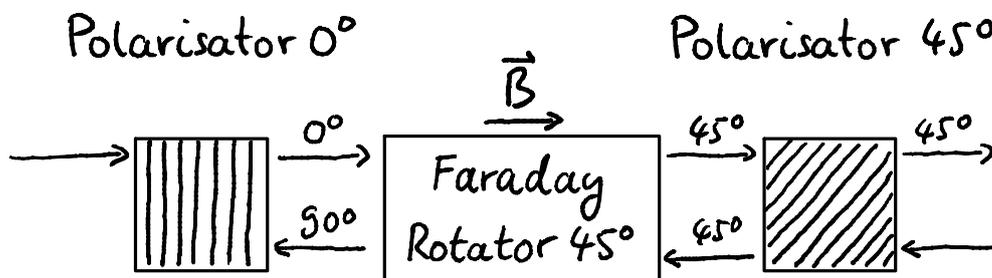


Lorentzkraft  $\vec{F}_L = -e \vec{v} \times \vec{B}$  addiert / subtrahiert sich zur Coulomb-Kraft, je nach Drehsinn des durch das Licht ( $\sigma^+$  oder  $\sigma^-$ ) erzeugten Dipols.



$\Rightarrow \sigma^+$  und  $\sigma^-$  haben verschiedenen Brechungsindex

Anwendung: Faraday-Isolator



## 20. Nichtlineare Optik

bisher: Polarisation des Mediums (Dipoldichte)

$$\vec{p} \sim \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad \text{Linear}$$

Korrekturen:

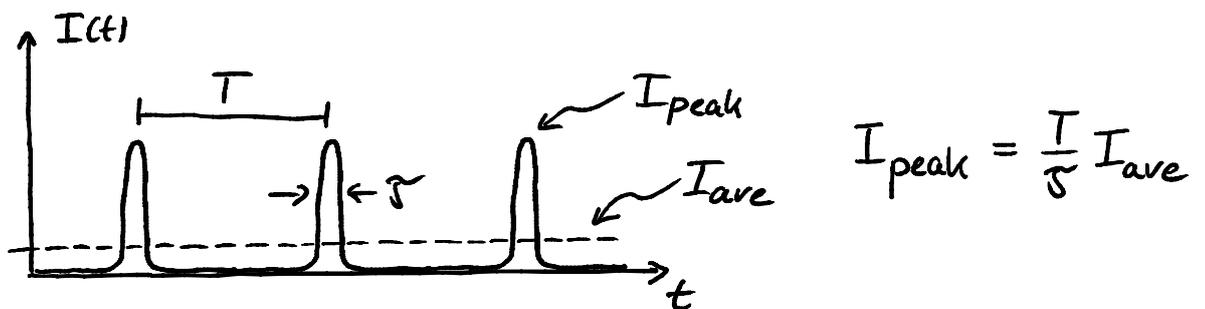
$$P = \epsilon_0 (\chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots) \quad \text{nichtlinear}$$

$$= P_{\text{lin}} + P_{\text{NL}} \quad (\text{zunächst skalar; } \chi \text{ heißt jetzt } \chi^{(n)})$$

$\Rightarrow$  brauchen große Felder (hohe Intensität):

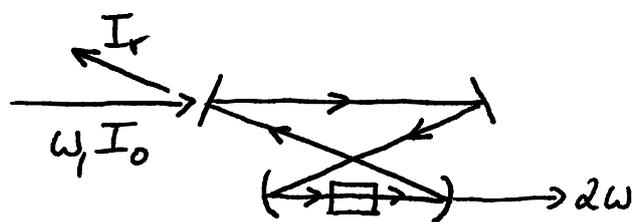
1.) Fokussieren (Laser)

2.) gepulster Laser



$$\text{typisch: } T=10\text{ns}; \tau=10\text{fs} \Rightarrow \frac{T}{\tau} = 10^6$$

3.) Resonator (Kapitel 15)



$$I_i = \frac{I_0}{1-R^3}$$

$\hat{c}$  nichtlinearer Kristall

Beispiel:  $E = E_0 \cos(\omega t) = \frac{E_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$  reell!

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= \epsilon_0 \chi^{(1)} \frac{E_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \\ &+ \epsilon_0 \chi^{(2)} \frac{E_0^2}{4} (2 + e^{i2\omega t} + e^{-i2\omega t}) \\ &+ \epsilon_0 \chi^{(3)} \frac{E_0^3}{8} (3e^{i\omega t} + 3e^{-i\omega t} + e^{i3\omega t} + e^{-i3\omega t}) + \dots \\ &= \epsilon_0 \chi^{(1)} E_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$+ \epsilon_0 \chi^{(2)} \frac{E_0^2}{2} (1 + \cos(2\omega t))$$

$$+ \epsilon_0 \chi^{(3)} \frac{E_0^3}{4} (3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t)) + \dots$$

$\Rightarrow \chi^{(n)}$  erzeugt alle Mischfrequenzen  $\pm\omega \pm \omega \pm \omega \dots$   
(n Terme mit unabhängigen Vorzeichen)

Allgemeiner: verschiedene Frequenzen können mischen:

$$\chi^{(n)} (E_1 e^{i\omega_1 t} + E_2 e^{i\omega_2 t} + \dots + c.c.)^n$$

verschiedene kartesische Komponenten  $i, j, k$

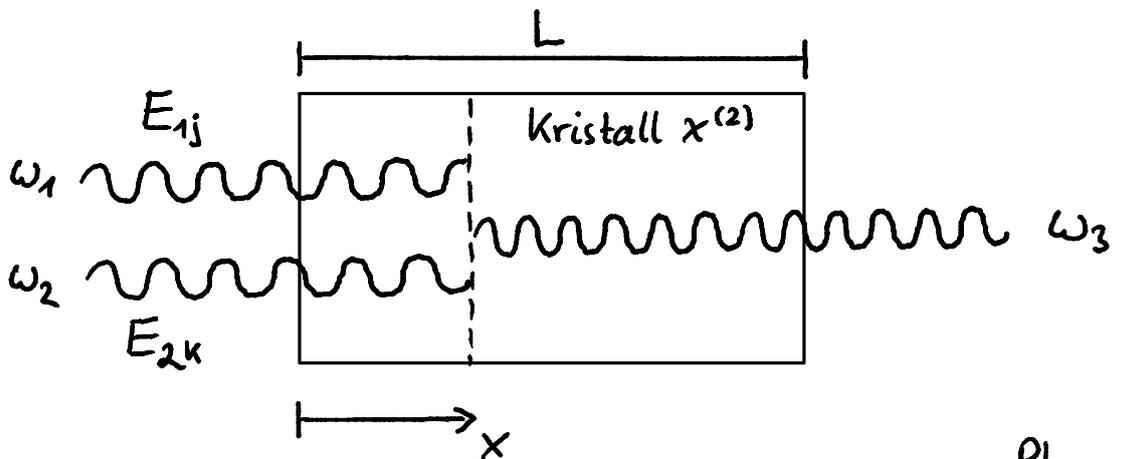
können mischen.

Beispiel  $\chi^{(2)}$  Summenfrequenz  $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$ :

$$P_i(\omega_3) = \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_2, \omega_1) E_{1j} e^{i\omega_1 t - ik_1 x} E_{2k} e^{i\omega_2 t - ik_2 x} + c.c.$$

- Selektion des Prozesses durch Phasenanpassung

Beispiel: Summenfrequenz  $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$



Dipol  $P_i(\omega_3)$  bei  $x \sim E_{1j} E_{2k} e^{-ik_1 x - ik_2 x}$  ← Phase

Phase der  $\omega_3$  Welle bei  $x=L$ :

$$\varphi = (k_1 + k_2)x + k_3(L-x) = (k_1 + k_2 - k_3)x + k_3 L$$

$\varphi$  unabhängig von  $x \Leftrightarrow$  alle  $\omega_3$  Wellen addieren sich mit gleicher Phase

$\Rightarrow$  brauchen  $k_1 + k_2 = k_3$

Allgemein:

$$\sum_{in} \vec{k}_n = \sum_{out} \vec{k}_m$$

Phasenanpassung

Spezialfall Frequenzverdoppelung:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$   $\omega_3 = 2\omega$

Phasenanpassung:  $2k_1 \stackrel{!}{=} k_3 \Rightarrow 2 \frac{2\pi n(\omega)}{\lambda_1} \stackrel{!}{=} \frac{2\pi n(2\omega)}{\lambda_1/2}$

$\Rightarrow n(\omega) \stackrel{!}{=} n(2\omega)$  gleiche Phasengeschwindigkeit

Problem: Dispersion  $n(\omega) \neq n(2\omega)$

Lösung: Doppelbrechung +  $\hat{\chi}^{(n)}$  = Tensor

z.B.  $\omega$  als ordentlicher Strahl (o)

$2\omega$  als außerordentlicher Strahl (e)

$$\frac{1}{n_e^2(\theta, 2\omega)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_{\perp}^2(2\omega)} + \frac{\sin^2 \theta}{n_{\parallel}^2(2\omega)} \stackrel{!}{=} \frac{1}{n_o^2(\omega)}$$

lösbar für negativ uniaxialen Kristall:  $\leftarrow n_{\parallel} < n_{\perp}$

$$\text{mit } \cos^2 = 1 - \sin^2: \sin^2 \theta = \frac{n_o(\omega)^{-2} - n_{\perp}(2\omega)^{-2}}{n_{\parallel}(2\omega)^{-2} - n_{\perp}(2\omega)^{-2}}$$

Berechnung mit Sellmeier  $\nearrow$

- Optischer Kerr-Effekt  $\chi^{(3)}$  (hier  $\chi^{(2)} = 0$ )

$$\omega_4 = \pm \omega_3 \pm \omega_2 \pm \omega_1 \quad \text{hier } \omega = 2\omega - \omega$$

Wellengleichung:

$$\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P}_{\text{Kapitel 4}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\chi^{(1)} E + \chi^{(3)} E^3)$$

$\frac{1}{c^2}$   $\nearrow$   $n_o^2 = 1 + \chi^{(1)}$   $\nwarrow$  neu  $\searrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} E - \frac{n_0^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = \frac{\chi^{(3)}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E^3$$

Ansatz:  $E = E_0 \sin(kx - \omega t)$

$$\Rightarrow E^3 = E_0^3 \left( \frac{3}{4} \sin(kx - \omega t) - \frac{1}{4} \sin(3kx - 3\omega t) \right)$$

↑  
 $\omega = 2\omega - \omega$

↑  
3. Harmonische

Annahme: 3. Harmonische nicht phasenangepasst

$$\Rightarrow \langle \sin(3kx - 3\omega t) \rangle = 0$$

" $\omega = 2\omega - \omega$ " Prozess immer phasenangepasst

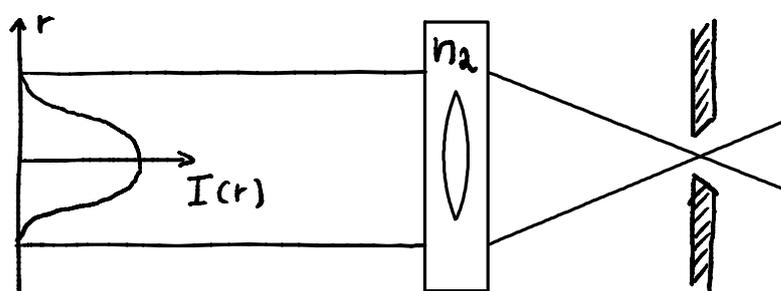
Einsetzen mit  $E_0^2 = 2I / \epsilon_0 c n_0$   $I = \text{Intensität}$

$$\Rightarrow -k^2 + \frac{(n_0^2 + 2n_0 n_2 I) \omega^2}{c^2} = 0$$

mit  $n_2 \equiv \frac{3\chi^{(3)}}{4\epsilon_0 c n_0^2} \Rightarrow n = \sqrt{n_0^2 + 2n_0 n_2 I}$   
↖  $\ll n_0^2$

$\Rightarrow$   $n(I) = n_0 + n_2 I$  Intensitätsabhängiger Brechungsindex

• Selbstfokussierung (Kerr-Linse)



Erzeugung kurzer Pulse

- Selbstphasenmodulation

$$E_0 e^{i\omega t - ikx} = E_0 e^{i\omega t - i\frac{\omega}{c}n_2 x} = E_0 e^{i\omega t - i\frac{\omega}{c}(n_0 + n_2 I)x}$$

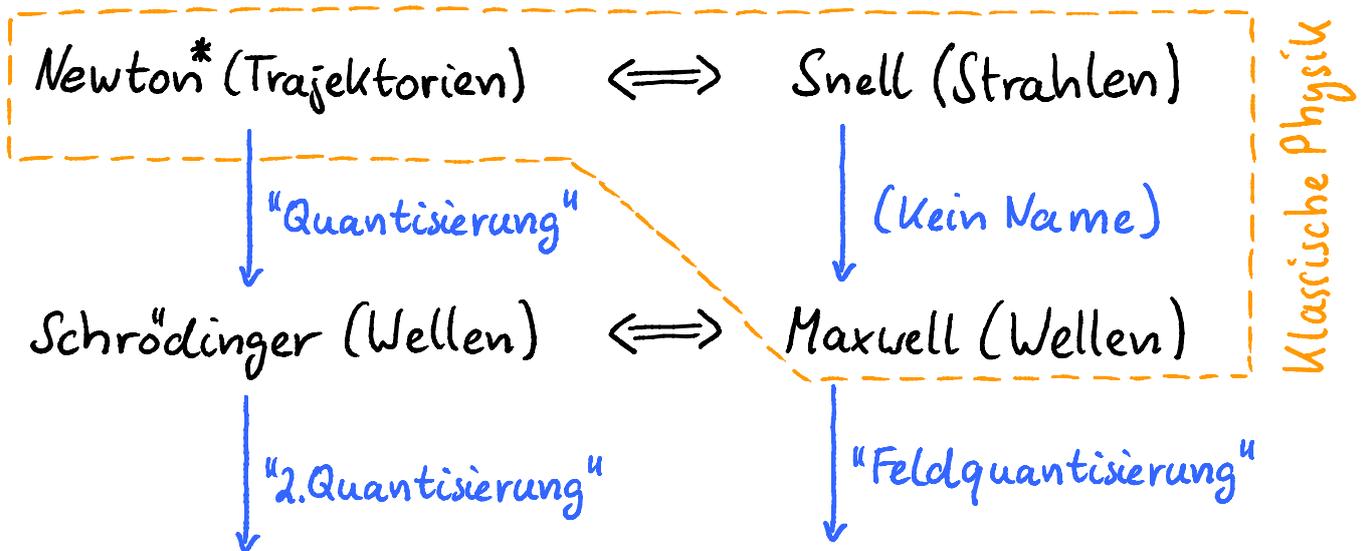
$I = I(t)$  sehr schnell

$\Rightarrow$  zusätzliche Frequenzen  $\frac{\omega}{c} n_2 \dot{I}(t)x$

## 21. Quantenphänomene

Mechanik

Optik



Quantenfeldtheorie; quantisierte Wellen: Teilchen

↶ einheitliche Beschreibung; außer Gravitation (ART)

(siehe T2)

• Wellen:  $\psi(x,t) = \psi_0 e^{ikx - i\omega t}$       Optik:  $\psi(x,t) = E(x,t)$

Impuls      Energie

↑  
anderes Vorzeichen in QM

\*bzw spezielle Relativitätstheorie

- Teilchendichte = Intensität =  $|\psi(x,t)|^2$
- Energieeigenzustand  $|\psi(x,t)|^2 = \text{const.}$  ("statisch")

Überlagerung:

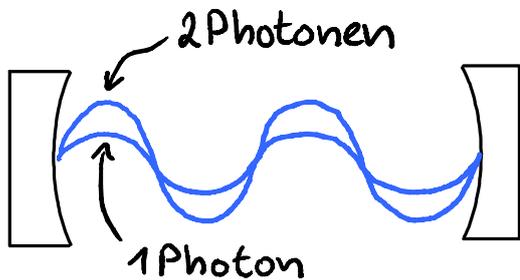
$$|\psi_{01} e^{-i\omega_1 t} + \psi_{02} e^{-i\omega_2 t}|^2 = |\psi_{01}|^2 + |\psi_{02}|^2 + 2\psi_{01}\psi_{02}^* \cos((\omega_2 - \omega_1)t)$$

⇒ H-Atom Grundzustand stabil; Überlagerungen mit angeregten Zuständen strahlen (siehe E4).

- Optik + Quanten = Quantenoptik

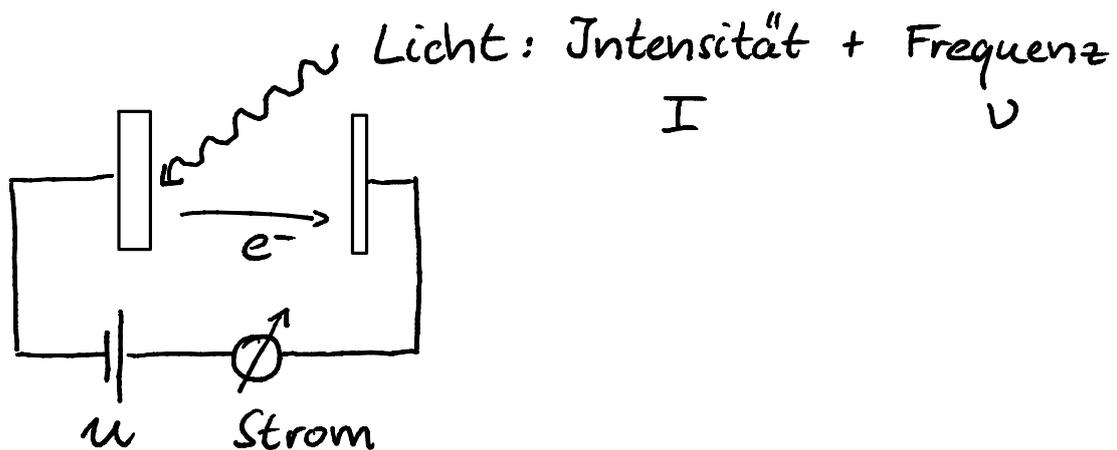
einfachstes Photon:

Amplitudenstufe einer Resonatormode



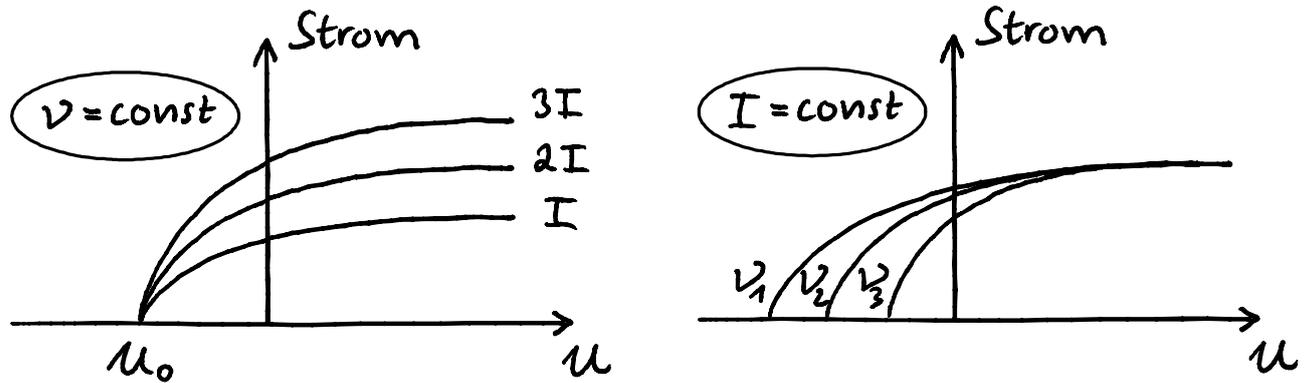
Experimentelle Hinweise:

- Hallwachs-Effekt (1886)



- negativ geladene Platte entlädt sich  $\curvearrowright e^-$
- positiv geladene Platte entlädt sich nicht

Energie der Elektronen mit Gegenspannung  $U$ :



- $U_0$  unabhängig von der Lichtintensität  $I$   
 $\Rightarrow e^-$  nehmen stets dieselbe Energie aus dem Feld auf
- $e^-$  Stoßzeit  $\approx 30 \text{ fs}$ ; Lichtfeld polt sich um  $\approx 2 \text{ fs}$   
 $\Rightarrow e^-$  nehmen Energie aus dem Feld "sehr schnell" auf
- $U_0$  abhängig von der Frequenz  $\nu$

Messung:  $eU_0 = E_{\text{kin}} = h\nu - A$

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J Hz}^{-1}$$

Planck'sches  
Wirkungsquantum

$A = \text{Austrittsarbeit} + \text{Kontaktspannungen}$   
(Materialeigenschaft)

Feldenergie kann nur in Paketen von  $h\nu$  an die Metallelektronen abgegeben werden.  
Diese Pakete heißen Photonen.

Relativistische Energie-Impuls Beziehung

(Wellengleichung  $\Leftrightarrow$  Dispersionsrelation)

*Siehe Aufgabe 2b*

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + p^2 c^2 \quad m_0 = 0 \quad \text{wegen } v = c:$$

$$\Rightarrow E^2 = (h\nu)^2 = p^2 c^2 \quad \Rightarrow p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

$\leftarrow = \frac{h}{2\pi}$

$E = h\nu$	$\vec{p} = \hbar \vec{k}$	Photonen
------------	---------------------------	----------

+ Spin  $\sigma^+, \sigma^-$

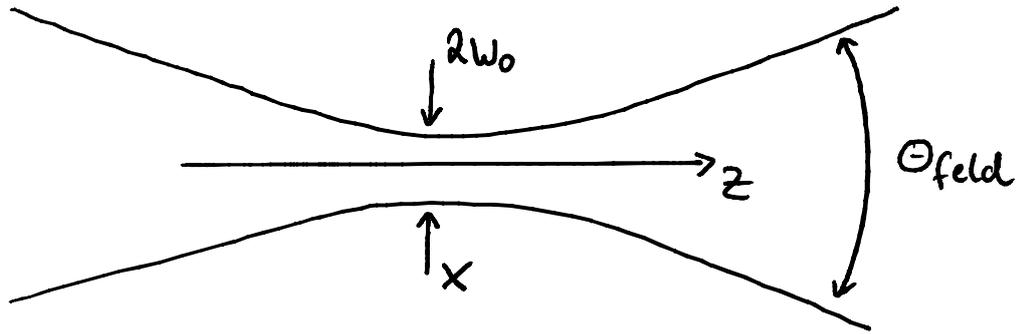
- Neue Interpretationen

i) Nichtlineare Optik; Summenfrequenz

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \quad \text{Energieerhaltung}$$

$$\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \quad \text{Impulserhaltung}$$

ii) Unschärferelation; Gauß'scher Strahl TEM<sub>00</sub>



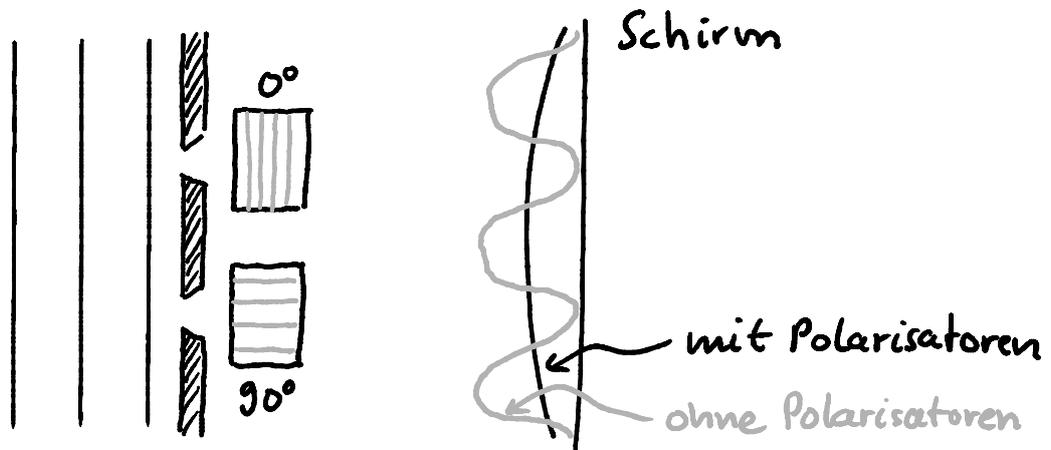
$$\Theta_{\text{feld}} = \frac{2\lambda}{\pi w_0} \Rightarrow \Theta_{\text{int}} = \frac{\Theta_{\text{feld}}}{\sqrt{2}}$$

$$P_x: \frac{\Delta p_x}{p_z} = \frac{\Theta_{\text{int}}}{2} \quad x: \Delta x = w_0$$

$$\Rightarrow \Delta p_x \Delta x = \frac{\sqrt{2}\lambda}{2\pi w_0} \hbar \frac{2\pi}{\lambda} w_0 = \sqrt{2} \hbar \approx \hbar$$

iii) Interferenz einzelner Photonen

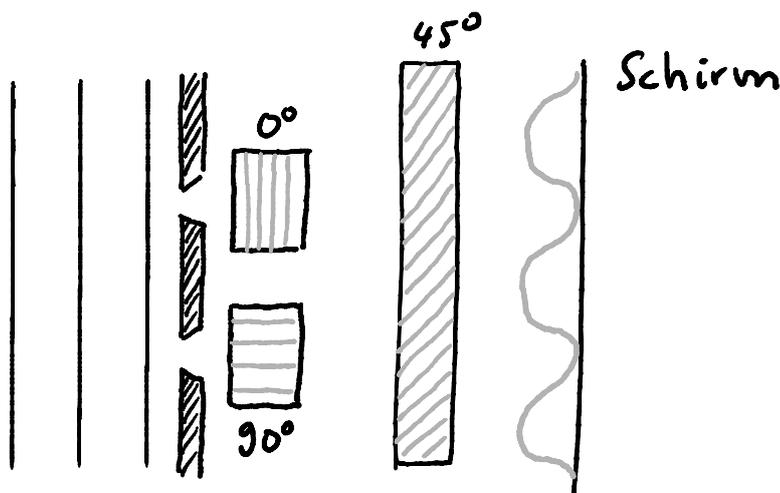
„Welle-Teilchen Dualismus“



alt: Orthogonal polarisierte Wellen  
interferieren nicht.

- neu: Polarisatoren markieren Photonen  
 $\Rightarrow$  "welcher-Weg Information"  
 $\Rightarrow$  Photon verhält sich wie Teilchen  
 $\Rightarrow$  Keine Interferenz

Weiterer Polarisator:



alt: Projektion mit  $45^\circ$  Polarisator stellt  
 Interferenz wieder her.

neu:  $45^\circ$  Polarisator löscht  
 "welcher-Weg Information"  
 $\Rightarrow$  "Quantenradierer!"

Interferenz genau dann wenn man keine  
 "welcher-Weg Information" hat.

(siehe auch räumliche Kohärenz)

- Quantenmechanik massiver Teilchen

de Broglie Wellenlänge analog zu  $p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}$

$\Rightarrow \lambda_{dB} = \frac{h}{p}$  für alle Teilchen

Bohr Wasserstoff:  $(r) \Rightarrow 2\pi r \stackrel{!}{=} n \lambda_{dB}$  (+Kepler)

Wellen  $\Rightarrow$  Beugung; Interferenz

Beispiele:

i) Elektron mit  $E = \frac{p^2}{2m} = 1\text{eV} \Rightarrow \lambda_{dB} = 1,2\text{nm}$

ii) thermisches H-Atom  $\bar{v} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 2700 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \lambda_{dB} = 0,15\text{nm}$

iii) Person  $m = 100\text{kg}$   $v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \lambda_{dB} = 6,6 \times 10^{-36} \text{m}$

Beugung an Spalt  $b = 1\text{m}$  (Tür)

$\Rightarrow \Theta_{\min} = \frac{\lambda}{b} = 6,6 \times 10^{-36} \text{rad}$

Fernfeld:  $\frac{b^2}{\lambda} = 1,5 \times 10^{35} \text{m}$  ( $r_{\text{universum}} = 1,3 \times 10^{26} \text{m}$ )

Wellengleichung:  $\psi' = i \frac{\hbar}{2m} \psi''$

$\Rightarrow \psi = e^{ikx - i\omega t} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}$  Dispersion

$$\cdot v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}} = \sqrt{\frac{E}{2m}} = \sqrt{\frac{p^2}{4m^2}} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2} \quad (?)$$

$$\cdot v_{gr} = (k')^{-1} = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar\omega}}\right)^{-1} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{p^2}{m^2}} = v \quad (\text{o.k.})$$

$$\cdot k'' = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega^3}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m\hbar^2}{2E^3}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4m^4\hbar^2}{p^6}} = -\frac{\hbar}{mv^3}$$

Wellenpaket, Dauer - räumliche Größe

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2 \times k''}{\mathcal{I}_0^2}\right)^2} = \mathcal{I}_0 \sqrt{1 + \frac{4 \times \hbar^2}{m^2 v^6 \mathcal{I}_0^4}} = \mathcal{I}_0 \sqrt{1 + \frac{4t^2\hbar^2}{m^2 \sigma_0^4}}$$

$x = vt \quad \sigma_0 = v\mathcal{I}_0$

räumlich:  $\sigma(t) = \sigma_0 \sqrt{1 + \frac{4t^2\hbar^2}{m^2 \sigma_0^4}}$

i) Elektron  $E = 1\text{eV} = \frac{(mv)^2}{2m} \Rightarrow v = 593 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

$$\mathcal{I}_0 = \frac{\alpha^2 a_0}{v} = 4,8 \times 10^{-21} \text{ s}$$

$\alpha^2 a_0 =$  "klassischer Elektronenradius"  
 $\uparrow$  Bohr Radius

Feinstrukturkonstante

$$k'' = 5,6 \times 10^{-22} \frac{\text{s}^2}{\text{m}} \Rightarrow \mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \sqrt{2} \text{ nach } 3,4 \times 10^{-26} \text{ s } (2,0 \times 10^{-20} \text{ m})$$

ii) thermisches H-Atom  $v = 2700 \frac{m}{s}$

$$\tau_0 = \frac{a_0}{v} = 20 \text{ fs}$$

$$k'' = 3,2 \times 10^{-18} \frac{s^2}{m} \Rightarrow \tau = \tau_0 \sqrt{2} \text{ nach } 2,3 \times 10^{-14} \text{ s } (1,2 a_0)$$

iii) Person  $v = 1 \frac{m}{s}$   $m = 100 \text{ kg}$

$$\tau_0 = \frac{0,5 m}{v} = 0,5 \text{ s}$$

$$k'' = 8,4 \times 10^{-36} \frac{s^2}{m} \Rightarrow \tau = \tau_0 \sqrt{2} \text{ nach } 3,0 \times 10^{+34} \text{ s } (7,8 \times 10^{17} \text{ Lj})$$

### • Materiewellenpakete

Dispersion auch im Vakuum  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  (für  $m \neq 0$ )

Wellenpaket in Ruhe  $\psi(x, t=0) = \psi_0 e^{-x^2/\sigma_0^2}$

F.T.  $\{\psi(x, t=0)\}_{x \rightarrow k}$ ; Propagation; Rücktransformation:

$$\Rightarrow \psi(x, t) = \psi_0 e^{-x^2/\sigma^2(t)} \quad \sigma(t) = \sigma_0 \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 \sigma_0^4}}$$

### • Kohärenzlänge, Autokorrelation

$$g_1(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x, t) \psi(x+\delta, t) dx = \dots = |\psi_0|^2 e^{-\delta^2/\sigma_0^2}$$

$\Rightarrow$  Kohärenzlänge bleibt klein  $\sigma_0 = \sigma(t=0)$

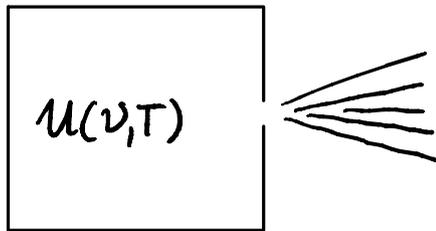
$g_1$ : Feldautokorrelation  $\hat{=}$  "normale Interferenz"

$g_2$ : Intensitätsautokorrelation  $\hat{=}$  "echte Quanteneffekte"

## 22. Wärmestrahlung

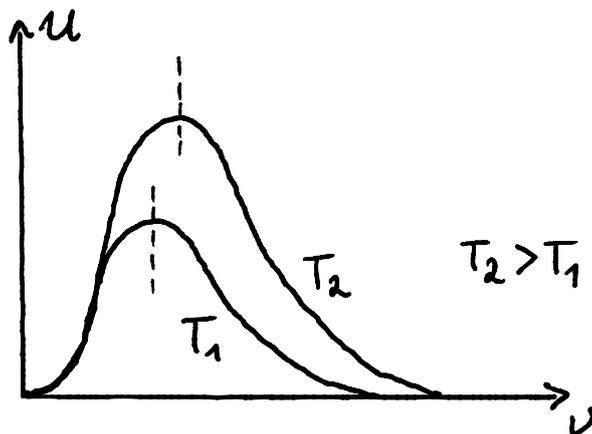
= Planck-Strahlung, Schwarzkörperstrahlung

Beste Quelle: Hohlraum



Energiedichte des  
Strahlungsfelds  $U(\nu, T)$   
pro Volumen u. Frequenz

Experimentell:



Theoretisch

1.) Klassische Physik

• Moden des Hohlraums  $L^3$ :

$$\Rightarrow k_{x,y,z} = n_{x,y,z} \frac{\pi}{L} \Rightarrow n_{x,y,z} \frac{\lambda}{2} = L \dots \Rightarrow$$

Dichte der Moden (= Freiheitsgrade):

$$g(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \left[ \frac{1}{\text{m}^3 \text{Hz}} \right]$$

- Wahrscheinlichkeit für Energie im Freiheitsgrad (= Mode) im thermischen Gleichgewicht:

Boltzmann  $P(E) \sim e^{-E/k_B T}$  (siehe E1)

- Normierung  $\int_0^{\infty} e^{-E/k_B T} dE = k_B T$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{1}{k_B T} e^{-E/k_B T}$$

- mittlere Energie pro Freiheitsgrad:

$$\int_0^{\infty} E P(E) dE = k_B T$$

$$\Rightarrow u(\nu, T) = k_B T g(\nu) = k_B T \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \text{ Rayleigh-Jeans}$$

$$\Rightarrow \text{Kein Maximum, } u(\nu, T) \sim \nu^2 \quad \Downarrow$$

$$\Rightarrow \text{Gesamtenergie } \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \infty \quad \Downarrow$$

2.) Quantenmechanisch (Planck 1900)

Annahme: Energie kann nur in Paketen von  $h\nu$  aufgenommen oder abgegeben werden

- Verteilung der Energie immer noch:

Boltzmann  $P(E) \sim e^{-E/k_B T}$

neu:  $E_n = n h \nu$

- Normierung

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n h \nu / k_B T} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{mit } q = e^{-h \nu / k_B T}$$

$$\Rightarrow P(E_n) = (1 - e^{-h \nu / k_B T}) e^{-n h \nu / k_B T} = (1 - q) q^n$$

- mittlere Energie pro Freiheitsgrad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n P(E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} n h \nu (1 - q) q^n$$

$$= (1 - q) h \nu \sum_{n=0}^{\infty} n q^n \quad \leftarrow = \frac{q}{(1 - q)^2}$$

$$= h \nu \frac{q}{1 - q} = \frac{h \nu}{1/q - 1} = \frac{h \nu}{e^{h \nu / k_B T} - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(\nu, T) = \frac{8 \pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h \nu / k_B T} - 1}} \quad \text{Planck'sche Strahlungsformel}$$

- Passt zur beobachteten Strahlungsdichte (Maximum, endlich...)

- Klassische Näherung "Kleine Photonen"

$$h\nu \ll k_B T$$

(hohe Temperatur; niedrige Frequenz;  $h \rightarrow 0$ )

$$\Rightarrow e^{h\nu/k_B T} \approx 1 + \frac{h\nu}{k_B T} + \dots$$

$$\Rightarrow u(\nu, T) \approx k_B T \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad \text{Rayleigh - Jeans}$$

- Stefan - Boltzmann

$$\frac{c}{4\pi} \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \sigma T^4$$

Umrechnung  
in Intensität

$$\text{mit } \sigma \equiv \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = 5,7 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

$$= 460 \text{ W pro m}^2 \text{ bei } T = 300 \text{ K}$$

- Wien'sches Verschiebungsgesetz

$$\dots \Rightarrow \lambda_{\text{max}} T = 0,29 \text{ cm K}$$

$$\nu_{\text{max}} = 30 \text{ THz} \quad \text{bei } T = 300 \text{ K}$$

- Einstein'sche Herleitung der Planck Formel

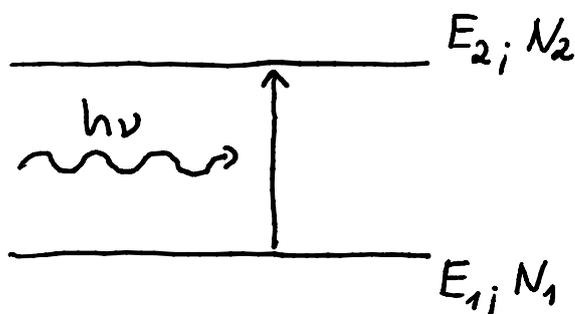
Energieniveaus der "Wandatome"  $E_1$  und  $E_2$

Anzahl der Atome in  $E_1$  ( $E_2$ ) ist  $N_1$  ( $N_2$ )

Annahme: 3 Prozesse des Energieaustauschs

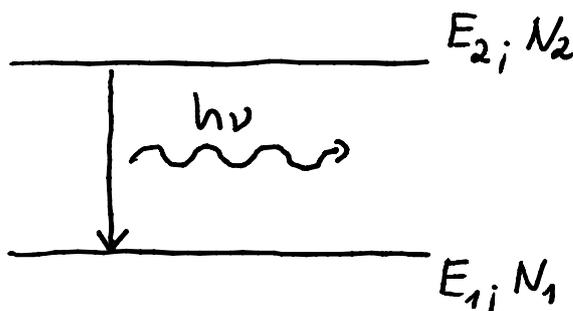
von  $h\nu$  zwischen Wand und Hohlraum

1.) Absorption aus dem Strahlungsfeld:



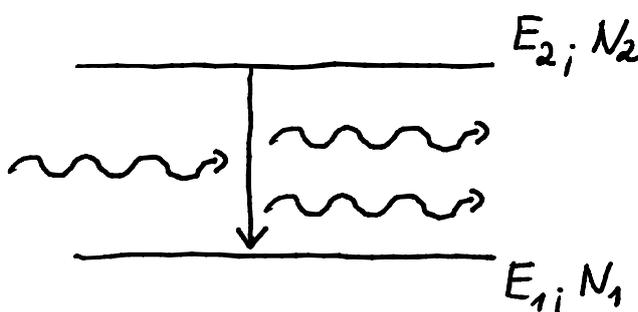
$$\left. \frac{dN_1}{dt} \right|_{ab} = -B_{12} u(\nu, T) N_1$$

2.) Spontane Emission ins Strahlungsfeld:



$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{sp} = -A_{21} N_2$$

3.) Stimulierte Emission ins Strahlungsfeld:



$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{st} = -B_{21} u(\nu, T) N_2$$

$$\text{mit } N = N_1 + N_2 = \text{const} \Rightarrow \frac{dN_1}{dt} = - \frac{dN_2}{dt}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dN_1}{dt} &= \left. \frac{dN_1}{dt} \right|_{ab} + \left. \frac{dN_1}{dt} \right|_{sp} + \left. \frac{dN_1}{dt} \right|_{st} \\ &= -B_{12} u(\nu, T) N_1 + A_{21} N_2 + B_{21} u(\nu, T) N_2 \end{aligned}$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht:

$$\frac{dN_1}{dt} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad \frac{N_2}{N_1} = e^{-h\nu/k_B T}$$

$$\Rightarrow A_{21} = (B_{12} e^{h\nu/k_B T} - B_{21}) u(\nu, T)$$

mit  $\lim_{T \rightarrow \infty} u(\nu, T) = \infty$  aber  $A_{21} = \text{const} \Rightarrow B_{12} = B_{21}$

$$\Rightarrow A_{21} = B_{12} (e^{h\nu/k_B T} - 1) u(\nu, T)$$

$$\Rightarrow u(\nu, T) = \frac{A_{21}}{B_{12}} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

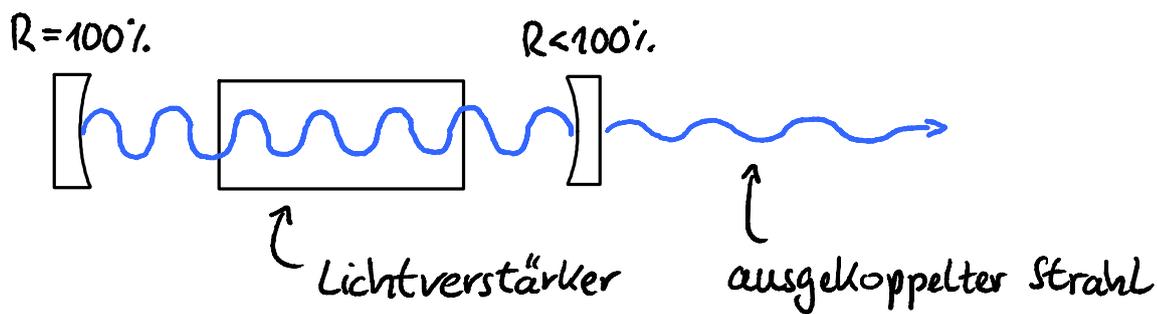
für  $h\nu \ll k_B T$ : Rayleigh-Jeans  $\Rightarrow \frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}$

$$\Rightarrow u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

Einstein Ableitung liefert das richtige Ergebnis unter der Annahme der stimulierten Emission.

$\Rightarrow$  Lichtverstärker!

## 23. Laser



- Dichte der Photonen im Resonator

$$n = \frac{u(\nu) \Delta\nu}{h\nu}$$

Strahlungsdichte  $u(\nu)$  [ $\frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}}$ ] ( $\neq$  Planck)

$\Delta\nu =$  Linienbreite des Resonators

- spontane Emission:  $\left. \frac{dn}{dt} \right|_{sp} \sim A_{21} N_2$

ist nicht gerichtet  $\Rightarrow$  die meisten spontanen

Photonen verlassen den Resonator  $\Rightarrow \left. \frac{dn}{dt} \right|_{sp} \approx 0$

- stimulierte Emission ist in Phase mit dem stimulierenden Feld und daher gerichtet:

$$\left. \frac{dn}{dt} \right|_{st} = - \left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{st} = B_{12} u(\nu) N_2 = B_{12} \frac{h\nu}{\Delta\nu} n N_2$$

- Absorption:

$$\left. \frac{dn}{dt} \right|_{ab} = \left. \frac{dN_1}{dt} \right|_{ab} = -B_{12} u(\nu) N_1 = -B_{12} \frac{h\nu}{\Delta\nu} n N_1$$

- Verluste + Auskopplung:

$$\Rightarrow \text{"Photonen Lebensdauer" } t_0 \Rightarrow \left. \frac{dn}{dt} \right|_{ver} = -\frac{n}{t_0}$$

$$\Rightarrow \frac{dn}{dt} = \frac{h\nu}{\Delta\nu} B_{12} N_2 n - \frac{h\nu}{\Delta\nu} B_{12} N_1 n - \frac{n}{t_0}$$

$$\Rightarrow n(t) = n(t=0) \exp\left(\underbrace{\left[\frac{h\nu}{\Delta\nu} B_{12} (N_2 - N_1) - \frac{1}{t_0}\right]}_{\equiv \gamma} t\right)$$

$\gamma > 0$ :  $n(t)$  steigt exponentiell an (Verstärkung)

$\gamma < 0$ :  $n(t)$  klingt exponentiell ab (Dämpfung)

- Bedingung für Laseroszillation:

$$N_2 - N_1 > \frac{\Delta\nu}{t_0 B_{12} h\nu} = \frac{8\pi\nu^2 \Delta\nu}{c^3 t_0 A_{12}} = \frac{8\pi\nu^2 \Delta\nu \gamma}{c^3 t_0}$$

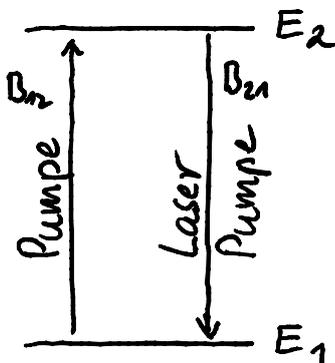
mit  $\gamma = \frac{1}{A_{21}}$  = Lebensdauer des angeregten Zustands

$N_2 - N_1 > 0$  : Inversion

- thermisch  $N_2 = N_1 e^{-h\nu/k_B T} \Rightarrow N_2 - N_1 < 0$
- Inversion durch "pumpen"

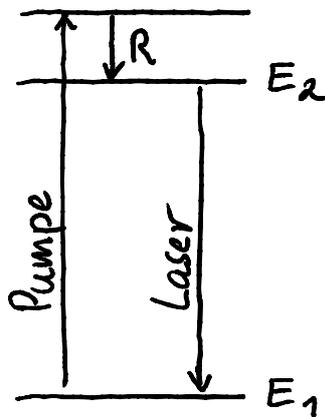
- Pumpen:

2 Niveaus



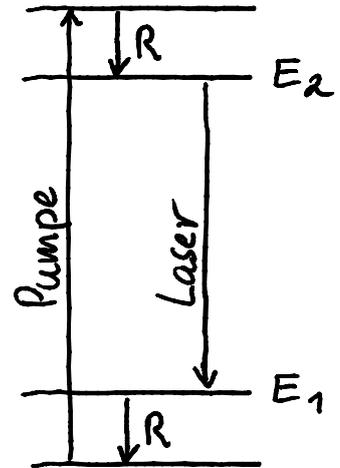
geht nicht!

3 Niveaus



geht

4 Niveaus

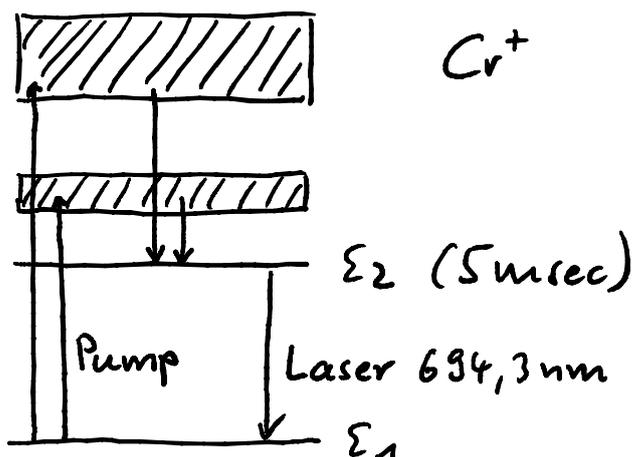


geht besser

- Lasertypen

- Festkörper Laser

z.B. Rubin (Maiman 1960)



Mit Blitzlampe oder  
anderem Laser  
gepumpt.

Gepulster Betrieb

- Gaslaser

  - z.B. HeNe (Ali Javan 1961)

    - erster kontinuierlicher Laser

    - CO<sub>2</sub> Laser 10,6 μm, sehr hohe Leistung

- Halbleiter Laser

  - p-n Übergang, elektrisch gepumpt

  - klein (Laserpointer), effizient, billig

- Farbstoff Laser

  - mit Laser gepumpt

  - einmodig möglich, durchstimmbar

  - für Wissenschaft

- Glasfaser Laser

  - mit Halbleiterlaser gepumpt

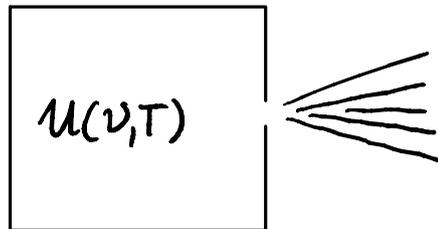
- Excimer Laser, Farbzentren Laser, freier

  - Elektronenlaser, Ionen Laser .....

## 22. Wärmestrahlung

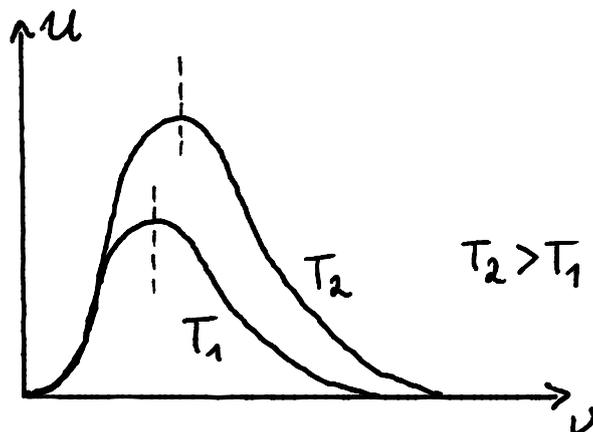
= Planck-Strahlung, Schwarzkörperstrahlung

Beste Quelle: Hohlraum



Energiedichte des  
Strahlungsfelds  $U(\nu, T)$   
pro Volumen u. Frequenz

Experimentell:



Theoretisch

1.) Klassische Physik

• Moden des Hohlraums  $L^3$ :

$$\Rightarrow k_{x,y,z} = n_{x,y,z} \frac{\pi}{L} \Rightarrow n_{x,y,z} \frac{\lambda}{2} = L \dots \Rightarrow$$

Dichte der Moden (= Freiheitsgrade):

$$g(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \left[ \frac{1}{\text{m}^3 \text{Hz}} \right]$$

- Wahrscheinlichkeit für Energie im Freiheitsgrad (= Mode) im thermischen Gleichgewicht:

Boltzmann  $P(E) \sim e^{-E/k_B T}$  (siehe E1)

- Normierung  $\int_0^{\infty} e^{-E/k_B T} dE = k_B T$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{1}{k_B T} e^{-E/k_B T}$$

- mittlere Energie pro Freiheitsgrad:

$$\int_0^{\infty} E P(E) dE = k_B T$$

$$\Rightarrow u(\nu, T) = k_B T g(\nu) = k_B T \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad \text{Rayleigh-Jeans}$$

$$\Rightarrow \text{Kein Maximum, } u(\nu, T) \sim \nu^2 \quad \Downarrow$$

$$\Rightarrow \text{Gesamtenergie } \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \infty \quad \Downarrow$$

2.) Quantenmechanisch (Planck 1900)

Annahme: Energie kann nur in Paketen von  $h\nu$  aufgenommen oder abgegeben werden

- Verteilung der Energie immer noch:

Boltzmann  $P(E) \sim e^{-E/k_B T}$

neu:  $E_n = n h \nu$

- Normierung

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n h \nu / k_B T} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{mit } q = e^{-h \nu / k_B T}$$

$$\Rightarrow P(E_n) = (1 - e^{-h \nu / k_B T}) e^{-n h \nu / k_B T} = (1 - q) q^n$$

- mittlere Energie pro Freiheitsgrad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n P(E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} n h \nu (1 - q) q^n$$

$$= (1 - q) h \nu \sum_{n=0}^{\infty} n q^n \quad \leftarrow = \frac{q}{(1 - q)^2}$$

$$= h \nu \frac{q}{1 - q} = \frac{h \nu}{1/q - 1} = \frac{h \nu}{e^{h \nu / k_B T} - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(\nu, T) = \frac{8 \pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h \nu / k_B T} - 1}} \quad \text{Planck'sche Strahlungsformel}$$

- Passt zur beobachteten Strahlungsdichte (Maximum, endlich...)

- Klassische Näherung "Kleine Photonen"

$$h\nu \ll k_B T$$

(hohe Temperatur; niedrige Frequenz;  $h \rightarrow 0$ )

$$\Rightarrow e^{h\nu/k_B T} \approx 1 + \frac{h\nu}{k_B T} + \dots$$

$$\Rightarrow u(\nu, T) \approx k_B T \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad \text{Rayleigh - Jeans}$$

- Stefan - Boltzmann

$$\frac{c}{4\pi} \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \sigma T^4$$

Umrechnung  
in Intensität

$$\text{mit } \sigma \equiv \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = 5,7 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

$$= 460 \text{ W pro m}^2 \text{ bei } T = 300 \text{ K}$$

- Wien'sches Verschiebungsgesetz

$$\dots \Rightarrow \lambda_{\text{max}} T = 0,29 \text{ cm K}$$

$$\nu_{\text{max}} = 30 \text{ THz} \quad \text{bei } T = 300 \text{ K}$$

- Einstein'sche Herleitung der Planck Formel

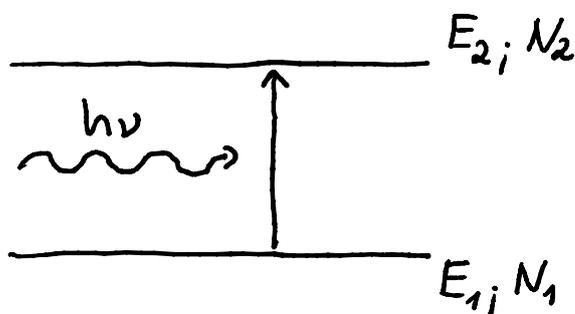
Energieniveaus der "Wandatome"  $E_1$  und  $E_2$

Anzahl der Atome in  $E_1$  ( $E_2$ ) ist  $N_1$  ( $N_2$ )

Annahme: 3 Prozesse des Energieaustauschs

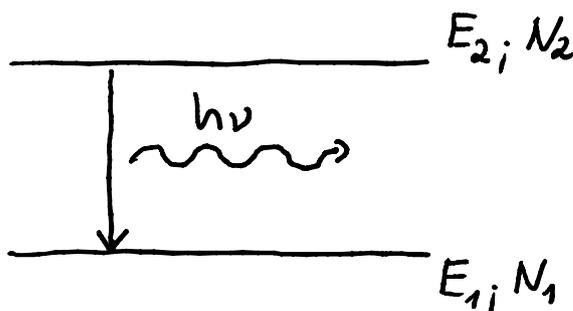
von  $h\nu$  zwischen Wand und Hohlraum

1.) Absorption aus dem Strahlungsfeld:



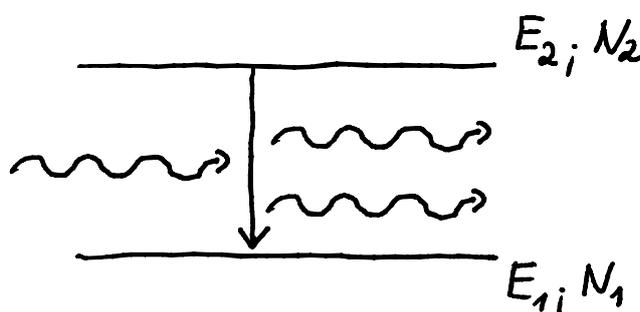
$$\left. \frac{dN_1}{dt} \right|_{ab} = -B_{12} u(\nu, T) N_1$$

2.) Spontane Emission ins Strahlungsfeld:



$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{sp} = -A_{21} N_2$$

3.) Stimulierte Emission ins Strahlungsfeld:



$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{st} = -B_{21} u(\nu, T) N_2$$

$$\text{mit } N = N_1 + N_2 = \text{const} \Rightarrow \frac{dN_1}{dt} = - \frac{dN_2}{dt}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dN_1}{dt} &= \left. \frac{dN_1}{dt} \right|_{ab} + \left. \frac{dN_1}{dt} \right|_{sp} + \left. \frac{dN_1}{dt} \right|_{st} \\ &= -B_{12} u(\nu, T) N_1 + A_{21} N_2 + B_{21} u(\nu, T) N_2 \end{aligned}$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht:

$$\frac{dN_1}{dt} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad \frac{N_2}{N_1} = e^{-h\nu/k_B T}$$

$$\Rightarrow A_{21} = (B_{12} e^{h\nu/k_B T} - B_{21}) u(\nu, T)$$

mit  $\lim_{T \rightarrow \infty} u(\nu, T) = \infty$  aber  $A_{21} = \text{const} \Rightarrow B_{12} = B_{21}$

$$\Rightarrow A_{21} = B_{12} (e^{h\nu/k_B T} - 1) u(\nu, T)$$

$$\Rightarrow u(\nu, T) = \frac{A_{21}}{B_{12}} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

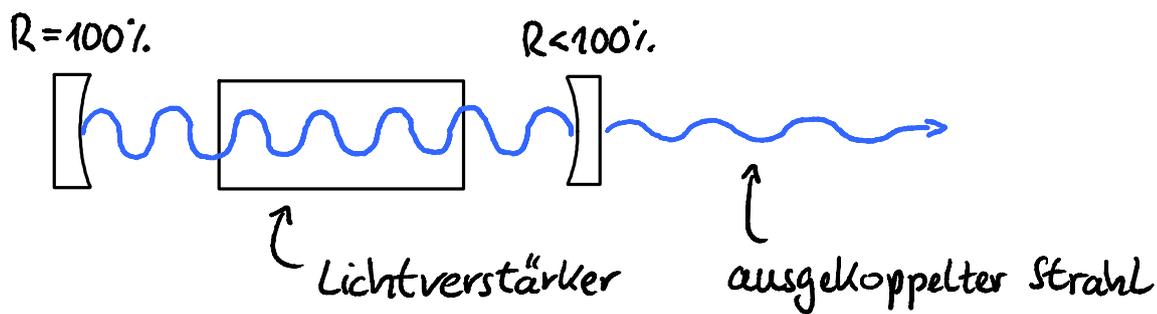
für  $h\nu \ll k_B T$ : Rayleigh-Jeans  $\Rightarrow \frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}$

$$\Rightarrow u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

Einstein Ableitung liefert das richtige Ergebnis unter der Annahme der stimulierten Emission.

$\Rightarrow$  Lichtverstärker!

## 23. Laser



- Dichte der Photonen im Resonator

$$n = \frac{u(\nu) \Delta\nu}{h\nu}$$

Strahlungsdichte  $u(\nu)$  [ $\frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{Hz}}$ ] ( $\neq$  Planck)

$\Delta\nu =$  Linienbreite des Resonators

- spontane Emission:  $\left. \frac{dn}{dt} \right|_{sp} \sim A_{21} N_2$

ist nicht gerichtet  $\Rightarrow$  die meisten spontanen

Photonen verlassen den Resonator  $\Rightarrow \left. \frac{dn}{dt} \right|_{sp} \approx 0$

- stimulierte Emission ist in Phase mit dem stimulierenden Feld und daher gerichtet:

$$\left. \frac{dn}{dt} \right|_{st} = - \left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{st} = B_{12} u(\nu) N_2 = B_{12} \frac{h\nu}{\Delta\nu} n N_2$$

- Absorption:

$$\left. \frac{dn}{dt} \right|_{ab} = \left. \frac{dN_1}{dt} \right|_{ab} = -B_{12} u(\nu) N_1 = -B_{12} \frac{h\nu}{\Delta\nu} n N_1$$

- Verluste + Auskopplung:

$$\Rightarrow \text{"Photonen Lebensdauer"} \ t_0 \Rightarrow \left. \frac{dn}{dt} \right|_{ver} = -\frac{n}{t_0}$$

$$\Rightarrow \frac{dn}{dt} = \frac{h\nu}{\Delta\nu} B_{12} N_2 n - \frac{h\nu}{\Delta\nu} B_{12} N_1 n - \frac{n}{t_0}$$

$$\Rightarrow n(t) = n(t=0) \exp\left(\underbrace{\left[\frac{h\nu}{\Delta\nu} B_{12} (N_2 - N_1) - \frac{1}{t_0}\right]}_{\equiv \gamma} t\right)$$

$\gamma > 0$ :  $n(t)$  steigt exponentiell an (Verstärkung)

$\gamma < 0$ :  $n(t)$  klingt exponentiell ab (Dämpfung)

- Bedingung für Laseroszillation:

$$N_2 - N_1 > \frac{\Delta\nu}{t_0 B_{12} h\nu} = \frac{8\pi\nu^2 \Delta\nu}{c^3 t_0 A_{12}} = \frac{8\pi\nu^2 \Delta\nu \gamma}{c^3 t_0}$$

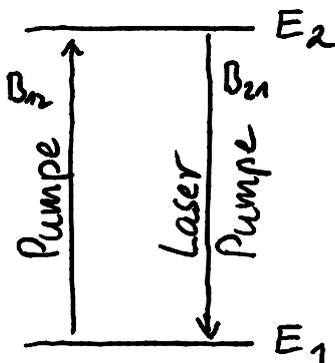
mit  $\gamma = \frac{1}{A_{21}}$  = Lebensdauer des angeregten Zustands

$N_2 - N_1 > 0$  : Inversion

- thermisch  $N_2 = N_1 e^{-h\nu/k_B T} \Rightarrow N_2 - N_1 < 0$
- Inversion durch "pumpen"

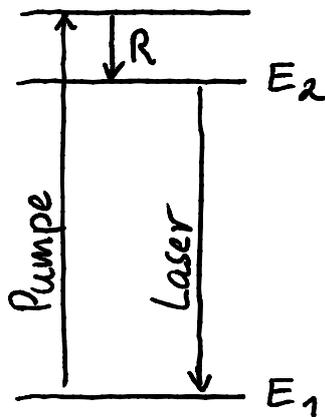
- Pumpen:

2 Niveaus



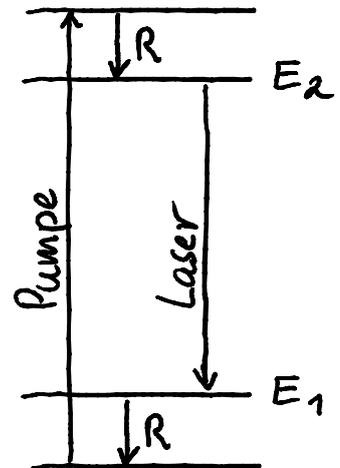
geht nicht!

3 Niveaus



geht

4 Niveaus

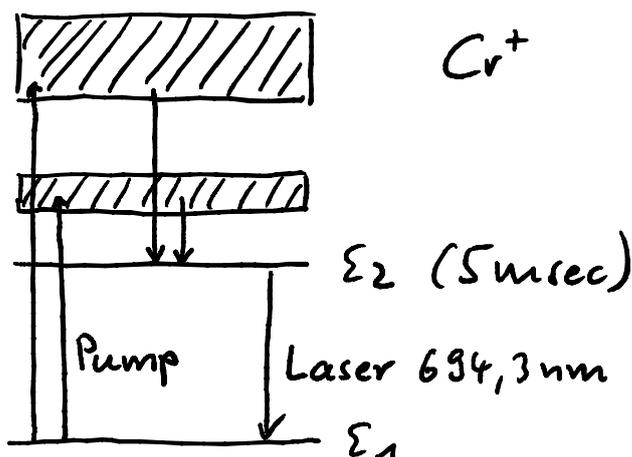


geht besser

- Lasertypen

• Festkörper Laser

z.B. Rubin (Maiman 1960)



Mit Blitzlampe oder  
anderem Laser  
gepumpt.

Gepulster Betrieb

- Gaslaser

  - z.B. HeNe (Ali Javan 1961)

    - erster kontinuierlicher Laser

    - CO<sub>2</sub> Laser 10,6 μm, sehr hohe Leistung

- Halbleiter Laser

  - p-n Übergang, elektrisch gepumpt

  - klein (Laserpointer), effizient, billig

- Farbstoff Laser

  - mit Laser gepumpt

  - einmodig möglich, durchstimmbar

  - für Wissenschaft

- Glasfaser Laser

  - mit Halbleiterlaser gepumpt

- Excimer Laser, Farbzentren Laser, freier

  - Elektronenlaser, Ionen Laser .....