25.10.2021

LMU – Fakultät für Physik

2. Übung zur Quantenmechanik (T2p) im WS 21/22

Prof. G. Buchalla

Aufgabe 1: (Summenkonvention)

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist in kartesischen Koordinaten durch $\vec{a}\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$ gegeben. In der Einsteinschen Summenkonvention, gemäß der über doppelt auftretende Indizes über ihren jeweiligen Laufbereich zu summieren ist, schreibt man einfach $\vec{a}\vec{b} = a_i b_i$. Unter Verwendung des total antisymmetrischen Tensors $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}$ (wir verwenden die Konvention $\varepsilon_{123} = +1$) können die Komponenten des Vektorprodukts in dieser Notation durch $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ dargestellt werden.

Beweisen Sie die nützliche Relation $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ (hier steht δ_{ij} für das Kronecker-Symbol, welches durch $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ definiert ist) und beweisen Sie in der kompakten Notation die folgenden Vektoridentitäten:

a) $\vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a})$,

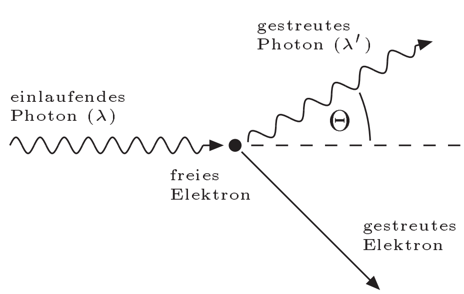
b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$,

c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$ (*Jacobi-Identität*),

d) $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{b}\vec{c})(\vec{a}\vec{d})$.

Aufgabe 2: (Compton-Effekt)

Im Jahre 1922 fand Arthur Compton bei der Streuung von Röntgenstrahlen an Kohlenstoff neben der ursprünglich eingestrahlten Wellenlänge λ stets auch Licht mit größeren Wellenlängen λ'.
In dieser Aufgabe analysieren wir die Kinematik des Compton-Effekts, um die Wellenlängenänderung $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ zu berechnen. Betrachten Sie dazu die elastische Streuung von Photonen an freien Elektronen im Ruhesystem des Elektrons (siehe Skizze).



Verwenden Sie die Impuls- und Energiebilanz der Reaktion, um die Wellenlängenänderung $\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\Theta)$ herzuleiten. Wie groß ist die Compton-Wellenlänge λ_c des Elektrons ($m_e \simeq 9.1 \times 10^{-31}$kg)?