24.1.2022

LMU – Fakultät für Physik

13. Übung zur Quantenmechanik (T2p) im WS 21/22

Prof. G. Buchalla

Aufgabe 1: (Zwei-Zustandssystem)

Seien $|a\rangle$ und $|b\rangle$ die einzigen Eigenzustände zu einem Hamilton-Operator H_0 mit den Energien E_a und E_b. Diese Eigenzustände seien orthonormiert und nicht entartet. Nehmen Sie im Folgenden an, dass $E_a < E_b$. Dieses Zwei-Zustandssystem unterliege einer Störung V, die durch die Matrixelemente

$$\langle a|V|a\rangle = \langle b|V|b\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle a|V|b\rangle = \langle b|V|a\rangle = h > 0$$

gegeben ist.

a) Berechnen Sie die Energieeigenwerte des gestörten Systems $H = H_0 + V$ exakt.

b) Berechnen Sie die Energieeigenwerte in der zweiten Ordnung der Störungstheorie.

c) Verwenden Sie das Ritz'sche Variationsprinzip zur Abschätzung der Grundzustandsenergie des gestörten Systems. Verwenden Sie dazu einen Ansatz der Form

$$|\psi(\varphi)\rangle = \cos\varphi|a\rangle + \sin\varphi|b\rangle$$

und fassen Sie φ als freien Parameter auf.

d) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus (a), (b) und (c) miteinander. Entwickeln Sie dazu auch das exakte Resultat aus (a) bis zur zweiten Ordnung in $\frac{2h}{E_a - E_b}$. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2: (Anharmonischer Oszillator)

Ein ein-dimensionaler, harmonischer Oszillator der Masse m unterliege einer Störung $\tilde{V}(x)$:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \tilde{V}(x).$$

a) Sei $\tilde{V}(x) = dx^4$. Berechnen Sie die Energieeigenwerte des gestörten Systems in der ersten Ordnung der Störungstheorie. (Hinweis: Verwenden Sie die Leiteroperatoren a und $a^\dagger$).

b) Sei $\tilde{V}(x) = cx^3$. Berechnen Sie die Energieeigenwerte in der zweiten Ordnung der Störungstheorie.