20.12.2021

LMU – Fakultät für Physik

10. Übung zur Quantenmechanik (T2p) im WS 21/22

Prof. G. Buchalla

Aufgabe 1: (Drehimpuls)

a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[L_z, \vec{r}^2]$ und $[L_z, \vec{p}^2]$.

b) Zeigen Sie, dass der Hamilton-Operator $H = \vec{p}^2/(2m) + V(\vec{r})$ mit allen drei Komponenten des Drehimpulses $\vec{L}$ kommutiert, wenn das Potential $V(\vec{r})$ nur von $|\vec{r}|$ abhängt. Was können Sie in diesem Fall über die Eigenfunktionen von H, $\vec{L}^2$ und L_z aussagen?

c) In der Vorlesung wurden die Leiteroperatoren $L_\pm \equiv L_x \pm iL_y$ eingeführt. Die Wirkung der Leiteroperatoren auf die gemeinsamen Eigenzustände $|l, m\rangle$ von $\vec{L}^2$ und L_z ist gegeben durch:

$$L_\pm |\, l, m\rangle = A_\pm^{l,m} |\, l, m \pm 1\rangle.$$

Berechnen Sie die Koeffizienten $A_\pm^{l,m}$ unter der Voraussetzung, dass die Eigenfunktion $|\, l, m\rangle$ normiert sind. Was passiert im Fall $m = \pm l$?

Aufgabe 2: (Drehimpulsalgebra)

In dieser Aufgabe konstruieren wir die fundamentale Matrixdarstellung der Drehimpulsalgebra zum Drehimpuls $l = 1$. Dazu gehen wir von der folgenden dreidimensionalen Darstellung der gemeinsamen Eigenzustände $|l, m\rangle$ von $\vec{L}^2$ und L_z aus:

$$|1,1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1,0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1,-1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Verwenden Sie die Eigenwertgleichungen von $\vec{L}^2$ und L_z, um die zugehörige Matrixdarstellung der Operatoren $\vec{L}^2$ und L_z zu bestimmen.

b) Berücksichtigen Sie die Wirkung der Leiteroperatoren $L_\pm$ auf die Zustände $|l, m\rangle$, um die Matrixdarstellung der Leiteroperatoren $L_\pm$ zu konstruieren. Bestimmen Sie darüber die Matrixdarstellung von L_x und L_y und überprüfen Sie Ihr Ergebnis indem Sie $\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ explizit berechnen und mit dem Ergebnis aus (a) vergleichen.

c) Zeigen Sie, dass die auf diese Weise gewonnenen Matrizen L_x, L_y und L_z die Drehimpulsalgebra erfüllen, d.h. $[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} L_k$.