Zusammenfassung: L1

ZL1

Gruppe: $\mathcal{G} = (A, \bullet)$ Verknüpfung: $\bullet : A \times A \longrightarrow A, \quad (a, b) \mapsto a \bullet b$

(i) Abgeschlossenheit, (ii) Assoziativität, (iii) neutrales Element, (iv) inverses Element

Körper: $F = (A, +, \bullet)$ (zwei Verknüpfungsregeln: Addition & Multiplikation, beide liefern jeweils eine kommutative Gruppe)

Algebraische Struktur, die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division erlaubt.

Beispiele: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

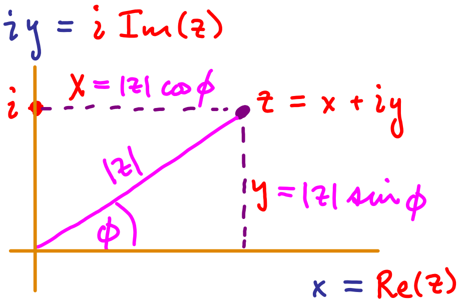
Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{ z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \} \longrightarrow \mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$i^2 = -1, \quad i = \sqrt{-1}$

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$z \cdot z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

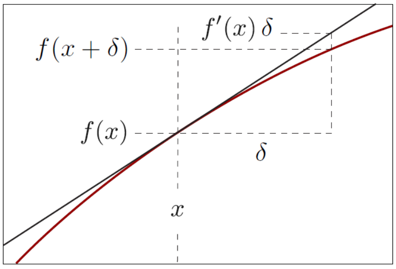
$$z^* \equiv \bar{z} \equiv x - iy, \quad z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$



Zusammenfassung: C1-C2

ZC1

C1: Ableitung 1-dimensionaler Funktionen



Definition d. Ableitung:

$$\frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x) \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \tag{1}$$

Jede Ableitung stellt eine <u>lokale</u> Näherungen einer Funktion durch eine <u>lineare</u> Funktion dar!

$$f(x+\delta) \simeq f(x) + \delta \frac{df(x)}{dx} \tag{2}$$

Produktregel:

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} g(x) + f(x) \frac{d(g(x))}{dx} \tag{3}$$

Kettenregel:

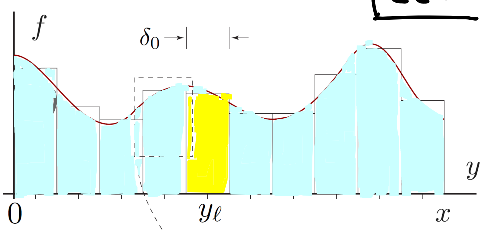
$$\frac{d(f(g(x)))}{dx} = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y = g(x)} \frac{dg(x)}{dx} \tag{4}$$

Ableitung d. Umkehrfunktion:

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y = f^{-1}(x)}} \tag{5}$$

C2 Integrale

ZC2



'Riemann-Summe' $= \lim\limits_{\delta\to 0} \delta \sum\limits_{\ell=1}^{N(\delta} X_\ell$ (1)

Fläche unter Kurve: $F(x) = \lim\limits_{\delta\to 0} \sum\limits_{\ell} f_\ell \equiv \int_0^x dy\, f(y)$ (2)

'Hauptsatz': $F(x) = \int_0^x dy\, f(y) \Longrightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ (3)

Bestimmtes Integral: $\int_a^b dy\, f(y) = F(b) - F(a) \equiv F(y)\Big|_a^b$ (4)

'Partielle Integration' $\int_a^b dx\, u(x)\, v'(x) = u(x)\, v(x)\Big|_a^b - \int_a^b dx\, u'(x)\, v(x)$ (5)

'Variablen-Substitution': $\int_a^b dx\, \frac{dy(x)}{dx}\, f(y(x)) = \int_{y(a)}^{y(b)} dy\, f(y)\,, \quad dy = dx\, y'(x)\,, \quad \begin{array}{l} x \mapsto y(x) \\ a \mapsto y(a) \\ b \mapsto y(b) \end{array}$ (6)

Zusammenfassung: L2 Vektorräume

Vorlesung 3 ZL2a

$\mathbb{F}$-Vektorraum: $(V, +, \cdot)$

Vektoraddition: $+ : (V, V) \longrightarrow V$
$(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto \vec{a} + \vec{b}$

Axiome:
(i)-(v): kommutative Gruppe

Skalare Multiplikation: $\cdot : (\mathbb{F}, V) \longrightarrow V$
$(\lambda, \vec{a}) \longmapsto \lambda \cdot \vec{a} \equiv (\lambda \vec{a})$

(vi,vii) distributiv
(viii) assoziativ
(ix) Identitätselement 1

Wichtigstes Beispiel: $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{\vec{a} = (a^1, \ldots, a^n)^T \mid a^1, \ldots, a^n \in \mathbb{R}\}$$

Vektoraddition: $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n\,, \quad (\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto (\vec{a} + \vec{b}) \equiv \begin{pmatrix} a^1 + b^1 \\ \vdots \\ a^n + b^n \end{pmatrix}$

Skalare Multiplikation: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (\lambda, \vec{b}) \longmapsto (\lambda \vec{b}) \equiv \begin{pmatrix} \lambda b^1 \\ \vdots \\ \lambda b^n \end{pmatrix}$

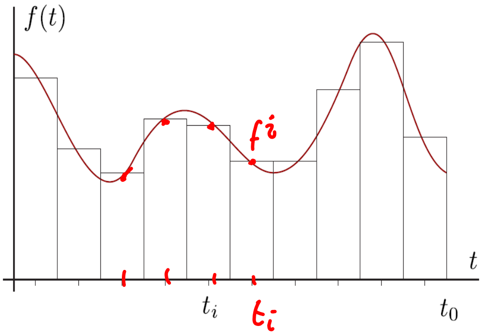
Vorlesung 3 ZL2b

Weiteres Beispiel: Diskretisierte Funktionen:

Diskretisierte Funktion: $\vec{f} = (f^1, \dots, f^N)^T$

Vektoraddition: $(\vec{f}+\vec{g})^i = (\vec{f})^i + (\vec{g})^i$

Skalarmultiplikation: $(a\cdot\vec{f})^i = a(\vec{f})^i$



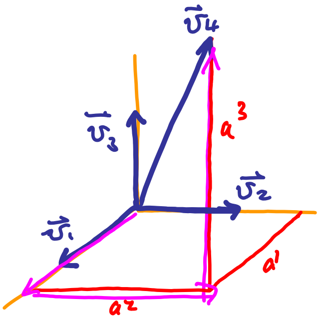
Vektorraum: $(\{\vec{f} \mid (\vec{f})^i \in \mathbb{R}, i=1,\dots,N\}, +, \cdot)$

ZL2c

Basis und Dimension

$$S \equiv \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\} \overset{?}{=} V \qquad (1)$$

Span(S) $\equiv$ alle möglichen Linearkombination der Vektoren $\{\vec{v}_j\}$ (2)



'Linear unabhängig', falls $\vec{v}_j a^j = \vec{0} \Longrightarrow a^j = 0 \;\forall j$ (3)

S ist 'vollständig', falls $\mathrm{span}(S) = V$ (4)

S bildet 'Basis', falls S vollständig und linear unabhängig ist. (5)

Standardbasis in $\mathbb{R}^n$: $\vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, j-Position — i-Komponente v. j-tem Basisvektor: $(\vec{e}_j)^i = \delta^i_j$ (6)

'Kronecker-delta' Symbol: $\delta^i_j \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j \end{cases}$ $\qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}$ (7)

Zusammenfassung L3

ZL3a

Euklidische Vektorräume (V: reeller Vektorraum)

Inneres Produkt: $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (\vec u, \vec v) \mapsto \langle \vec u, \vec v \rangle$ Zahl

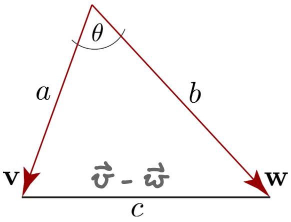
(i) Symmetrie, (ii-iii) Linearität bzgl. + und • (iv) Positiv definit

Wichtigstes Beispiel: Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

$$\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \vec u \cdot \vec v \equiv u^1 v^1 + \dots + u^n v^n = u^i v^i$$

Norm: $\| \ \| : V \to \mathbb{R}, \quad \vec v \mapsto \|\vec v\| \equiv \sqrt{\langle \vec v, \vec v \rangle}$

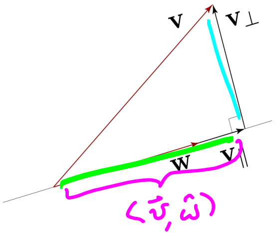
Cauchy-Schwarz Ungleichung (CSU): $|\langle \vec v, \vec w \rangle| \le \|\vec v\| \, \|\vec w\|$



Winkel: $\langle \vec v, \vec w \rangle \equiv \cos(\measuredangle(\vec v, \vec w)) \, \|\vec v\| \, \|\vec w\|$

ZL3b

Einheitsvektor: $\hat w \equiv \frac{\vec w}{\|\vec w\|}$



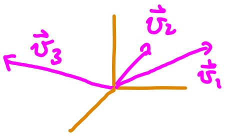
'Projektion' v. $\vec v$ auf $\vec w$: $\underline{\vec v_\parallel} \equiv \hat w \langle \hat w, \vec v \rangle \qquad (\parallel \vec w)$

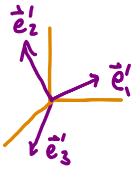
'Orthogonales Komplement' zu $\vec w$: $\underline{\vec v_\perp} \equiv \vec v - \underline{\hat w \langle \hat w, \hat v \rangle} \qquad (\perp \vec w)$

Orthonormalbasis: vollständig, normiert, orthogonal: $\{\vec e'_1, \dots, \vec e'_n\}, \quad \langle \vec e'_i, \vec e'_j \rangle = \delta_{ij}$

Zerlegung nach Komponenten in Orthonormalbasis: $\vec x = \vec e_i x^i, \quad x^i = \langle \vec e_i, \vec x \rangle$

Gram-Schmidt-Verfahren:





liefert orthonormale Vektoren mit demselben Span:

$\mathrm{span}\{\vec e'_j\} \equiv \mathrm{span}\{\vec v_j\}$

$$\vec v_{1,\perp} \equiv \vec v_1 , \qquad \vec e'_1 \equiv \frac{\vec v_{1,\perp}}{\|\vec v_{1,\perp}\|}$$

$$\underline{\vec v_{j,\perp}} \equiv \vec v_j - \underline{\sum_{i=1}^{j-1} \vec e'_i \langle \vec e'_i, \vec v_j \rangle_V} , \qquad \vec e'_j \equiv \frac{\vec v_{j\perp}}{\|\vec v_{j\perp}\|}$$

Kovariante Notation für nicht-orthonormale Basis

Index oben: kontravariant
Index unten: kovariant

ZL3c

Metrik einer Basis $\{\hat{v}_j\}$ von V: $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = g_{ij}$. Inverse Metrik erfüllt $g^{ik} g_{kj} \equiv \delta^i{}_j$

Kontravar. Basis: $\hat{v}^i \equiv g^{ij} \hat{v}_j$ ist orthonormal zur kovar. Basis: $\langle \hat{v}^i, \hat{v}_j \rangle = \delta^i{}_j$

Zerlegung nach Komponenten: $\hat{x} = \hat{v}_i \, x^i = \hat{v}_i \langle \hat{v}^i, \hat{x} \rangle_V$ kovariante Basis kontravariante Komponenten

$= x_j \, \hat{v}^j = \langle \hat{x}, \hat{v}_j \rangle_V \hat{v}^j$ kontravariante Basis kovariante Komponenten

$\hat{v}_j = g_{ji} \hat{v}^i = \hat{v}^i g_{ij}$, $x_i = g_{ij} x^j = x^j g_{ji}$, g_{ij} zieht Index runter

$\hat{v}^i = g^{ij} \hat{v}_j = \hat{v}_j g^{ji}$, $x^j = g^{ji} x_i = x_i g^{ij}$, g^{ij} zieht Index hoch

Inneres Produkt in V: $\Longleftrightarrow$ Verallgemeinertes Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_V = x^i g_{ij} \, y^j = x^i y_i = x_j y^j \equiv \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Für Orthonormalbasis, mit $g_{ij} = \delta_{ij}$, ist Unterscheidung zwischen Index oben/unten nicht nötig:

$x_i = \delta_{ij} x^j = x^i$, $g^{ij} = \delta^{ij}$, $\hat{v}^i = \delta^{ij} \hat{v}_j = \hat{v}_i$.

Deswegen: wenn möglich eine Orthonormalbasis wählen!

Zusammenfassung: L4 Vektorprodukt

ZL4

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longmapsto \mathbb{R}^3 \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\longmapsto \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} \equiv \begin{pmatrix} v^2 w^3 & - v^3 w^2 \\ v^3 w^1 & - v^1 w^3 \\ v^1 w^2 & - v^2 w^1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Geometrische Def: $\vec{v} \perp \vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$

$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin\Theta$

Daumen: $\vec{v} \times \vec{w}$

Mittelfinger: $\vec{w}$

Zeigefinger: $\vec{v}$

$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$ Levi-Civita: ε_{ijk} komplett antisymmetrisch

$(\vec{v} \times \vec{w})^k = v^i w^j \varepsilon_{ijk}$ $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$

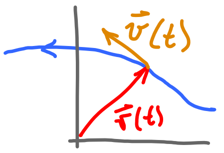
Eigenschaften: antisymmetrisch, distributiv, nicht assoziativ, Identitäten...

Spatprodukt: $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| =$ Volumen v. Parallelepiped

Zusammenfassung V1: Kurven

ZV1

'Kurve': $\gamma = \{ \vec{r}(t) \mid t \in I \}$ wobei $\vec{r} : I = (0,\tau) \to \mathbb{R}^d$, $t \mapsto \vec{r}(t)$

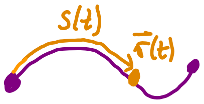


Ort entlang Kurve: $\vec{r}(t) = \vec{e}_j \, x^j(t)$

Kurvengeschwindigkeit: $\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{e}_j \, \dot{x}^j(t) = \vec{v}(t)$ liegt 'tangential' zur Kurve

Kurvenlänge: $L[\gamma] = \int_0^\tau dt \, \| \dot{\vec{r}}(t) \|$ unabhängig von Parametrisierung des Weges

Bogenlänge nach Zeit t: $s(t) \equiv \int_0^t du \, \| d_u \vec{r}(u) \|$



$\gamma = \vec{r}\,(0,\tau)$

Natürliche Parametrisierung durch Bogenlänge: $\vec{r}_L : (0, L(\gamma)) \to \mathbb{R}^d$, $s \mapsto \vec{r}_L(s) \equiv \vec{r}(t(s))$, $\| d_s \vec{r}_L(s) \| = 1$

Für Vektorfeld:
(vektorwertige Funktion von $\vec{r}$) $\vec{f} : \gamma \to \mathbb{R}^d$, $\vec{r} \mapsto \vec{f}(\vec{r})$

Linienintegral: $\int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{f} \equiv \int_0^\tau dt \, \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}$ unabhängig von Parametrisierung des Weges

---

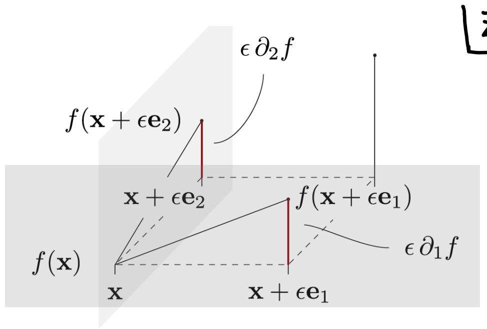
Zusammenfassung C3: Partielle Ableitungen

ZC3

Partielle Ableitung: $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left[f(\vec{x} + \delta \vec{e}_i) - f(\vec{x}) \right] \quad (1)$$

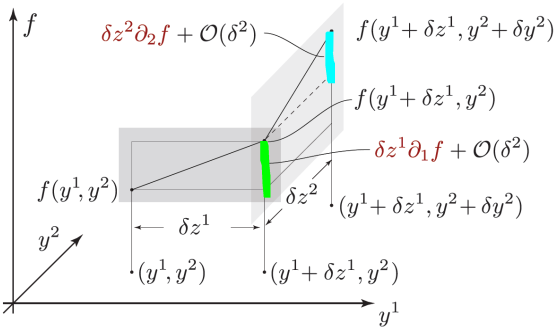
$$\equiv \partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i f(\vec{x}) \quad (2)$$



Satz v. Schwarz: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f \quad (3)$

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\vec{y} \mapsto f(\vec{y})$

$$\lim \frac{1}{\delta} \left[f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y}) \right] = \partial_j f(\vec{y}) \, z^j \quad (4)$$



$\vec{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, $\vec{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, $\vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Allgemeine Kettenregel:

$$\frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial g^j} \frac{\partial g^j(\vec{x})}{\partial x^k} \quad (5)$$

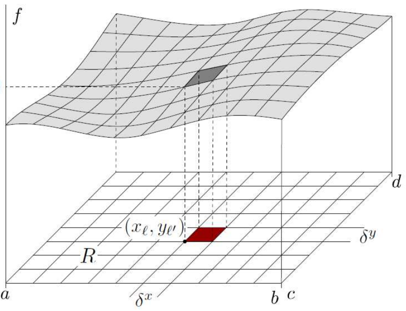
$i = 1, \dots, m$
$k = 1, \dots, n$

Zusammenfassung: C4 Mehrdimensionale Integration (Kartesisch)

ZC4a

Integration in $\mathbb{R}^2$

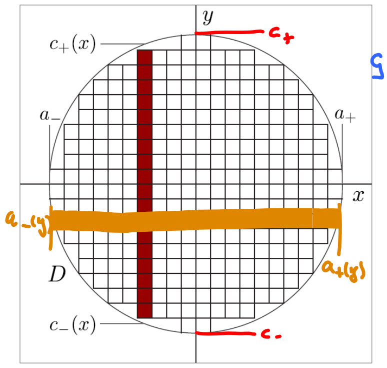
$$\int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) \equiv \lim_{\delta^x, \delta^y \to 0} \delta^x \delta^y \sum_{\ell} \sum_{\ell'} f(x_\ell, y_{\ell'})$$



Fubini: Integrationsreihenfolge ist egal:

$$\int_a^b dx \int_{y_-(x)}^{y_+(x)} dy\, f(x,y) = \int_{y_a}^{y_b} dy \int_{x_-(y)}^{x_+(y)} dx\, f(x,y)$$

Für das "innere" (zweite) Integral sind
die Grenzen abhängig von der "äußeren"



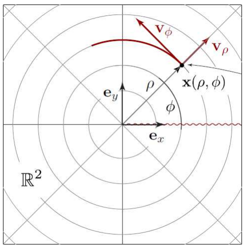
Analog in 3D:

$$\int_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} dx\, dy\, dz\, f(x,y,z) = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\, f(x,y,z)$$

Reihenfolge dieser Integrale ist beliebig

Zusammenfassung: V5 Krummlinige Koordinaten

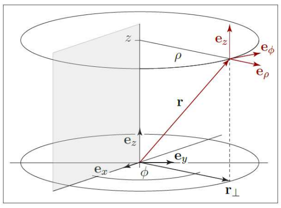
ZV2a



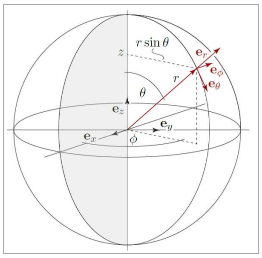
Kartesisch: $\vec{r} = \sum_{i=1}^{d} \vec{e}_i x^i$

Polar (2D): $\vec{r} = \vec{e}_x \underbrace{\rho\cos\phi}_{x^1} + \vec{e}_y \underbrace{\rho\sin\phi}_{x^2}$

$y^1 = \rho,\ y^2 = \phi$



Zylinder (3D): $\vec{r} = \vec{e}_x \rho\cos\phi + \vec{e}_y \rho\sin\phi + e_z z$



Kugel (3D): $\vec{r} = \vec{e}_x r\sin\theta\cos\phi + \vec{e}_y r\sin\theta\sin\phi + \vec{e}_z r\cos\theta$

Koordinatenlinie: $\vec{r}_{y^j}(y^j) \equiv \vec{r}(y^1, \dots, \overset{\text{wird variert}}{y^j}, \dots, y^d)$

$\vec{r}_{y^1}(y^1) = \vec{r}_\rho(\rho), \vec{r}_\phi(\phi)$

werden konstant gehalten

Koordinatenbasis: $\{\vec{v}_{j,\vec{r}}\}$ $\quad \vec{v}_{j,\vec{r}} \equiv \frac{d}{dy^j}\vec{r}_j(y^j) = \partial_j \vec{r}(\vec{y})$

erinnert an Ortsabhängigkeit,
wird meist nicht explizit angezeigt

Metrik: $g_{ij,\vec{r}} \equiv \langle \vec{v}_{i,\vec{r}}, \vec{v}_{j,\vec{r}} \rangle$

Lokale Basis: $\{\vec{e}_{j,\vec{r}}\}$ $\quad \vec{e}_{j,\vec{r}} \equiv \frac{\vec{v}_{j,\vec{r}}}{\|v_{j,\vec{r}}\|} = \frac{\vec{v}_{j,\vec{r}}}{\sqrt{g_{jj,\vec{r}}}}$

ZV2b

Kartesisch: $\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3 \qquad \vec{r} = \sum_i \vec{e}_i x^i$

Polar (2D):

$\vec{v}_\rho = \vec{e}_\rho , \qquad \vec{e}_\rho = \vec{e}_x \cos\phi + \vec{e}_y \sin\phi , \qquad g_{\rho\rho} = 1 , \qquad \vec{r} = \vec{e}_\rho \rho$

$\vec{v}_\phi = \rho \vec{e}_\phi , \qquad \vec{e}_\phi = - \vec{e}_x \sin\phi + \vec{e}_y \cos\phi , \qquad g_{\phi\phi} = \rho^2 , \qquad \dot{\vec{r}} = \vec{e}_\rho \dot{\rho} + \vec{e}_\phi \rho \dot{\phi}$

Zylinder (3D):

$\vec{v}_\rho = \vec{e}_\rho , \qquad \vec{e}_\rho = \vec{e}_x \cos\phi + \vec{e}_y \sin\phi , \qquad g_{\rho\rho} = 1 , \qquad \vec{r} = \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z$

$\vec{v}_\phi = \rho \vec{e}_\phi , \qquad \vec{e}_\phi = - \vec{e}_x \sin\phi + \vec{e}_y \cos\phi , \qquad g_{\phi\phi} = \rho^2 , \qquad \dot{\vec{r}} = \vec{e}_\rho \dot{\rho} + \vec{e}_\phi \rho \dot{\phi} + \vec{e}_z \dot{z}$

$v_z = e_z , \qquad e_z = \vec{e}_z , \qquad g_{zz} = 1 ,$

Kugel (3D):

$\vec{v}_r = \vec{e}_r , \qquad \vec{e}_r = \vec{e}_x \sin\theta \cos\phi + \vec{e}_y \sin\theta \sin\phi + \vec{e}_z \cos\theta , \qquad g_{rr} = 1 , \qquad \vec{r} = \vec{e}_r r$

$\vec{v}_\theta = r \vec{e}_\theta , \qquad \vec{e}_\theta = \vec{e}_x \cos\theta \cos\phi + \vec{e}_y \cos\theta \sin\phi - \vec{e}_z \sin\theta , \qquad g_{\theta\theta} = r^2 , \qquad \dot{\vec{r}} = \vec{e}_r \dot{r} + \vec{e}_\theta r \dot{\theta}$

$\vec{v}_\phi = r \cos\theta \vec{e}_\phi , \qquad \vec{e}_\phi = - \vec{e}_x \sin\phi + \vec{e}_y \cos\phi , \qquad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta , \qquad + \vec{e}_\phi r \dot{\phi} \sin\theta$

Alle diese lokalen Basen sind orthonormal: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

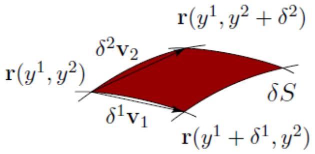
Für Zylinder & Kugelkoordinaten: $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$

zyklische Reihenfolge: $\rho \to \phi \to z \to \rho$, $r \to \theta \to \phi \to r$

Zusammenfassung: 2D-Flächenintegrale für Fläche in d = 2,3 Dimensionen

ZC4b

$$\vec{r} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^n , \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \mapsto \vec{r}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x^1(\vec{y}) \\ \vdots \\ x^n(\vec{y}) \end{pmatrix} \qquad (1)$$



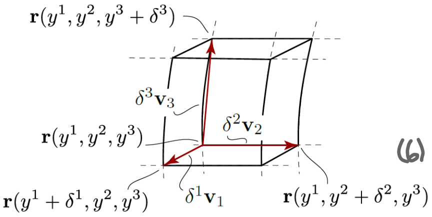
$$\int_S dS \, f(\vec{r}) = \int_{\mathcal{U}} dy^1 \int dy^2 \, \| \partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r} \| \; f(\vec{r}(y^1, y^2)) \qquad (2)$$

für krummlinig-orthogonale Koord.: $\| \partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r} \| = v_{y^1} v_{y^2} = \sqrt{g_{11} \, g_{22}}$ (3)

Integrationsmaß: Polar: $dS = \rho \, d\rho \, d\phi$ (4) Kugel: $dS = d\theta \, d\phi \, r^2 \cdot \sin\theta$ (5)

Zusammenfassung: 3D Volumenintegrale

$$\vec{r} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3 \to V \subset \mathbb{R}^3 , \qquad \vec{y} \mapsto \vec{r}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} x^1(\vec{y}) \\ x^2(\vec{y}) \\ x^3(\vec{y}) \end{pmatrix}$$



(6)

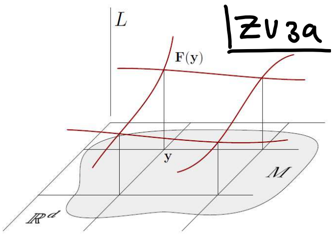
$$\iiint_V dr^1 \, dr^2 \, dr^3 \, f(\vec{r}) = \iiint_{\mathcal{U}} dy^1 \, dy^2 \, dy^3 \; \| (\partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r}) \cdot \partial_{y^3} \vec{r} \| \; f(\vec{r}(y^1, y^2, y^3)) \qquad (7)$$

für krummlinig-orthogonale Koord.: $\| (\partial_{y^1} \vec{r} \times \partial_{y^2} \vec{r}) \cdot \partial_{y^3} \vec{r} \| = v_{y^1} \, v_{y^2} \, v_{y^3} = \sqrt{g_{11} \, g_{22} \, g_{33}}$ (8)

Integrationsmaß: Zylinder: $dV = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$ (9) Kugel: $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$ (10)

ZV3a

Zusammenfassung V3.1 Felder



$$\vec{F}: M \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow L \subset \mathbb{R}^n$$

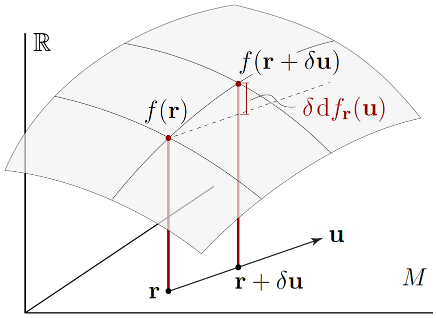
$$\vec{y} = (y^1, \dots, y^d)^T \longmapsto \vec{F}(\vec{y}) = (F^1(\vec{y}), \dots, F^n(\vec{y}))^T$$

V3.2 Skalarfelder, Gradient

Totales Differential: differentielle Änderung von f bei $\vec{r}$ durch einen $\vec{u}$ -Schritt:

$$df_{\vec{r}}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad \vec{u} \mapsto df_{\vec{r}}(\vec{u}) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\left[f(\vec{r} + \delta\vec{u}) - f(\vec{r})\right]$$

$$df_{\vec{y}}(\vec{u}) = \partial_{y^k} f(\vec{y})\, u^k = \partial_k f\, u^k \equiv \vec{\nabla} f_{\vec{y}} \cdot \vec{u}$$



Gradient in kartesischen Koordinaten: $\partial^i = \partial_i$

$$\underbrace{\vec{\nabla} f}_{\text{'grad f'}} : M \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d,$$

$$\vec{x} \longmapsto \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \equiv \begin{pmatrix} \partial^1 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial^d f(\vec{x}) \end{pmatrix} \equiv \vec{e}_i \, (\vec{\nabla} f)^i(\vec{x})$$

$\vec{\nabla} f_{\vec{y}}$ zeigt in Richtung maximaler Steigung v. f, steht $\perp$ auf den 'Höhenflächen' v. f

In krummlinigen Koordinaten: $\vec{\nabla}_r f = \vec{v}_i (\vec{\nabla} f)^i = \vec{v}_i\, g^{ij}\, \partial_j f$ (in Koordinatenbasis)

In krummlinig-orthogonalen Koordinaten: $= \vec{e}_i \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \partial_i f$ (in lokaler Basis)

$g_{i \neq j} = 0, \quad g^{ii} = 1/g_{ii}$

ZV3b

Zusammenfassung V3.3: Gradientenfeld

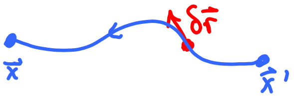
Gradientenfeld: $\vec{\nabla}\varphi : M \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \longmapsto \vec{\nabla}\varphi_{\vec{x}}$ (1)

$\left(\int_{\gamma_{\vec{x}' \to \vec{x}}} d\vec{r} \cdot \vec{u} \right.$ ist wegunabhängig $\left. \forall\, \vec{x}', \vec{x} \in M \right) \Longleftrightarrow \oint d\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$ für geschlossenen Weg

$\Updownarrow \qquad \nearrow\!\!\!\!\swarrow\;\nwarrow\!\!\!\!\searrow \qquad \Updownarrow$ (1)

$\left(\vec{u} \right.$ ist ein Gradientenfeld $\left. \right) \Longleftrightarrow \left(\partial_j u^i - \partial_i u^j = 0 \right.$, und M ist einfach zusammenhängend $\left. \right)$

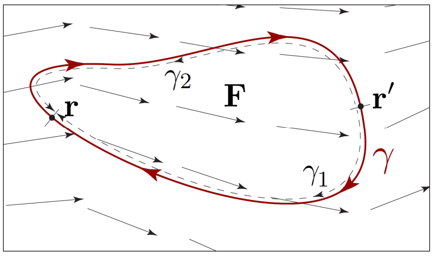
Konkret: $\int_{\gamma_{\vec{x}' \to \vec{x}}} d\vec{r} \cdot \vec{u} = \int_{\gamma_{\vec{x}' \to \vec{x}}} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\varphi = \varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}')$ (2)



Konservatives Kraftfeld ist ein Gradientenfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi_{\vec{r}}$ (5)

$W[\gamma] = \oint d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0$ (6)

$\Longleftrightarrow W[\gamma_1] = W[\gamma_2]$ (7)



Arbeit von x' nach x ist unabhängig vom Weg!

geschlossener Weg: $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$

Zusammenfassung V3.2,4-6: Nabla, Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace

ZV3c

Skalarfeld: $\varphi(\vec{r})$; Vektorfeld: $\vec{u}(\vec{r})$ (1)

Partielle Ableitung: $\partial_1\varphi = \frac{\partial\varphi(x^1, x^2 x^3)}{\partial x^1} \equiv \lim_{\delta\to 0} \frac{\varphi(x^1+\delta, x^2, x^3) - \varphi(x^1, x^2, x^3)}{\Delta x^1}$ (2)

Totales Differential: $d_{\vec{x}} f(\vec{u}) = \sum_j \partial_j f(\vec{x})\, u^j = \vec{\nabla} f_{\vec{x}} \cdot \vec{u}$ (3)

Gradient: $\vec{\nabla}\varphi_{\vec{x}} = \vec{e}_i \partial^i \varphi(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \partial^1 \varphi(\vec{x}) \\ \partial^2 \varphi(\vec{x}) \\ \partial^3 \varphi(\vec{x}) \end{bmatrix}$ (4)

Nabla-Operator:
(Vektor-Diff.-Operator)
$\vec{\nabla} = e_i \partial^i = \vec{e}_1 \partial^1 + \vec{e}_2 \partial^2 + \vec{e}_3 \partial^3$ (5)

Laplace-Operator:
$\vec{\nabla}^2 = \Delta = \partial_i \partial^i$ (6)

Divergenz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial_i u^i = \partial_1 u^1 + \partial_2 u^2 + \partial_3 u^3$ (7)

Rotation:
(alle Indizes unten)
$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{e}_i\, \varepsilon_{ijk} \partial_j u^k = \begin{bmatrix} \partial_2 u^3 - \partial_3 u^2 \\ \partial_3 u^1 - \partial_1 u^3 \\ \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1 \end{bmatrix}$ (8)

Gradiententelder sind 'wirbelfrei': $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = 0$ (9)

Wirbelfelder sind 'quelfrei': $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$ (10)

Zusammenfassung: L5.1-5.3 Lineare Abbildungen und Matrizen

ZL5a

Die Abbildung $F: V \longrightarrow W$ ist 'linear', falls $F(a\vec{v} + b\vec{w}) = aF(\vec{v}) + bF(\vec{w})$ (1)

Für $V = \mathbb{C}^n$, $W = \mathbb{C}^m$ hat eine lineare Abbildung die Form:

$A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $\vec{x} \mapsto \vec{y} = A\vec{x}$, $= A \cdot \vec{x}$ mit $y^i = a_j x^j = \vec{A}^i \cdot \vec{x}$ (2)

m x n Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} A^1{}_1 & \cdots & A^1{}_j & \cdots & A^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^i{}_1 & \cdots & A^i{}_j & \cdots & A^i{}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A^m{}_1 & \cdots & A^m{}_j & \cdots & A^m{}_n \end{bmatrix} = \{A^i{}_j\}$$

$i = 1, \ldots,$
$j = 1, \ldots,$

(3)

Spalte j: $\vec{A}_j \equiv \begin{bmatrix} A^1{}_j \\ \vdots \\ A^i{}_j \\ \vdots \\ A^m{}_j \end{bmatrix}$ (4)

Reihe i:
$\vec{A}^i \equiv (A^i{}_1, \ldots, A^i{}_j, \cdots A^i{}_n)$ (5)

Abbildung der Standardbasis: $\vec{e}_j \xrightarrow{A} A\vec{e}_j = \vec{A}_j$ = Spalte j (6)

ZL5b

Komplexe (mxn)-Matrizen bilden $m\cdot n$ dim. Vektorraum, $\simeq \mathbb{C}^{m\cdot n}$

$$\mathrm{mat}(\mathbb{C}, m, n) \equiv \{A = \{A^i{}_j\} : \ i = 1,\dots,m; \ j = 1,\dots,n, \ A^i{}_j \in \mathbb{C}\} \tag{1}$$

mit Matrixaddition,
(elementenweise)

$$(A, B) \mapsto A + B, \qquad (A+B)^i{}_j \equiv A^i{}_j + B^i{}_j \tag{2}$$

und Skalarmultiplikation,
(elementenweise)

$$(\lambda, A) \mapsto \lambda A, \qquad (\lambda A)^i{}_j \equiv \lambda A^i{}_j \tag{3}$$

Verknüpfung von zwei linearen Abbildungen ⟹ Matrixmultiplikation

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^m \xrightarrow{B} \mathbb{C}^\ell \tag{4}$$

$$\vec{x} = \overset{A}{\longmapsto} \vec{y} = \underset{\text{(5e.3,4)}}{A\cdot\vec{x}} \overset{B}{\longmapsto} \vec{z} = B\cdot\vec{y} = B\cdot(A\cdot\vec{x}) \equiv C\cdot\vec{x} \tag{5}$$

$$C^k{}_j = B^k{}_i A^i{}_j = (\vec{B}^k)_i (\vec{A}_j)^i = \vec{B}^k \cdot \vec{A}_j \qquad \left\{ \begin{array}{l} k = 1,\dots,\ell \\ i = 1,\dots,m \\ j = 1,\dots,n \end{array} \right. \tag{6}$$

(Zeile k von B) •(Spalte j von A)

Matrixmultiplikation ist assoziativ & distributiv, aber nicht kommutativ !

Zusammenfassung: L5.5-6 Basistransformationen

ZL5c

Zwei Vektorräume: $V = \mathrm{span}\{\hat{v}_j\}$, $\qquad W = \mathrm{span}\{\hat{w}_i\}$ (1)

Allgemeine lineare Abbildung: $\hat{A}: V \to W$ $\qquad \hat{x} = \hat{v}_j x^j \mapsto \hat{y} = \hat{w}_i y^i$ (2)

Matrixdarstellung v. A: $\hat{A}(\hat{v}_j) = \hat{w}_i A^i{}_j$ $\qquad \vec{y} = A\cdot\vec{x}$, $A = \{A^i{}_j\}$ (3)

In Standardbasis: A bildet Basisvektor $\vec{e}_j$ ab auf: $\qquad \vec{A}_j$ = Spalte j von A (4)

Zwei Basen für denselben Raum: $V = \mathrm{span}\{\hat{v}_j\} = \mathrm{span}\{\hat{v}'_{i'}\}$ (5)

Basistransformation: $T: V \to V$ $\qquad \hat{v}_j = \hat{v}'_{i'} T^{i'}{}_j$ (6)

Matrixdarstellung v. T: $T = \{T^i{}_j\}$ $\qquad x'^{i'} = T^{i'}{}_j x^j$, $\vec{x}' = T\cdot\vec{x}$ (7)

Darstellung v. altem Basisvektor $\hat{v}_j$ in neuer Basis: $\qquad \vec{T}_j$ = Spalte j von T (8)

Inverse Transformation: $T^{-1} = \{(T^{-1})^j{}_{i'}\}$ $\qquad \hat{v}'_{i'} = \hat{v}_j (T^{-1})^j{}_{i'}$, $x^j = (T^{-1})^j{}_{i'} x'^{i'}$ (9)

Darstellung v. neuem Basisvektor $\hat{v}'_{i'}$ in alter Basis: $\qquad (\overrightarrow{T^{-1}})_{i'}$ = Spalte i von T^{-1} (10)

Bezug zwischen $\vec{y} = A\cdot\vec{x}$ (11) und $\vec{y}' = A'\cdot\vec{x}'$ (12): $\qquad A' = T\cdot A\cdot T^{-1}$ (13)

Zusammenfassung: L6 Determinanten

ZL6a

Determinante: diagnostiziert lin. Unabhängigkeit d. Spaltenvektoren einer nxn-Matrix

Leibniz-Regel: $$\det A \equiv \sum_P \mathrm{sgn}(P)\, A^{P1}{}_1 \dots A^{Pn}{}_n = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} A^{i_1}{}_1 \dots A^{i_n}{}_n \qquad (1)$$

2x2: $$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = a^1 b^2 - a^2 b^1$$

3x3: $$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\, a^i b^j c^k \qquad (2)$$

Laplace-Entwicklung: $$\det A = \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}^k{}_j A^k{}_j = \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}^i{}_k A^i{}_k \qquad (3)$$

(j fest) (i fest) (hier keine

Kofaktor: $$\hat{A}^i{}_j \equiv (-1)^{i+j} M^i{}_j \qquad (4)$$

Unterdeterminante:
(streiche Zeile i, Spalte j aus A,
bilde dann die Determinante)

Diagonalmatrix: $$\det(\lambda_i \delta^i{}_j) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad , \quad \det \mathbb{1} = 1 \qquad (5)$$

Transponierte: $$\det A = \det A^T \qquad (6)$$

ZL6b

Multilinearität: $$\det(\vec{A}_1, \dots, \underbrace{\lambda \vec{B} + \mu \vec{C}}_{\text{j-Spalte}}, \dots, \vec{A}_n) = \lambda \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{B}, \dots, \vec{A}_n) + \mu \det(\vec{A}_1, \dots, \vec{C}, \dots, \vec{A}_n) \qquad (1)$$

j-Spalte

Antisymmetrie: Vorzeichenwechsel beim Vertauschen v. zwei Zeilen oder zwei Spalten.

$$\det(\dots, \vec{B}, \dots, \vec{C}, \dots) = -\det(\dots, \vec{C}, \dots, \vec{B}, \dots) \qquad (2)$$

Zwei gleiche Spalten oder Zeilen: $$\det(\dots, \vec{B}, \dots, \vec{B}, \dots) = 0 \qquad (3)$$

Konstruktion des Inversen: $$\underline{\underline{A}} = \{A^i{}_j\} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} \equiv \underline{\underline{C}} = \{C^i{}_k\}, \quad C^i{}_k = \frac{\tilde{A}^k{}_i}{\det \underline{\underline{A}}} \qquad (4)$$

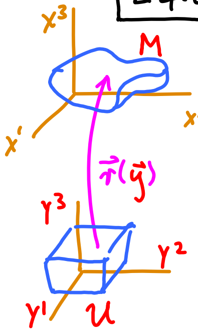
$\det \underline{\underline{A}} \neq 0$ $\Longleftrightarrow$ A invertierbar $\Longleftrightarrow$ Spaltenvektoren v. A sind lin. unabhängig

Multiplikationstheorem: $$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = (\det \underline{\underline{A}})(\det \underline{\underline{B}}) \qquad (5)$$

Det. der Inversen $$\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = (\det \underline{\underline{A}})^{-1} \qquad (6)$$

Krummlinige Integration in n Dimensionen

Z4.5



$$\vec r:\ \mathcal U \subset \mathbb R^n \longrightarrow M \subset \mathbb R^n$$

$$\vec y \longmapsto \vec r(\vec y) \equiv \vec x(\vec y) = \begin{pmatrix} x^1(y^1,\dots,y^n) \\ \vdots \\ x^n(y^1,\dots,y^n) \end{pmatrix}$$

krummlinig

kartesisch

n-dimensionales 'Volumenelement':

$$dV^n = dy^1 \dots dy^n \cdot \left| \frac{\partial(x^1,\dots,x^n)}{\partial(y^1,\dots,y^n)} \right|$$

'Jacobi-Determinante', 'Funktionaldeterminante': = Volumenelement, welches von Koordinatenbasisvektoren $\vec v_j = \frac{\partial \vec x}{\partial y_j}$ aufgespannt wird:

$$\left|\frac{\partial \vec x}{\partial \vec y}\right| \equiv \left|\frac{\partial(x^1,\dots,x^n)}{\partial(y^1,\dots,y^n)}\right| = \det\left[\frac{\partial \vec x}{\partial y^1}, \frac{\partial \vec x}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial \vec x}{\partial y^n}\right] \equiv \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial y^n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{bmatrix}$$

n-dimensionales Integral:

$$\int_M dx^1 \dots \int dx^n\, f(x^1,\dots,x^n) = \int_{\mathcal U} dy^1 \dots \int dy^n \left|\frac{\partial(x^1,\dots,x^n)}{\partial(y^1,\dots,y^n)}\right| f(x^1(\bar y),\dots,x^n(\bar y))$$

Das ist Verallgemeinerung der Substitutionsrege in 1D: $\int dx\, f(x) = \int dy \left|\frac{dx}{dy}\right| f(x(y))$

Zusammenfassung: L7 Diagonalisieren, Eigenwerte, Eigenvektoren

ZL7

Eigenwertgleichung: $A \cdot \vec v = \lambda\, \vec v$ Eigenwert Eigenvektor (1)

Bedingung an EW: $0 = \det(A - \lambda\, \mathbb 1) := P_A(\lambda)$ charakteristisches Polynom (2)

Für $A \in \mathrm{mat}(\mathbb C, n, n)$ ist $P_A(\lambda)$ ein Polynom v. Grad n, mit n Nullstellen. (3)
diese entsprechen den n Eigenwerten v. A

Wenn EW λ_j bekannt ist, finde dazugehörigen EV $\vec v_j$ durch Lösen des linearen Gleichungsystems: $(A - \lambda_j \mathbb 1)\vec v_j = \vec 0$ (4)

Falls n linear unabhängige EV existieren, wird A diagonalisiert durch, $T^{-1} \cdot A \cdot T = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (5)

wobei T die EV als Spaltenvektoren hat: $T = (\vec v_1, \vec v_2, \dots, \vec v_n)$ (6)

Determinante = Produkt der Eigenwerte: $\det(A) = \prod_j \lambda_j$ (7)

Spur = Summe der Eigenwerte: $Sp(A) = \sum_j \lambda_j$

Zusammenfassung: L8.1 Unitäre/orthogonale Matrizen

ZL 8a

Reelles Skalarprodukt (L3.1): $\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u^i \delta_{ij} v^j \quad u^i, v^j \in \mathbb{R}$

Komplexes Skalarprodukt (L3.4): $\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{u^i} \delta_{ij} v^j \quad u^i, v^j \in \mathbb{C}$

Komplexe Matrix:

$A = \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$

$(A)^i{}_j = A^i{}_j$

Adjungierte Matrix:

$A^\dagger \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, m)$,

$(A^\dagger)^i{}_j \underset{\uparrow}{=} (A^\dagger)_i{}^j \equiv \overline{(A)^j{}_i}$

in Orthnormalbasis

Transponierte Matrix:

$A^T \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, m)$

$(A^T)^i{}_j \underset{\uparrow}{=} (A^T)_i{}^j \equiv (A)^j{}_i$

in Orthnormalbasis

$\mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n) \ni U$ ist 'unitär' falls $U^\dagger \cdot U = \mathbb{1} \overset{\text{(äquivalent)}}{\Leftrightarrow} U^{-1} = U^\dagger$

Komplexes Skalarprodukt invariant: $\langle U \cdot \vec{v}, U \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

$\mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n) \ni O$ ist 'orthogonal' falls $O^T \cdot O = \mathbb{1} \quad (1) \overset{\text{(äquivalent)}}{\Leftrightarrow} O^{-1} = O^T$

Reelles Skalarprodukt invariant: $\langle O \cdot \vec{v}, O \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

Spalten (oder Zeilen-)vektoren einer unitären oder orthogonalen Matrix bilden eine <u>orthonormierte Basis.</u> $U = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \qquad \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$

Zusammenfassung: L8.1 Unitäre/orthogonale Gruppen

ZL 8b

'Unitäre Gruppe': $U(n) = \{ U \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n) ; \ U U^\dagger = \mathbb{1} \}$

'Orthogonale Gruppe': $O(n) = \{ O \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n) ; \ O^T O = \mathbb{1} \}$

'spezielle unitäre Gruppe': $SU(n) = \{ U \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n) : U^\dagger U = \mathbb{1}, \ \det U = 1 \}$

'spezielle orthogonale Gruppe': $SO(n) = \{ O \in \mathrm{mat}(\mathbb{R}, n, n) : O^T O = \mathbb{1}, \ \det O = 1 \}$

Zusammenfassung: L8.2 Hermitesche/symmetrische Matrizen

$A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'hermitesch', falls $A \overset{!}{=} A^\dagger \Rightarrow A^i{}_j \overset{!}{=} (A^\dagger)^i{}_j \equiv \overline{A^j{}_i}$

Für <u>hermitesche</u> Matrizen gilt: $\langle \vec{z}, A \vec{x} \rangle = \langle A \vec{z}, \vec{x} \rangle$ und $\langle \vec{x}, A \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$

$A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C}, n, n)$ ist 'symmetrisch', falls $A \overset{!}{=} A^T \Rightarrow A^i{}_j \overset{!}{=} (A^T)^i{}_j \equiv A^j{}_i$

Für symmetrische Matrizen gilt: $\langle \vec{z}, A \vec{x} \rangle = \langle A \vec{z}, \vec{x} \rangle$

Zusammenfassung: L8.2 Diagonalisierung v. hermiteschen und symm. Matrizen

ZL8c

$A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)$ ist 'hermitesch', falls $\quad A \overset{!}{=} A^\dagger \Rightarrow A^i{}_j \underset{\uparrow}{=} (A^\dagger)^i{}_j \equiv \overline{A^j{}_i}$

in Orthonormalbasis

$A \in \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)$ ist 'symmetrisch', falls $\quad A \overset{!}{=} A^T \Rightarrow A^i{}_j \overset{\swarrow}{=} (A^T)^i{}_j \equiv A^j{}_i$

(oder $\mathbb{R}$)

Für alle hermiteschen (insb. auch für alle reelle symmetrischen) Matrizen gilt:

- sie sind immer diagonalisierbar
- alle Eigenwerte sind reell: $\lambda = \bar{\lambda}$
- es lässt sich immer eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren finden
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal: $(\lambda_2 - \lambda_1)\langle \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 \rangle = 0$

Für $\left\{ \begin{array}{l} \text{hermitesche} \\ \text{reell symmetrische} \end{array} \right\}$ Matrizen ist $T \left\{ \begin{array}{ll} \text{unitär:} & T^{-1} = T^\dagger \\ \text{orthogonal:} & T^{-1} = T^T \end{array} \right.$

Zusammenfassung: C5.1-3,5 Taylor-Reihen

ZC5.1-3

'Taylor-Reihe' v. f(x) um x=y: $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-y)^n f^{(n)}(y)$

Wichtige Beispiele:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (2) \qquad \ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1}(-z)^{n+1}, \qquad \text{für} \quad |z| < 1$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad (4) \qquad \sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \text{für} \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Euler-de Moivre: $\quad e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (7) \qquad$ Euler: $\quad e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (8)$

Polardarstellung einer komplexen Zahl: $\quad z = x + iy = |z| e^{i\phi} \quad (9) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} |z|^2 = x^2 + y^2, & (10) \\ \tan\phi = y/x & (11) \end{array} \right.$

Zusammenfassung: L7.4 Funktionen von Matrizen

ZL7.4a

Sei f(z) eine beliebige komplexe Funktion mit wohldefinierter Taylor-Reihe,

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, \qquad z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Erweiterung als Matrix-Funktion:

$$f: \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n) \to \mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n), \qquad A \mapsto f(A) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n$$

Falls die Matrix diagonalisierbar ist, $A = T D T^{-1}$ mit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

gilt:

$$f(A) = T f(D) T^{-1} = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}$$

Zusammenfassung: C7.2 Separable Differentialgleichungen

ZC7.2

Separable DG:
(f- und t-Abhängigkeit faktorisiert)

$$d_t f(t) = g(t)\, h(f(t)) \qquad (1)$$

mit $f(t_0) = f_0$ (1')

Lösungsweg: Trennung der Variablen

Trennen: $$df \frac{1}{h(f)} = g(t)\, dt \qquad (2)$$

Integrieren: $$\int_{f_0 = f(t_0)}^{f = f(t)} d\tilde{f} \frac{1}{h(\tilde{f})} = \int_{t_0}^{t} g(\tilde{t})\, d\tilde{t} \qquad (3)$$

Stammfunktionen: $$H(f) - H(f_0) = G(t) - G(t_0) \qquad (4)$$

Nach f auflösen: $$f(t) = H^{-1}\big(G(t) - G(t_0) + H(x_0)\big) \qquad (5)$$

Zusammenfassung: C7.3 Lineare DG 1. Ordnung

Z C7.3

Lineare DG: $\dot f(t) = g(t)\, f(t) + h(t)$, mit $f(0) = f_0$

falls h(t) $= 0$: homogen

falls h(t) $\neq 0$: inhomogen

Allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen DG: $f(t) = f_h(t) + f_p(t)$

Allgemeine homogene Lösung erfüllt homogene DG: $\dot f_h(t) = g(t)\, f_h(t)$

partikuläre Lösung erfüllt inhomogene DG: $\dot f_p(t) = g(t)\cdot f_p(t) + h(t)$

homogene Lösung (Trennung d. Variablen):

$$f_h(t) = f_0\, e^{\Phi(t)},$$

mit

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde t\, g(\tilde t)$$

partikuläre Lösung (Variation d. Konstanten):

$$f_p(t) = c(t)\, e^{\Phi(t)}$$

mit

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} d\tilde t\, h(\tilde t)\, e^{-\Phi(\tilde t)}$$

Zusammenfassung: C7.4 Homogenes System von linearen DG 1. Ordnung

Z C7.4a

$$\underset{\in \mathbb{C}^n}{d_t \vec f(t)} = \underset{\mathrm{mat}(\mathbb{C},n,n)}{A(t)} \cdot \vec f(t)$$

Superpositionsprinzip (SP) für lineare, homogene DG:

falls $d_t \vec f_j(t) = A(t)\cdot \vec f_j(t) \quad (j = 1,2)$ dann $d_t \vec f(t) = \lambda_1 \vec f_1(t) + \lambda_2 \vec f_2(t)$

Für konstanten Koeffizienten:

exp-Ansatz: $\vec f(t) = \vec v\, e^{\lambda t}$

Zeitabhängigkeit nur im Exponenten!

zeitunabhängiger Vektor, $\in \mathbb{C}^n$

führt auf Eigenwertgleichung: $A\vec v = \lambda \vec v$

Falls A diagonalisierbar ist, ist die allgemeine Lösung die Summe über alle Eigenlösungen:

$$\vec f(t) = \sum_j \vec v_j\, e^{\lambda_j t}\, c_j$$

mit $A\cdot \vec v_j = \lambda_j \vec v_j$, $j = 1,\dots,n$

$\vec c = T^{-1}\cdot \vec f(0)$, $T = (\vec v_1, \dots, \vec v_n)$

Allgemeinerer Exponentialansatz:
(funktioniert auch dann, wenn
A nicht diagonalisierbar ist):

$$\vec f(t) = e^{At}\, \vec f_0$$